УДК 519.63 https:// 10.15407/itm2021.03.119

Р. С. ЮРКОВ, Л. І. КНИШ

ВЕРИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТЕФАНА В РАМКАХ МЕТОДУ "MUSHY LAYER"

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Гагаріна, 72, 49000, Дніпро, Україна; e-mail: romayurkov@gmail.com; lknysh@ukr.net

Використання сонячної енергії має обмеження, пов'язані з її періодичним надходженням: сонячні установки не працюють вночі та малоефективні в похмуру погоду. Вирішення цієї проблеми пов'язано з необхідністю введення в контур перетворювання систем акумулювання енергії та її дублювання. Серед систем акумулювання значні енергетичні, екологічні та економічні переваги мають фазоперехідні установки "тверде тіло – рідина". Фізичні процеси в таких установках описуються системою нестаціонарних нелінійних рівнянь в часткових похідних зі специфічними граничними умовами на межі розподілу фаз. Верифікацію одного з методів розв'язання задачі Стефана для теплоакумулюючого матеріалу представлено в даній роботі.

Використання методу "Mushy layer" дозволило спростити класичну математичну модель задачі Стефана переходом до нестаціонарної задачі теплопровідності з неявно вираженим джерелом тепла, в якому враховується прихована теплота фазових змін. Вважається, що зміна фазового стану відбувається не в нескінченній області, а в проміжній зоні, яка визначається температурами солідуса і ліквідуса. Для розробки Python-коду застосовано неявну розрахункову схему, в якій температури солідуса та ліквідуса залишаються сталими та знаходяться в ході проведення числових експериментів.

В якості фізичної моделі для комп'ютерного моделювання та верифікації створеного алгоритму обрано процес формування шару льоду на поверхні води при постійній температурі навколишнього середовища. Отримані числові результати дозволили визначити поля температур у твердій та рідкій фазах, положення границі розподілу фаз, розрахувати швидкість її руху.

Для верифікації створеного алгоритму було проаналізовано класичний аналітичний розв'язок задачі Стефана для одновимірного випадку при постійній швидкості руху границі розподілу фаз. Значення відповідного коефіцієнта верифікації було отримано на основі числового розв'язку нелінійного рівняння з використанням спеціальних вбудованих Python-функцій. Після підстановки даних для розглянутої фізичної моделі в аналітичний розв'язок та порівняння їх з даними числового моделювання на основі методу "Mushy layer", отримано добрий збіг результатів, що свідчить про коректність створеного комп'ютерного алгоритму.

Проведені дослідження дозволять адаптувати розроблений Python-код, що базується на методі "Mushy layer" для розрахунку систем теплового акумулювання з фазовим переходом "тверде тіло – рідина" з урахуванням особливостей їх геометрії, відповідного температурного рівня, реальних граничних умов.

Ключові слова: *математичне моделювання, числовий алгоритм, задача Стефана, метод "Mushy layer", аналітичний розв'язок, верифікація.*

1. *Liu M., Saman W., Brun F.* Review on storage materials and thermal performance enhancement techniques for high temperature phase change thermal storage systems. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2012. Vol.16, issue 4. P. 2118–2132.
2. *Lissner M., Tissot J., Leducq D., Azzouz K., Fournaison L.* Performance study of latent heat accumulators: Numerical and experimental study. Applied Thermal Engineering. 2016. Vol.102. P. 604–614.
3. *Кныш Л. И.* Моделирование процессов энергопереноса в аккумуляторе тепла «твердое тело-жидкость» космической энергетической установки. Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. 2014. Т.17. С. 89–95.
4. *Кныш Л. И.* Математическое моделирование процессов теплообмена в аккумулирующих системах «твёрдое тело – жидкость». Промислова теплотехніка. 2014. Т.36, №4. С. 5–10.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. *Słota D.* Direct and inverse one-phase Stefan problem solved by the variational iteration method. Computers & Mathematics with Applications. 2007. Vol.5, Issues 7-8. P. 1139–1146.
7. *Tarkhov D., Vasilyev A.* Problems for partial differential equations in the case of the domain with variable borders, pp. 22-30. (Book chapter). Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development. Academic. Pr. 2019. 320 p.
8. *Yu Y., Luo X., Cui H.* The Solution of Two-Phase Inverse Stefan Problem Based on a Hybrid Method with Optimization. Mathematical Problems in Engineering. 2015. Vol.1. P. 1–13.
9. *Hadžić M., Cuo Y.* Stability in the Stefan Problem with Surface Tension. Communications in Partial Differential Equations. 2010. Vol.35, Issue 2. P. 201–244.
10. *Тимошпольский В. И., Беляев Н. М., Рядно А. А. Прикладные задачи металлургической теплофизики. Минск:Навука і тэхніка, 1991. 320 с.*
11. *Wells A. J., Hitchen J. R., Parkinson J.* Mushy-layer growth and convection, with application to sea ice. Philosophical transactions. 2019. Vol.377, Issue 2146. P. 377–390.
12. *Worster M. G.* Natural convection in a mushy layer. Journal of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 224. P. 335–339.

13. *Lee D., Alexandrov D., Huang H.-N.* Numerical Modeling of One-Dimensional Binary Solidification with a Mushy Layer Evolution. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications. 2012. Vol.5, Issue 2. P. 157 –185.
14. *Marangunic P. R., Stampella M. B.* Appearance of mushy regions in a symmetrical Stefan problem with vanishing heat capacity. European Journal of Applied Mathematics. 1990. Vol.1, Issue 2. P. 177–187.
15. *Барковский В., Барковская Н., Лопатин А.* Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: Центр навчальної літератури, 2019. 424 с.

Отримано 14.07.2021,
в остаточному варіанті 01.10.2021