УДК 539.3) https://doi.org/10.15407/itm2020.03.064

К. В. АВРАМОВ[1, 2], Н. Г. САХНО[1], Б. В. УСПЕНСЬКИЙ[2]

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ДИНАМІЧНИЙ ВІДГУК НАНОКОМПОЗИТНОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ ШПАНГОУТОМ ПІД ДІЄЮ УДАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

[1] Національний технічний університет «ХПІ»
Міністерство освіти і науки України,
вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна; e-mail:omsroot@kpi.kharkov.ua
[2] Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,
вул. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail:admi@ipmach.kharkov.ua

Роботу присвячено дослідженню перехідних процесів, які виникають в нанокомпозитній оболонці зі шпангоутом під дією ударного навантаження. Нанокомпозити є перспективними новими матеріалами для аерокосмічної галузі. Однак аналіз динамічних процесів в нанокомпозитних конструкціях потребує створення нових методів в силу анізотропної та функціонально-градієнтної природи цих матеріалів. Додатково ускладнює задачу необхідність аналізу складеної конструкції.

В роботі запропоновано модель деформування функціонально-градієнтної композитної конічної оболонки, армованої вуглецевими нанотрубками з верхнім ізотропним шпангоутом. Деформування нанокомпозитної функціонально-градієнтної конічної оболонки описується теорією зсуву Редді високого порядку, а деформування кільцевого шпангоута – гіпотезами Ейлера–Бернуллі. Для дослідження вільних коливань композитної конструкції застосовується метод Релея–Рітца. В якості основних невідомих є переміщення та кути обертання конічної оболонки.

Отримано математичну модель нестаціонарного відгуку конструкції під дією ударного навантаження в формі лінійної динамічної системи відносно узагальнених координат. Для отримання цієї системи використано метод заданих форм.

Проведено числові дослідження вільної динаміки та нестаціонарного відгуку нанокомпозитної конічної оболонки з ізотропним кільцевим шпангоутом прямокутного розрізу під дією ударного навантаження. Результати числового моделювання перехідного процесу в оболонці порівняно з результатами скінченноелементного моделювання в пакеті ANSYS.

Досліджено вплив верхнього шпангоута на амплітуди нестаціонарного відгуку нанокомпозитної оболонки. Показано, що верхній шпангоут суттєво знижує амплітуди нестаціонарного відгуку композитної конічної оболонки при дії на неї ударного навантаження. Розроблений метод та отримані висновки можуть бути використані в аерокосмічній галузі при проєктуванні вузлів багатоступінчастих ракетоносіїв з нанокомпозитних матеріалів.

Ключові слова: *функціонально-градієнтний нанокомпозитний матеріал, метод заданих форм, лінійна динамічна система, нестаціонарний відгук, складена оболонка.*

This work is devoted to the study of transient processes occurring in a nanocomposite shell with a ring stiffener under the action of an impact load. Nanocomposites are promising new materials for the aerospace industry. However, the analysis of dynamic processes in nanocomposite structures requires the development of new methods due to the anisotropic, functional-gradient nature of these materials. The problem is further complicated if a composed structure is to be analyzed.

This paper proposes a model of deformation of a functionally graded composite conical shell reinforced with carbon nanotubes with an isotropic ring stiffener. The deformation of the functionally graded nanocomposite conical shell is described by Reddy's high-order shear theory, and the deformation of the ring stiffener is described by the Euler–Bernoulli hypotheses. The Rayleigh–Ritz method is used to study the natural vibrations of the composite structure. The main variables are the displacements and angles of rotation of the conical shell.

A mathematical model of the transient response of the structure under the action of an impact load is obtained in the form of a linear dynamic system in generalized coordinates. To obtain this system, the prescribed form method is used.

Numerical studies of the free dynamics and transient response of a nanocomposite conical shell with an isotropic ring stiffener of rectangular section under the action of an impact load were carried out. The results of the numerical modeling of the transient process in the shell showed a close agreement with the results of finite element modeling in the ANSYS package.

The effect of the ring stiffener on the amplitudes of the transient response of the nanocomposite shell is investigated. It is shown that the ring-stiffener significantly reduces the amplitude of the transient response of the composite conical shell when it is subjected to an impact load. The proposed method and the conclusions drawn may be used in the aerospace industry in the design of nanocomposite units for multistage launch vehicles.

Keywords: *functionally graded nanocomposite, prescribed form method, linear dynamic system, transient response, compound shell.*

Використання вуглецевих нанотрубок (ВНТ) при армуванні композитних матеріалів є перспективним напрямом в інженерних застосуваннях, оскільки їхні механічні характеристики є на кілька порядків вищими, ніж у сталі при відносно невеликій масі [1 – 3]. Основні результати досліджень нанокомпозитів систематизовано в серії оглядових статей [4 – 7].

Механічні характеристики нанокомпозитів досліджено в багатьох роботах. Експерименти з розтягування нанокомпозитних зразків розглянуто в [8]. В роботі [9] досліджено вплив армування нанотрубками композита з епоксидною матрицею. У [10] показано, що межа міцності композитної конструкції з каучукової епоксидної смоли, яку армовано нанотрубками, підвищується. У роботі [11] запропоновано модифіковане правило змішування для оцінки властивостей нанокомпозитного матеріалу.

Статику та динаміку циліндричних оболонок з нанокомпозитів на базі лінійних математичних моделей досліджено в роботах [12 – 16]. Лінійні коливання пластин з нанокомпозитів розглянуто в [17 – 19]. Аналіз вільних коливань пологої оболонки з градієнтного матеріалу, який армовано нанопластинками, досліджено в [20 – 21]. Для побудови рівнянь коливань оболонок використано теорію зсуву високого порядку. Динаміку циліндричної нанокомпозитної оболонки під впливом ударних навантажень досліджено в [22].

Більшість тонкостінних конструкцій посилюються стрингерами та шпангоутами. Дослідження таких конструкцій викладено в багатьох роботах. У монографії [23] наведено найбільш точні моделі сумісного деформування шпангоута з оболонкою та розглянуто кінематичні співвідношення, які описують сумісне деформування оболонки та шпангоута. У статті [24] розглянуто деформування шпангоутів без урахування їхньої крутильної жорсткості. Побудовано дискретну модель шпангоута з використанням дельта-функцій. Аналіз вільних коливань циліндричної оболонки зі шпангоутами, яка обертається, наведено в [25]. Шпангоути розглядаються як дискретні елементи та використовується метод Рітца. В [26] запропоновано теоретичний метод для дослідження впливу шпангоутів на вібраційні характеристики та перехідні процеси в композитній циліндричній оболонці.

У даній роботі розглянуто складену конструкцію з конічної оболонки та верхнього шпангоута. Конічну оболонку створено з нанокомпозитного матеріалу, а кільцевий шпангоут виготовлено з ізотропного матеріалу. Досліджено нестаціонарний відгук конструкції внаслідок дії двох ударних навантажень, які діють на верхній шпангоут. Для опису відгуку оболонки використано теорію Редді високого порядку, а для деформування шпангоута – модель Ейлера–Бернуллі. Для отримання системи звичайних диференційних рівнянь нестаціонарного відгуку конструкції використано метод заданих форм. Отриманий відгук порівнюється з результатами моделювання в програмному комплексі ANSYS.

Постановка задачі та основні співвідношення. Розглядається складена конструкція з нанокомпозитної конічної оболонки та верхнього ізотропного шпангоута, який кріпиться до конічної оболонки. Зв’яжемо з серединною поверхнею конічної оболонки криволінійну систему координат (x,φ,z) (рис. 1). Вісь x спрямовано вздовж твірної, а вісь φ є окружною координатою конічної оболонки. Вісь z спрямовано за нормаллю до серединної поверхні оболонки.

Ескіз кільцевого шпангоута наведено на рис. 2. Окружною координатою кільця є φ. Поперековий розтин кільця пов’язаний з системою координат (x_1, z_1).

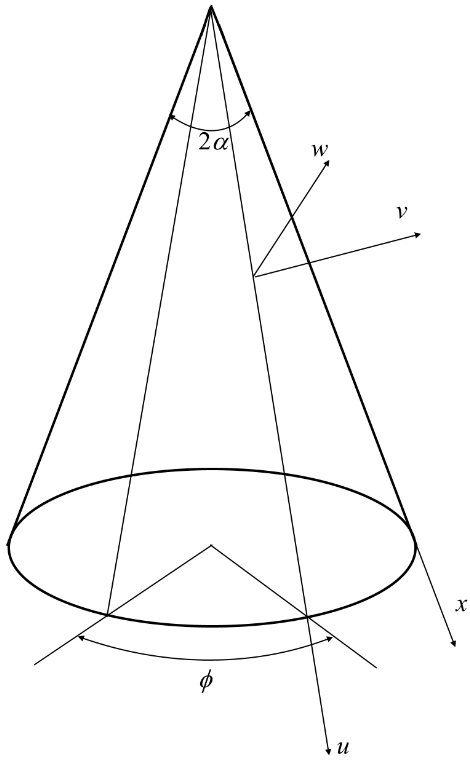

Рис. 1

При наноармуванні можуть бути створені матеріали з різним розподілом нанотрубок за товщиною. При цьому виникає новий функціонально-градієнтний ортотропний матеріал. Його механічні характеристики оцінюються за допомогою правила змішування наступним чином [27]:

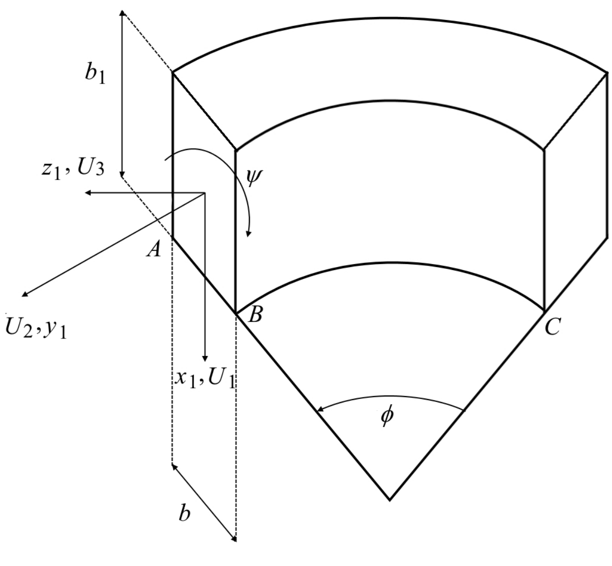

Рис. 2

$$E_{xx}(z)=\eta_1 V_{CNT}(z)E_{11}^{CNT}+V_m(z)E^m,\ \ E_{\varphi\varphi}(z)=\frac{\eta_2 E_{22}^{CNT}E^m}{V_{CNT}(z)E^m+V_m(z)E_{22}^{CNT}},$$

$$G_{x\varphi}(z)=\frac{\eta_3 G_{12}^{CNT}G^m}{V_{CNT}(z)G^m+V_m(z)G_{12}^{CNT}},\quad \mu_{x\varphi}(z)=V_{CNT}(z)\mu_{12}^{CNT}+V_m(z)\mu^m, \tag{1}$$

$$\mu_{\varphi x}(z)=\frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)}E_{22}(z),\ \rho(z)=V_{CNT}(z)\rho^{CNT}+V_m(z)\rho^m,\ V_m(z)=1\text{-}V_{CNT}(z),$$

де $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ – модуль Юнга та модуль зсуву ВНТ; μ_{12}^{CNT} – коефіцієнт Пуассона ВНТ; η_1, η_2, η_3 – коефіцієнт ефективності з'єднання матриця – ВНТ; E^m, G^m – модуль Юнга та модуль зсуву матриці композита; ρ^{CNT}, ρ^m – густина ВНТ та матриці композита. Оскільки матеріал оболонки є композитним та градієнтним, зсув повинен враховуватись в розрахунках [28]. Слідуючи роботі [29], модулі зсуву визначаються наступним чином: $G_{xz}(z)=G_{x\varphi}(z), G_{\varphi z}(z)=G_x(z)$. Закон Гука для ортотропного градієнтного матеріалу має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{x\varphi}\\ Q_{x\varphi} & Q_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{bmatrix},\ \sigma_{xz}=G_{xz}(z)\gamma_{xz},\ \sigma_{x\varphi}=G_{x\varphi}(z)\gamma_{x\varphi}, \tag{2}$$

де $Q_{xx}(z)=\dfrac{E_{xx}(z)}{1-\mu_{x\varphi}(z)\mu_{\varphi x}(z)}$; $Q_{\varphi\varphi}(z)=\dfrac{E_{\varphi\varphi}(z)}{1-\mu_{x\varphi}(z)\mu_{\varphi x}(z)}$; $Q_{x\varphi}(z)=\dfrac{\mu_{\varphi x}(z)E_{xx}(z)}{1-\mu_{x\varphi}(z)\mu_{\varphi x}(z)}$; $\gamma_{xz}, \gamma_{x\varphi}, \gamma_{\varphi z}$ – деформації зсуву; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ – елементи тензора деформацій; $\sigma_{xz}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{x\varphi}$ – напруження зсуву; $\sigma_{xx}, \sigma_{\varphi\varphi}$ – елементи тензора напружень.

Модель деформування конічної оболонки. Розглянемо геометрію та деформування конічної оболонки кола серединної поверхні, площини яких є паралельними основі, мають радіус r: $r=x\sin\alpha$. Радіус кривизни поверхні конуса вздовж цього кола позначимо $R_\varphi=x\,\mathrm{tg}(\alpha)$.

Оскільки розглядається нанокомпозитна оболонка, необхідно враховувати зсув та інерцію обертання. Для цього скористаємось теорією зсуву високого порядку, яку наведено в [30, 31]. Проєкції переміщень точок оболонки на твірну конуса позначимо u_x; проєкцію переміщень на окружну координату – u_φ; u_z характеризує проєкцію на нормаль до серединної поверхні оболонки. Проєкції переміщень запишемо в наступному вигляді:

$$u_x=u(x,\varphi,\varphi)+z\psi_x(x,\varphi,\varphi)+z^2\theta_x+z^3\gamma_x;$$
$$u_\varphi=\left(1+\frac{z}{R_\varphi}\right)v(x,\varphi,\varphi)+z\psi_\varphi(x,\varphi,\varphi)+z^2\theta_\varphi+z^3\gamma_\varphi;\ u_z=w(x,\varphi,\varphi), \tag{3}$$

де u,v,w – проєкції переміщень точок серединної поверхні на координатні лінії x,φ,φ відповідно (рис. 1). Коефіцієнти розкладень $\theta_x,\gamma_x,\theta_\varphi,\gamma_\varphi$ є невідомими та можуть бути знайдені з граничних умов:

$$\left.\tau_{xz}\right|_{z=\pm0.5h}=\left.\tau_{\varphi z}\right|_{z=\pm0.5h}=0, \tag{4}$$

де h – товщина оболонки;

$$\tau_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x};\ \tau_{\varphi z}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{1+zR_\varphi^{-1}}\left(\frac{\partial u_z}{r\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{R_\varphi}\right). \tag{5}$$

Ввівши розкладення (3) у (5) та використавши граничні умови (4), можна знайти співвідношення для $\theta_x,\gamma_x,\theta_\varphi,\gamma_\varphi$:

$$\theta_x=0;\gamma_x=\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_x\right);\ \theta_\varphi=\frac{1}{2R_\varphi r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{1}{2R_\varphi}\psi_\varphi;$$
$$\gamma_\varphi=\frac{-8R_\varphi^2+h^2}{6R_\varphi^2h^2}\psi_\varphi-\frac{\left(8R_\varphi^2-h^2\right)}{6r\ h^2R_\varphi^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{v}{3R_\varphi^3}. \tag{6}$$

В подальшому задача нестаціонарного відгуку конструкції розв'язується відносно п'яти невідомих:

$$u(x,\varphi,\varphi),\ v(x,\varphi,\varphi),\ w(x,\varphi,t),\ \psi_X(x,\varphi,t),\ \psi_\varphi(x,\varphi,t). \tag{7}$$

Для формулювання рівнянь руху використано метод заданих форм [32]. Вирази для потенційної та кінетичної енергії конструкції побудовано як функції її переміщень та швидкостей. Зв'язок деформацій та компонентів переміщень конструкції може бути виведено зі співвідношень, які наведено в [31]. Записавши їх для конічної оболонки, тензор деформацій можна представити у вигляді наступних розкладень:

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{X,0}+z\left(k_x^{(0)}+zk_x^{(1)}+z^2k_x^{(2)}\right);\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\varepsilon_{\varphi,0}+z\left(k_\varphi^{(0)}+zk_\varphi^{(1)}+z^2k_\varphi^{(2)}\right);$$
$$\gamma_{x\varphi}=\gamma_{x\varphi,0}+z\left(k_{x\varphi}^{(0)}+zk_{x\varphi}^{(1)}+z^2k_{x\varphi}^{(2)}\right);\ \gamma_{xz}=\gamma_{xz,0}+z\left(k_{xz}^{(0)}+zk_{xz}^{(1)}+z^2k_{xz}^{(2)}\right); \tag{8}$$
$$\gamma_{\varphi z}=\gamma_{\varphi z,0}+z\left(k_{\varphi z}^{(0)}+zk_{\varphi z}^{(1)}+z^2k_{\varphi z}^{(2)}\right),$$

де $k_x^{(i)}$, $k_\varphi^{(i)}$, $k_{x\varphi}^{(i)}$, $k_{xz}^{(i)}$, $k_{\varphi z}^{(i)}$, i=1..3 – функції змінних (7).

Потенційна енергія конічної оболонки має форму [27, 31]:

$$\varPi=0.5\iiint_V\left(Q_{11}(z)\varepsilon_{xx}^2+2Q_{12}(z)\varepsilon_{\varphi\varphi}\varepsilon_{XX}+Q_{22}(z)\varepsilon_{\varphi\varphi}^2+G_{23}(z)\gamma_{\varphi z}^2+\right.$$
$$\left.+G_{13}(z)\gamma_{xz}^2+G_{21}(z)\right)\gamma_{x\varphi}^2\left(1+\frac{z}{R_\varphi}\right)dzrdxd\varphi, \tag{9}$$

де V – об'єм, який займає конічна оболонка. Підставивши розкладення (8) в потенційну енергію та провівши розкладення по ступенях z, потенційну енергію можна представити у формі:

$$\varPi=0.5\iint_A rdxd\varphi\sum_{j=0}^{5}h_j, \tag{10}$$

де $A-$ область серединної поверхні конічної оболонки; h_j, $j=0\ldots5$ – функції змінних (7).

Кінетична енергія оболонки представляється наступним чином [27, 31]:

$$T=0.5\iiint_V \rho(z)\left(\dot{u}_x^2+\dot{u}_\varphi^2+\dot{u}_z^2\right)\left(1+\frac{z}{R_\varphi}\right)dzrdxd\varphi z, \qquad (11)$$

де $\dot{u}_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}$. Використавши розкладення (3) в (11), кінетичну енергію представимо в наступній формі:

$$T=0.5\iint_A rdxd\varphi\sum_{j=0}^{5} r_j P_j, \qquad (12)$$

де $r_j=\int_{-0.5h}^{0.5h} z^j\rho(z)dz; j=0,1,\ldots;$ P_j – функції змінних (7).

В подальшому розглядається конічна оболонка, яка защемлена внизу. (рис. 1). На защемленому краї виконуються наступні граничні умови:

$$u\big|_{x=L_2}=v\big|_{x=L_2}=w\big|_{x=L_2}=\psi_x\big|_{x=L_2}=\psi_\varphi\big|_{x=L_2}=0, \qquad (13)$$

де L_2- довжина твірної усіченого конуса від верхньої його вершини.

Модель деформування верхнього шпангоута. Розглядається система, в якій до верхнього краю конічної оболонки закріплено шпангоут. Верхній шпангоут та конічна оболонка з'єднуються на контурі $x=L_1$. Як показано нижче, наявність шпангоута дозволяє знизити амплітуди нестаціонарного відгуку оболонки внаслідок дії ударних навантажень. Це є важливим при проєктуванні адаптерів ракетоносіїв, до яких кріпляться піроболти для розділення ракети, оскільки при проведенні розділення не повинно постраждати електронне обладнання. Таким чином, моделювання нестаціонарного відгуку конічної оболонки з верхнім шпангоутом є важливою в прикладному сенсі задачею.

Розглянемо випадок, коли шпангоут виготовлено з ізотропного матеріалу. Його ескіз наведено на рис. 2. Стороною ABC шпангоут кріпиться до нанокомпозитної оболонки. Розглядається випадок жорсткого з'єднання між оболонкою та шпангоутом. Деформування кільця шпангоута описується гіпотезою Ейлера–Бернуллі [33]. Внаслідок перехідних процесів під впливом ударних навантажень кільце здійснює вигинальне деформування у двох перпендикулярних площинах, які описуються переміщеннями центрів тяжіння поперекового розрізу $\bar{u}(\varphi,t)$ та $\bar{w}(\varphi,t)$. Повздовжнє деформування описується окружними переміщеннями центрів тяжіння поперекового розрізу $\bar{v}(\varphi,t)$. Крутіння описується поворотом поперекового розрізу на кут $\psi(\varphi,t)$ навколо його центру тяжіння. Переміщення довільної точки поперекового розрізу стрижня описуються трьома проєкціями U_1,U_2,U_3 (рис. 2), які обчислюються наступним чином:

$$U_1 = \bar{u}(\varphi,t) - z_1\psi(\varphi,t);\;\; U_2 = \bar{v}(\varphi,t) + x_1\psi_1(\varphi,t) - z_1\psi_2(\varphi,t),$$
$$U_3 = \bar{w}(\varphi,t) + x_1\psi(\varphi,t); \qquad (14)$$

де $\psi_1(\varphi,t), \psi_2(\varphi,t)$ – кути обертання поперекового розрізу, який перпендикулярний серединній лінії при вигині в двох перпендикулярних площинах. Ці кути поворотів поперекового розрізу наведено на рис. 3.

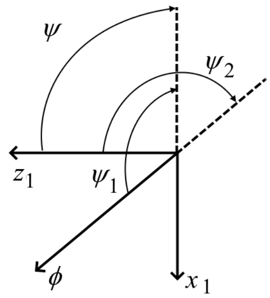

Рис. 3

Окружна деформація точок поперекового розрізу описується наступним чином [33]:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi - x_1\chi_X + z_1\chi_r, \qquad (15)$$

де χ_X та χ_r – зміна кривизн серединної лінії в напряму осей x_1, z_1. Величини $\varepsilon_\varphi, \chi_X, \chi_r$ та проєкції переміщень центру тяжіння поперекового розрізу пов’язані наступним чином [33]:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi} + \frac{\bar{w}}{R_r};\;\; \chi_x = \frac{1}{R_r^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\varphi^2} - \frac{\psi}{R_r};\;\; \chi_r = \frac{-1}{R_r^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{R_r^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi}, \qquad (16)$$

де R_r – радіус серединної лінії кільця. Кутова деформація зсуву γ при крутінні визначається так: $\gamma = \rho\ \chi(\varphi,t)$; $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Тоді параметр $\chi(\varphi,t)$ розраховується наступним чином:

$$\chi(\varphi,t) = \frac{-1}{R_r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\psi_1}{R_r}. \qquad (17)$$

Потенційна енергія деформування кільця має вигляд:

$$\varPi_1 = 0.5\int_0^{2\pi}\left(EA\varepsilon_\varphi^2 + EJ_x\chi_x^2 + EJ_r\chi_r^2 + GJ\chi^2\right)R_r\,d\varphi, \qquad (18)$$

де E – модуль Юнга; G – модуль зсуву; A – площа поперекового розрізу кільця; $J_x = \iint\limits_{A_1} x_1^2\,dx_1dz_1$; $J_r = \iint\limits_{A_1} z_1^2\,dx_1dz_1$; $J_x = \iint\limits_{A_1}\left(x_1^2 + z_1^2\right)dx_1dz_1$. Використання у (18) співвідношень (16, 17) дозволяє представити потенційну енергію кільця у вигляді квадратичної форми від переміщень серединної лінії.

Для дослідження руху складеної конструкції необхідно записати кінетичні умови жорсткого з'єднання шпангоута та конічної оболонки на поверхні $x=L_1$. Ці умови можуть бути отримані у спосіб, подібний до описаного в [34]. Будуються три рівняння зшивання, які відображають проєкції переміщень на осі x_1, y_1, z_1 (рис. 2) на поверхні з'єднання конічної оболонки та шпангоута. Ці умови мають наступний вигляд:

$$U_2=\left|v_{x=L_1}\right.;\ U_3=\left|u_{x=L_1}\sin\alpha+\right|w_{x=L_1}\cos\alpha;\ U_1=\left|u_{x=L_1}\cos\alpha-\right|w_{x=L_1}\sin\alpha, \quad (19)$$

де $U_1=U_1\big|_{z_1=0}$; $U_2=U_2\big|_{z_1=0;x_1=0.5b_1}$; $U_3=U_3\big|_{x_1=0.5b_1}$.

Умови проєктування кутів обертання в точці з'єднання елементів оболонки мають наступний вигляд [29]:

$$\psi=-\psi_X\left(L_1,\varphi\right);\ \psi_2=-\psi_\varphi\left(L_1\right)\cos\alpha;\ \psi_1=-\psi_\varphi\left(L_1\right)\sin\alpha. \quad (20)$$

Врахування (3), (14), (20) у (19) дозволяє отримати співвідношення, які зв'язують переміщення центру тяжіння поперекового розрізу кільця та узагальнені переміщення оболонки:

$$\begin{gathered}\bar{v}(\varphi,t)=v\left(L_1,\varphi,t\right)+0.5b_1\psi_\varphi\left(L_1,\varphi,t\right)\sin\alpha;\\ \bar{w}(\varphi,t)=u\left(L_1,\varphi,t\right)\sin\alpha+w\left(L_1,\varphi,t\right)\cos\alpha+0.5b_1\psi_x\left(L_1,\varphi,t\right);\\ \bar{u}(\varphi,t)=u\left(L_1,\varphi,t\right)\cos(\alpha)-w\left(L_1,\varphi,t\right)\sin(\alpha).\end{gathered} \quad (21)$$

Базуючись на (16) та (21), величини $\varepsilon_\varphi, \chi_X, \chi_r, \chi$ можуть бути представлені через переміщення оболонки. Використання цього представлення при обчисленні потенційної енергії шпангоута (18) дозволяє представити потенційну енергію в формі залежності від переміщень оболонки.

Кінетична енергія шпангоута може бути представлена у вигляді:

$$T_1=0.5\int_0^{2\pi}R_r\,d\varphi\iint_{A_1}dx_1dz_1\rho_r\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)^2\right], \quad (22)$$

де ρ_r – густина матеріалу шпангоута. Нехтування інерцією обертання та використання рівнянь (14) дозволяє представити кінетичну енергію у формі:

$$T_1=0.5\rho_r A\int_0^{2\pi}R_r\,d\varphi\left\{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\right)^2+\frac{J}{A}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\}. \quad (23)$$

Для представлення кінетичної енергії шпангоута (23) через переміщення конічної оболонки рівняння (21) використовується в кінетичній енергії шпангоута вираз (23). В результаті T_1 приймає вигляд функції переміщень оболонки.

Кінетична та потенційна енергії складеної оболонки T_Σ, Π_Σ мають вигляд:

$$T_\Sigma=T+T_1;\Pi_\Sigma=\Pi+\Pi_1. \quad (24)$$

Дослідження власних частот та форм коливань. Для дослідження нестаціонарної динаміки конструкції використовується метод заданих форм

[32], згідно якому нестаціонарний відгук розкладується за формами власних коливань. Для аналізу власних частот та форм коливань конструкції використовується метод Релея–Рітца [27, 35]. Основними невідомими задачі є переміщення та кути обертання нормалі конічної оболонки, оскільки переміщення шпангоута можуть бути виражені через них. Коливання конічної оболонки представимо в наступному вигляді:

$$u = U_n(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);\; v = V_n(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);\; w = w_n(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);$$
$$\psi_x = X_n(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);\; \psi_\varphi = Y_n(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t), \tag{25}$$

де ω – частота власних коливань конструкції; n – кількість хвиль в окружному напрямі. Функції $U_n(x), V_n(x), W_n(x), X_n(x), Y_n(x)$ представляють в формі розкладень за базисними функціями:

$$U_n(x) = \sum_{i=1}^{N_1} A_i \vartheta_i(x);\; V_n(x) = \sum_{i=1}^{N_2} A_{N_1+i}\vartheta_i(x);\; W_n(x) = \sum_{i=1}^{N_3} A_{N_1+N_2+i}\vartheta_i(x);$$
$$X_n(x) = \sum_{i=1}^{N_4} A_{N_1+N_2+N_3+i}\vartheta_i(x);\; Y_n(x) = \sum_{i=1}^{N_5} A_{N_1+N_2+N_3+N_4+i}\vartheta_i(x), \tag{26}$$

де $\{A\} = [A_1, \ldots, A_{N_*}]$ – невідомі параметри, які визначаються в результаті використання методу Релея–Рітца; ϑ_i – базисні функції. Для консольних конструкцій в якості базисних використовуються тригонометричні функції:

$$\vartheta_i(x) = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi(L_2 - L_1 - x)}{2(L_2 - L_1)}\right).$$

Підстановка розкладень (26) в кінетичну та потенційну енергії (24) дозволяє представити їх в наступному вигляді:

$$T_\Sigma = \omega^2 \sin^2(\omega t) T_\Sigma;\; \Pi_\Sigma = \cos^2(\omega t)\Pi_\Sigma. \tag{27}$$

На базі варіаційного принципу найменшої дії може бути записано співвідношення:

$$\delta \int_0^{2\pi/\omega} (T_\Sigma - \Pi_\Sigma) dt = 0. \tag{28}$$

Підстановка (27) у (28) дозволяє провести інтегрування:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (T_\Sigma - \Pi_\Sigma) dt = \frac{\pi}{\omega}\left[\tilde{\Pi}_\Sigma\left(A_1, \ldots, A_N\right) - \omega^2 \tilde{T}_\Sigma\left(A_1, \ldots, A_N\right)\right]. \tag{29}$$

Стаціонарне значення функціонала (29) досягається при виконанні наступних співвідношень:

$$\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\tilde{\Pi}_\Sigma - \omega^2 \tilde{T}_\Sigma\right) = 0; i = 1 \ldots N. \tag{30}$$

Рівняння (30) можуть бути представлені у вигляді узагальненої проблеми власних значень [32]:

$$\left(\left[\tilde{C}\right]-\omega^2\left[\tilde{M}\right]\right)\{A\}=0\,, \tag{31}$$

де $\left[\tilde{C}\right]$, $\left[\tilde{M}\right]$ – матриці жорсткості та мас відповідно.

Рівняння нестаціонарного відгуку конструкції. Розглядається нестаціонарний відгук конструкції внаслідок дії ударних навантажень, які моделюють спрацювання піротехнічних засобів адаптерів ракетоносіїв [36, 37]. Два ударних навантаження застосовуються на протилежних боках кільця шпангоута посередині верхнього розрізу кільця при значеннях окружної координати $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi$. Відповідні зосереджені сили представляються наступним чином:

$$Q=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{2} Q_0 \sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)\delta\left(\varphi-\varphi_j\right); 0 \le t \le T\,;\\ 0\,; t > T\,,\end{cases} \tag{32}$$

де T – час дії ударного навантаження. Параметр Q_0 визначається за заданою величиною імпульсу. Зосереджені сили Q спрямовано перпендикулярно до нижньої основи конуса.

Нестаціонарний відгук конструкції розкладається за власними формами коливань (26) наступним чином:

$$u=\sum_{j=1}^{m_1} U_{n_j}(x)q_j(t)\cos\left(n_j\varphi\right);\quad v=\sum_{j=1}^{m_2} V_{n_j}(x)q_{m_1+j}(t)\sin\left(n_j\varphi\right);$$

$$w=\sum_{j=1}^{m_3} W_{n_j}(x)q_{m_1+m_2+j}(t)\cos\left(n_j\varphi\right);\quad \psi_X=\sum_{j=1}^{m_4} X_{n_j}(x)q_{m_1+m_2+m_3+j}(t)\cos\left(n_j\varphi\right);$$

$$\psi_Y=\sum_{j=1}^{m_5} Y_{n_j}(x)q_{m_1+m_2+m_3+m_4+j}(t)\sin\left(n_j\varphi\right), \tag{33}$$

де $\{q\}=[q_1,\ldots,q_{m_*}]$ – вектор узагальнених координат конструкції. Слід підкреслити, що розкладення (33) проводиться за формами коливань з різною кількістю хвиль у окружному напрямі n_j, які збуджуються ударними навантаженнями на конструкцію.

Використання (33) у виразах для потенційної енергії Π_Σ (24) та проведення інтегрування дозволяє отримати вираз: $\Pi_\Sigma=0.5\sum\limits_{i,k=1}^{m} c_{ik}q_i q_k$. Аналогічним чином отримано: $T_\Sigma=0.5\sum\limits_{i,k=1}^{m} m_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$. Ці вирази для кінетичної та потенційної енергій визначають матриці мас та жорсткості конструкції у формі: $[C]=[c_{ij}];[M]=[m_{ij}]$.

З урахуванням того, що зовнішні сили є зосередженими навантаженнями, які діють на поверхні шпангоута в точці $z_1=0$ (рис. 2), віртуальна робота представляється наступним чином:

$$\delta A=\int_0^{2\pi} Q\text{¢}U_1 d\text{¨}\, Q_0 \sin\frac{\pi t}{T}\sum_{j=1}^{2}\delta\bar{u}\left(\text{¨}_j,t\right).$$

Проєкції переміщень шпангоута задовольняють (20), тому віртуальна робота представляється у формі:

$$\delta A=Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\cos(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\delta u\left(L_1,\text{¨}_j\right)-Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\delta w\left(L_1,\text{¨}_j\right).$$

Узагальнені сили Q_i, які відповідають узагальненим координатам q_i, при $t \le T$ мають вигляд:

$$Q_i=Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)U_{n_i}(L_1)\cos(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\cos\left(n_i\text{¨}_j\right); i=1,\ldots,m_1;$$

$$Q_{m_1+m_2+i}=-Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)W_{n_i}(L_1)\sin(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\cos\left(n_i\text{¨}_j\right); \ i=1,\ldots,m_3.$$

При $t > T$ всі узагальнені сили є нульовими.

Система звичайних диференційних рівнянь нестаціонарного відгуку конструкції має вигляд:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{q\}=\{Q\}, \tag{34}$$

де $\{Q\}=[Q_1,\ldots,Q_{m_1}]$ – вектор узагальнених сил. Для дослідження нестаціонарного відгуку проводиться числове інтегрування рівнянь руху (34).

Числове моделювання нестаціонарного відгуку конструкції. Досліджено нестаціонарний відгук нанокомпозитної консольної оболонки в формі усіченого конуса з верхнім шпангоутом з ізотропного матеріалу. Ескіз конічної оболонки наведено на рис. 4. Параметри нанокомпозита конічної оболонки обирались наступними:

$$E_{xx}^{CNT}=2.247\,10^{11}\,\text{Па};\ E_{\varphi\varphi}^{CNT}=5.5027\,10^{9}\,\text{Па};\ G_{x\varphi}^{CNT}=1.436\,10^{9}\,\text{Па};$$

$$\mu_{x\varphi}^{CNT}=0.29380;\ \mu_{\varphi x}^{CNT}=0.007194;\ \rho^{CNT}=1400\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \tag{35}$$

Матеріал оболонки відповідає UD-нанокомпозиту (нанокомпозиту з рівномірним розподілом нанотрубок), який створено з використанням полімеру PmPV в якості матриці з об’ємним вмістом нанотрубок, який дорівнює $V_{CNT}=0.28$. Геометричні параметри конічної оболонки було обрано наступними: $L_1 = 0.225$м; $L_2 = 0.5$м; $h = 5\ 10^{-3}$м. Шпангоут у вигляді кільця з прямокутним поперековим розрізом виготовлено з матеріалу АМг6, який має густину $\rho_r=2640\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; модуль Юнга $E=0.71\,10^{11}$ Па; коефіцієнт Пуассона $\mu=0.33$; модуль зсуву $G=2.7\,10^{10}$ Па . Геометричні характеристики поперекового перерізу шпангоута наступні: висота поперекового розрізу $b_1 = 2$ см , ширина – $b=5$ мм .

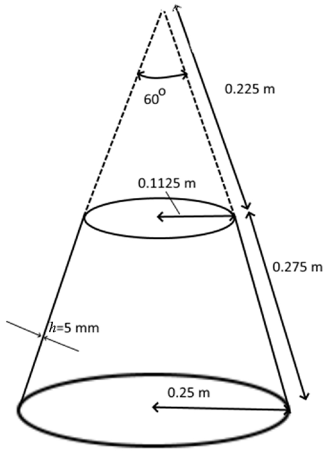

Рис. 4

Для оцінки власних частот та форм коливань застосовано метод Релея–Рітца. Результати розрахунку власних частот коливань наведено в табл. 1. У першому стовпчику наведено номер власної частоти i; у другому – власні частоти ω_i в Гц, які отримано методом Релея–Рітца, за допомогою програмного забезпечення, що розроблено в середовищі Maple авторами статті. В третьому стовпчику наведено результати розрахунку власних частот коливань конструкції $\bar{\omega}_i$, які отримано в скінченно-елементному програмному комплексі ANSYS. Четвертий стовпчик містить відносну похибк у визначення власних частот, яка визначалась за формулою: $\delta_i=\left|\frac{\omega_i-\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i}\right|$.

Таблиця 1. Власні частоти коливань конічної оболонки зі шпангоутом

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
i	ω_i ,Hz	ANSYS $\bar{\omega}_i$,Hz	δ	i	ω_i ,Hz	ANSYS $\bar{\omega}_i$,Hz	δ	i	ω_i ,Hz	ANSYS $\bar{\omega}_i$,Hz	δ
1	669.75	670.74	0.001	10	1455.92	1493.5	0.025	19	2137.8	2214.6	0.03
2	719.3	690.92	0.04	11	1514.83	1522.7	0.005	20	2286.92	2286	4e-4
3	813.4	764.83	0.06	12	1665.04	1717	0.03	21	2455.23	2480.9	0.01
4	892.85	851.41	0.04	13	1746.16	1724.1	0.01	22	2483.21	2481.6	6.48e-4
5	900.21	907.69	0.008	14	1703.22	1736.1	0.019	23	2396.87	2486.3	0.035
6	988.13	966.06	0.02	15	1920.74	1874.4	0.02	24	2531.27	2521.7	0.0037
7	1113.21	1113.4	1.7e-4	16	1893.43	1958.1	0.03	25	2606.84	2635.1	0.01
8	1270.38	1290.7	0.015	17	2037.56	1995.1	0.02	26	2659.8	2712.2	0.019
9	1456.07	1464.1	0.005	18	2151.15	2126.8	0.01	27	2669.31	2772	0.037

Порівняння результатів, які наведено в табл. 1, показує, що запропонований метод дозволяє аналізувати власну динаміку складеної оболонки з високою точністю. Результати аналізу власної динаміки оболонки в подальшому використано для аналізу її нестаціонарного відгуку на ударне навантаження.

Для дослідження нестаціонарного відгуку проводиться розрахунок елементів матриць системи (34) та проводиться числове інтегрування цієї системи диференційних рівнянь. Параметри навантаження було використано наступні: $Q_0=3454$ Н ; $T=5\,10^{-4}$ с . Розкладення (33) проводилось за всіма 27-ма формами коливань, які наведено в табл. 1. В результаті числового інтегрування встановлено, що перехідні процеси відбуваються протягом короткого інтервалу часу, а потім в системі встановлюються вільні коливання конструкції. Саме перехідний процес, який триває короткий інтервал часу, є предметом дослідження цієї статті.

Результати розрахунку нестаціонарних процесів w в точці $\left(x=0.5\left(L_1+L_2\right), \ddot{} = 0.5\pi\right)$ наведено на рис. 5. Суцільною лінією наведено результати, які отримано за допомогою розробленого методу. Пунктиром наведено результати моделювання в програмному комплексі ANSYS. Результати, які отримано двома методами, є близькими, що свідчить про адекватність розробленої математичної моделі.

Нестаціонарний відгук конічної оболонки без верхнього шпангоута. Для дослідження впливу шпангоута на відгук оболонки було розглянуто нестаціонарний відгук конічної оболонки (рис. 4) без верхнього шпангоута. Ударні навантаження при цьому діють на верхньому поперековому перерізі конічної оболонки. На рис. 6 наведено результати розрахунку нестаціонарного відгуку оболонки без шпангоута в точці оболонки $\left(0.5\left(L_1+L_2\right), 0.5\pi\right)$. Суцільною лінією наведено результати, які отримано за допомогою розробленого методу. Пунктиром наведено результати моделювання в програмному комплексі ANSYS. Порівняння рис. 5 та рис. 6 показує, що завдяки установці шпангоута амплітуда нестаціонарного відгуку знизилась приблизно у 3 рази.

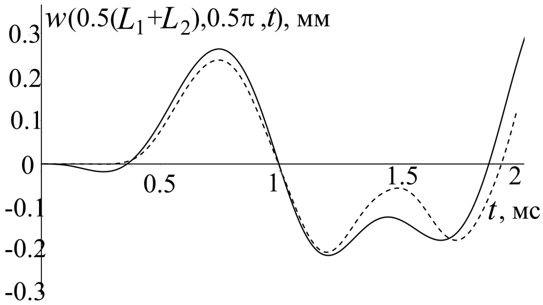

Рис. 5

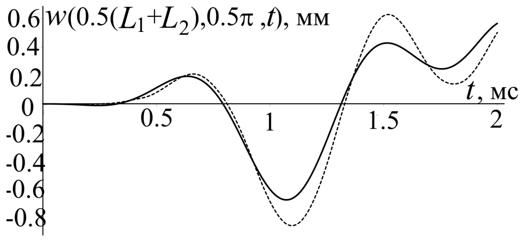

Рис. 6

Висновки. У статті описано модель деформування конічної оболонки з функціонально-градієнтного нанокомпозита. Модель базується на теорії зсуву Редді високого порядку. Деформація оболонки розкладається до куба за поперековою координатою оболонки. Потенційна та кінетична енергії конічної оболонки розкладаються до п’ятого ступеня.

Описано модель деформування усіченої конічної оболонки з функціонально градієнтного ортотропного нанокомпозита з верхнім ізотропним шпангоутом з прямокутним поперековим розрізом. При отриманні математичної моделі кільця використано гіпотези Ейлера–Бернуллі, а при отриманні моделі деформування конічної оболонки – теорію зсуву Редді високого порядку. Використовуючи умови з'єднання конічної оболонки та шпангоута, вдалось використати в якості основних невідомих задачі тільки проєкції переміщень оболонки. Отримано модель нестаціонарного відгуку конічної оболонки з верхнім шпангоутом у вигляді лінійної динамічної системи.

Чисельно досліджено нестаціонарну динаміку конструкції для випадку рівномірного наноармування. Результати аналізу нестаціонарного відгуку є близькими до тих, які отримано за допомогою програмного комплексу ANSYS.

Досліджено вплив верхнього шпангоута на нестаціонарний відгук конструкції. Показано, що ізотропний верхній шпангоут суттєво знижує амплітуди нестаціонарного відгуку конічної оболонки з нанокомпозита.

1. *Gibson R. F., Ayorinde E. O., Wen Y.-F.* Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. Composites Science and Technology. 2007. No.67. P. 1–28. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.03.031
2. *Qian D., Wagner G. J., Liu W. K., Yu M.-F., Ruoff R. S.* Mechanics of carbon nanotubes. Appl. Mech. Rev. 2002. Vol. 55 (6). P. 495–533. https://doi.org/10.1115/1.1490129
3. *Raffi-Tabar H.* Computational modelling of thermo-mechanical and transport properties of carbon nanotubes. Physics Reports. 2004. No.390. P. 235–452. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2003.10.012
4. *Coleman J. N., Khan U., Blau W. J., Gun'ko Yu. K.* Small but strong: A review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites. Carbon. 2006. Vol. 44. P. 1624–1652. https://doi.org/10.1016/j.carbon.2006.02.038
5. *Young R. J., Kinloch I. A., Gong L., Novoselov K. S.* The mechanics of graphenenanocomposites: A review. Composites Science and Technology. 2012. Vol. 72. P. 1459–1476. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2012.05.005
6. *Njuguna J., Pielichowski K., Fan J.* Polymer nanocomposites for aerospaceapplications. Advances in Polymer Nanocomposites. 2012. P. 472–539. https://doi.org/10.1533/9780857096241.3.472
7. *Pitchan M. K., Bhowmik S., Balachandran M., Abraham M.* Process optimization of functionalized MWCNT/polyetherimide nanocomposites for aerospace application. 2017. Vol. 127. P. 193–203. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.04.081
8. *Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B.* Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. Composites Science and Technology. 2002. Vol. 62. P. 1993–1998. https://doi.org/10.1016/S0266-3538(02)00129-X
9. *Ci L., Bai J. B.* The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. Composites Science and Technology. 2006. Vol. 66. P. 599–603. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2005.05.020
10. *Richard P., Prasse T., Cavaille J. Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet J.* Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. Materials Science and Engineering. 2003. Vol. A352. P. 344–348. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(02)00895-X
11. *Nejati M., Asanjarani A., Dimitri R., Torna-bene F.* Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical Shells Reinforced by Carbon Nanotubes. International Journal of Mechanical Sciences. 2017. Vol. 130. P. 383–398. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.024
12. *Mehrabadi S. J., Aragh B. S.* Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 80. P. 130–141. https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.02.016
13. *Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L.* Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. Composite Structures. 2014. Vol. 111. P. 205–212. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.035
14. *Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M.* Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. International Journal of Mechanical Sciences. 2016. Vol. 115–116. P. 339–347. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.020
15. *Sobhaniaragh B., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C.* Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. Composites. Part B: Engineering. 2017. Vol. 118. P. 41–53. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.032
16. *Yaser K., Rossana D., Francesco T.* Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. Composites. Part B: Engineering. 2018. Vol. 147. P. 169–177. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.04.028
17. *Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L.* Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. Composite Structures. 2013. Vol. 106. P. 128–138. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.003

18. *Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M.* Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 99. P. 208–217. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.05.014
19. *García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A.* Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. Composite Structures. 2018. Vol. 186. P. 123–138. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.076
20. *Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q.* Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. Composite Structures. 2017. Vol. 182. P. 364–379. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.043
21. *Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W.* Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. Results in Physics. 2018. Vol. 9. P. 550–559. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.062
22. *Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A.* Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. Materials and Design. 2013. Vol. 44. P. 256–266. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.069
23. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Методы расчета оболочек. Теория ребристых оболочек. Киев, 1980. 368 с.
24. *Bert C. W., Kim C.-D., Birman V.* Vibration of composite-material cylindrical shells with ring and / or stringer stiffeners. Composite Structures. 1993. No. 25. P. 477–484. https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90195-V
25. *Jafari A. A., Bagheri M.* Free vibration of rotating ring stiffened cylindrical shells with non-uniform stiffener distribution. Journal of Sound and Vibration. 2006. No. 296. P. 353–367. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.001
26. *Kim Y. W., Lee Y. S.* Transient analysis of ring-stiffened composite cylindrical shells with both edges clamped. Journal of Sound and Vibration. 2002. No. 252(1). P. 1–17. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4020
27. *Avramov K. V., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K. K., Myrzaliyev D.* Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonlinear Dynamics. 2019. No. 98(3). P. 1853–1876. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05292-z
28. *Keleshteri M. M., Asadi H., Wang. Q.* On the snap-through instability of postbuckled FG-CNTRC rectangular plates with integrated piezoelectric layers. Comp. Meth. Appl. Mech. Engine. 2018. No .331. P. 53–71. https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.11.015
29. *Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q.* A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doublycurved panels and shells of revolution. Comp. Struc. 2017. No. 174. P, 87–109. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.038
30. *Reddy J. N.* A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. Int. J. of Sol. Struc. 1984. No. 20. P. 881–896. https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8
31. *Amabili M., Reddy J. N.* A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. Int. J. of Non-Lin. Mech. 2010. No. 45. P. 409–418. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.013
32. *Meirovitch L.* Elements of vibration analysis. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1986. 495 p.
33. *Vlasov V. Z.* Thin-Walled Elastic Beams. 2nd Edition. Washington: National Science Foundation, 1961. 493 p.
34. *Caresta M., Kessissoglou N. J.* Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical–conical shells. Journal of Sound and Vibration. 2010. No. 329. P. 733–751. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.003
35. *Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M*. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. Vol.49, No. 8. P. 2839–2845. https://doi.org/10.1007/s11012-014-0027-6
36. *Шульженко Н. Г., Зайцев Б. Ф., Асаенок А. В.* Численное моделирование динамической реакции конструкций на импульсное воздействие. Авиационно-космическая техника и технология. 2014. № 9. С. 6–11.
37. *Шульженко Н. Г., Зайцев Б. Ф., Асаенок А. В., Клименко Д. В., Батутина Т. Я., Бурчаков Б. В.* Динамическое контактное взаимодействие адаптеров космической конструкции при разделении. Космическая наука и технология. 2016. № 22(2). С. 12–21. https://doi.org/10.15407/knit2016.02.012

Отримано 31.08.2020,
в остаточному варіанті 28.09.2020