УДК 539.3; 624.074

М. В. ЧЕРНОБРЫВКО, К. В. АВРАМОВ, Т. Я. БАТУТИНА,
П. Г. ДЕГТЯРЕНКО, А. М. ТОНКОНОЖЕНКО, У. С. СУЛЕЙМЕНОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Исследуются колебания конических обтекателей ракет-носителей, подкрепленных шпангоутами, в сверхзвуковом газовом потоке. Обтекатели моделируются тонкими коническими оболочками, усиленными внутренними кольцами. Проводится анализ потери динамической устойчивости конструкции, соответствующей бифуркации Хопфа. Для исследования динамической неустойчивости конических оболочек со шпангоутами в сверхзвуковом газовом потоке применяется метод заданных форм. Давление, действующее на оболочку, описывается поршневой теорией. Кинетическая и потенциальная энергии конструкции представляются зависящими от компонент вектора перемещений оболочки. Для исследования динамической неустойчивости оребренных оболочек в сверхзвуковом газовом потоке получены модели с конечным числом степеней свободы. Аэроупругие колебания оболочки представляются в виде укороченного ряда по собственным формам колебаний, которые находятся методом Релея–Ритца. Анализ свободных колебаний конических оболочек с различным числом шпангоутов показал, что оребрение увеличивает величины собственных частот более чем в два раза. Увеличение числа шпангоутов с пяти до семи не влияет на первые три собственные частоты колебаний конструкции. Число узлов первой собственной формы конструкции со шпангоутами в полтора раза больше, чем число узлов той же формы колебаний конструкции без шпангоутов. Критическая частота автоколебаний, в основном, значительно выше первой собственной частоты конструкции. Эти частоты близки для конической оболочки с тремя шпангоутами. Частота автоколебаний меньше первой собственной частоты конструкции с пятью и семью шпангоутами. Частоты автоколебаний и первая собственная частота конструкции не изменяются, если число шпангоутов увеличивается от пяти до семи.

Досліджуються коливання конічних обтічників ракетоносіїв, що підкріплені шпангоутами, у надзвуковому газовому потоці. Обтічники моделюються тонкими конічними оболонками, підсиленими внутрішніми кільцями. Проводиться аналіз втрати динамічної нестійкості конструкції, що відповідає біфуркації Хопфа. Для дослідження динамічної нестійкості конічних оболонок із шпангоутами в надзвуковому газовому потоці застосовується метод заданих форм. Тиск, що діє на оболонку, моделюється поршневою теорією. Кінетична та потенційна енергії конструкції представляються залежними від компонент вектора переміщень оболонки. Для дослідження динамічної нестійкості оребрених оболонок у надзвуковому газовому потоці отримані моделі з кінцевим числом степенів свободи. Аеропружні коливання оболонки представляються у вигляді укороченого ряду за власними формами коливань, які знаходяться методом Релея–Ріцца. Аналіз власних коливань конічних оболонок з різним числом шпангоутів показав, що оребрення збільшує величини власних частот більш ніж в два рази. Збільшення числа шпангоутів з п'яти до семи не впливає на перші три власні частоти коливань конструкції. Число вузлів першої власної форми конструкції зі шпангоутами в півтора рази більше, ніж число вузлів той же форми коливань конструкції без шпангоутів. Критична частота автоколивань, в основному, значно вище першої власної частоти конструкції. Ці частоти близькі для конічної оболонки з трьома шпангоутами. Частота автоколивань менше першої власної частоти конструкції з п'ятьма та сьома шпангоутами. Частоти автоколивань і перша власна частота конструкції не змінюється, якщо число шпангоутів зростає з п'яти до семи.

Vibrations of launch vehicle conical fairings stiffened by rings in gas flow are investigated. Fairings are simulated using thin conic shells stiffened by inner rings. Losses in a dynamic structural stability corresponding to the Hopf bifurcation are analyzed. Using the method of given forms, one can study a dynamic instability of conic shells with rings in a supersonic gas flow. The pressure acting on the shell is described by the piston theory. Kinetic and potential energies of the structure are intended to be dependent on the component of the shell displacement vector. To study a dynamic instability of ribbed shells in a supersonic gas flow, models with the finite number of freedom degrees are developed. Aeroelastic vibrations of the shell are presented in the form of a shorten series on natural modes of vibrations, which are determined by the Rayleigh–Ritz method. The analysis of free vibrations of conic shells with the different number of rings demonstrated that ribbing increases values of natural frequencies more than by a factor of two. An increase in the number of rings from five to seven does not effect on the first three natural frequencies of structural vibrations. The number of assemblies of the first natural mode of vibrations of the structure with rings is 1.5 times greater than the number of the same mode of vibrations of the structure without rings. A critical frequency of self-excited vibrations is basically well above the first natural frequency of the structure. Those frequencies are closely related for a conic shell with three rings. The frequency of self- excited vibrations is less than the first natural frequency of the structure with five and seven rings. Frequencies of self-excited vibrations and the first natural frequency of the structure do not change, if the number of rings increases from five to seven.

Ключевые слова: *коническая оболочка со шпангоутами, сверхзвуковой газовый поток, метод заданных форм, пространственная форма потери устойчивости.*

Введение

Сейчас украинская космическая техника пользуется широким спросом. Ассортимент выводимых на орбиту полезных грузов существенно расширился. При выводе на орбиту полезный груз защищается обтекателем, который является тонкой оболочкой. Эти оболочки часто имеют коническую форму, переходящую в цилиндрическую оболочку. В основном, такие конструкции усиливаются изнутри стрингерами и шпангоутами. В полете обтекатели снаружи взаимодействуют с газовым потоком, что может привести к их аэроупругим колебаниям. Такие колебания могут быть причиной разрушения обтекателя или полезного груза. Экспериментальные исследования свидетельствуют, что на трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях полета ракеты наблюдаются интенсивные аэроупругие колебания.

Рассмотрим публикации, посвященные динамике конических оболочек. В статье [1] для исследования динамики конической оболочки применяется метод Релея–Ритца. Композитные, пологие, консольные конические оболочки рассматриваются в [2]. В статье [3] анализируются свободные колебания замкнутых конических оболочек. Колебания оболочек раскладываются в ряды Фурье по окружной координате, а по продольной координате производится дискретизация с помощью метода конечных элементов. Теория подкрепленных оболочек подробно рассматривается в работе [4]. В [5] рассматривается применение метода конечных элементов для расчета подкрепленных оболочек.

Теперь рассмотрим результаты анализа аэроупругих колебаний оболочек вращения. Применение поршневой теории к анализу аэроупругих колебаний оболочек вращения рассмотрено в работе [6]. Исследования аэроупругих колебаний конических оболочек с использованием поршневой теории приведены в работах [6 – 8]. Обзор результатов, посвященных конечноэлементным исследованиям аэроупругих колебаний конструкций, представлен в [9].

В этой статье рассматриваются конические обтекатели ракет-носителей, подкрепленные шпангоутами. Предполагается, что оболочка тонкая, а ее колебания описываются тремя проекциями перемещений на координатные оси. Кольца, подкрепляющие оболочку, устанавливаются внутри конического обтекателя. При деформировании обтекателя кольцо изгибается в своей плоскости и в перпендикулярном направлении; оно растягивается, сжимается и скручивается. Оболочка обтекается сверхзвуковым газовым течением, которое описывается поршневой теорией. Потеря динамической устойчивости оболочки соответствует бифуркации Хопфа. В статье численно исследуется пространственная форма потери устойчивости оболочки при бифуркации Хопфа. Приводятся результаты анализа свободных колебаний оболочки методом Релея–Ритца. Численно исследуется динамическая неустойчивость оболочек с различным числом шпангоутов.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим обтекатели ракет-носителей, которые являются тонкими коническими оболочками. Оболочка усиливается изнутри шпангоутами.

Конструкция снаружи обтекается газовым потоком. Как следует из экспериментального анализа этой системы, интенсивные аэроупругие колебания наблюдаются при околозвуковых и сверхзвуковых скоростях потока. Исследуется динамика обтекателя в сверхзвуковом газовом потоке. Рассматривается изотропная, тонкая коническая оболочка высотой H и с радиусом основания R. Срединная поверхность этой оболочки изображена на рис. 1. Угол α между образующей конуса и осью z удовлетворяет соотношению: $\alpha = \mathrm{arctg}\,(R/H)$. Оболочка имеет постоянную толщину h; нижняя сторона оболочки защемлена.

Оболочка усиливается изнутри шпангоутами. Шпангоуты располагаются параллельно основанию оболочки на одинаковом расстоянии друг относительно друга. Конструкция имеет N шпангоутов. Все шпангоуты сделаны из одного и того же материала и имеют постоянное поперечное сечение. Шпангоуты изгибаются в плоскости оболочки и в перпендикулярном направлении, более того, они скручиваются и растягиваются.

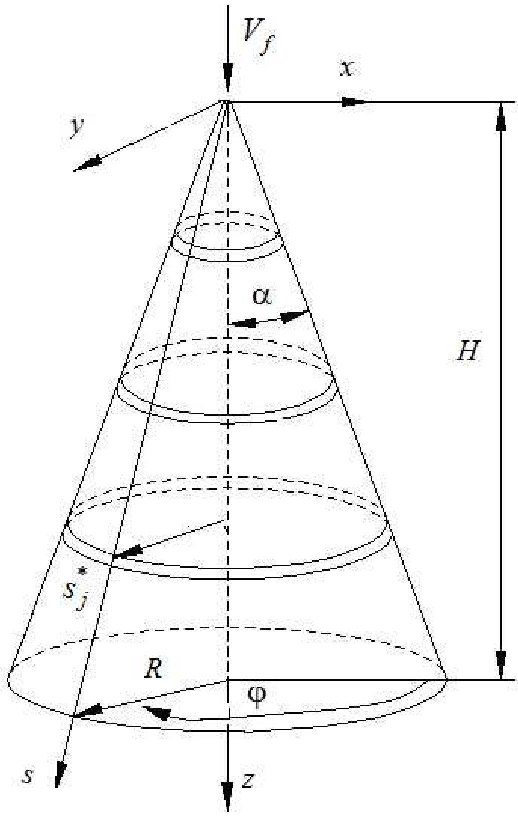


Рис. 1

Положения точек на срединной поверхности определяется двумя координатами s и φ (рис. 1). Радиусы кривизны вдоль координатных линий s и φ определяются так: $R_\varphi = R/\cos\alpha - (H/\cos\alpha - s)\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, $R_s = \infty$. Положение произвольной точки оболочки описывается тремя координатами (s, φ, ξ), где ξ – внешняя нормаль к срединной поверхности оболочки.

Места крепления шпангоутов вдоль образующей описываются следующими координатами $s_j^*;\ j=1,...,N:\ s_j^* = jH/[(N+1)\cos\alpha]$.

Так как оболочка тонкая, сдвиги и инерция вращения не учитываются. Напряженно-деформируемое состояние оболочки удовлетворяет гипотезам Киргофа–Лява. Напряжения и деформации предполагаются малыми; поэтому выполняется закон Гука. Проекции перемещений точек срединной поверхности на оси s, φ и ξ обозначаются через $u(s,\varphi,t), v(s,\varphi,t)$ и $w(s,\varphi,t)$ соответственно.

Вершина конуса является сингулярной точкой. Для исключения этой особенности вырежем маленький кусочек оболочки около ее вершины. Такой подход предложен в [10]. Тогда в верхней части оболочки появляется маленькая дополнительная сторона. Предполагается, что эта сторона шарнирно оперта. Вырез маленького кусочка оболочки не влияет на ее динамические характеристики.

Потенциальная энергия конструкции состоит из потенциальной энергии конической оболочки Π_1 и потенциальной энергии шпангоутов $\Pi_2^{(l)}$; $l=1,...,N:\ \Pi = \Pi_1 + \sum_{l=1}^{N} \Pi_2^{(l)}$. Потенциальную энергию оболочки представим в виде:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{0^+}^{L} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) \left[R - \left(\frac{H}{\cos\alpha} - s \right) \sin\alpha \right] ds\, d\varphi\, d\xi, \tag{1}$$

где h – толщина оболочки; $L = H/\cos\alpha$ – длина образующей конической оболочки; $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ – элементы тензора напряжений; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ – элементы тензора деформаций. Нижний предел интегрирования 0^+ обозначает, что интегрирование начинается с малой величины. Эта малая величина описывает вырез маленького кусочка оболочки около ее вершины. Элементы тензора деформаций и проекции перемещений точек оболочки удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial s} - \xi \frac{\partial^2 w}{\partial s}, \\
\varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{s \operatorname{tg}\alpha} + 2\xi \left(\frac{1}{s \operatorname{tg}\alpha} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{\partial w}{s\, \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} \right] \right), \\
\varepsilon_{22} = \frac{1}{s \operatorname{tg}\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \operatorname{tg}\alpha + w \right) + \xi \left(\frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2\alpha} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{\partial w}{s\, \partial s} \right).
\end{gathered} \tag{2}$$

С учетом (2) и закона Гука потенциальная энергия оболочки (1) примет следующий вид:

$$\Pi_1 = \frac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)} \int_0^{2\pi} \int_{0^+}^{L} \left[\left(E_1 + E_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(E_1 E_2 - \frac{1}{4}\Omega_1^2\right)\right] \left\{R - \left(\frac{H}{\cos\alpha} - s\right)\sin\alpha\right\} ds\, d\varphi$$
$$+ \frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)} \int_0^{2\pi} \int_{0^+}^{L} \left[\left(K_1 + K_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(K_1 K_2 - \Omega_2^2\right)\right] \left\{R - \left(\frac{H}{\cos\alpha} - s\right)\sin\alpha\right\} ds\, d\varphi, \tag{3}$$

где $E-$ модуль Юнга; $\nu-$ коэффициент Пуассона,

$$E_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad E_2 = \frac{1}{s\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\,\mathrm{tg}\,\alpha + w\right),$$

$$K_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s}, \qquad K_2 = \left(\frac{1}{s^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right] - \frac{\partial w}{s \partial s}\right),$$

$$\Omega_1 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\nu}{s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{s\,\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{s\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{\partial w}{s \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\nu}{s}\right].$$

Для получения потенциальной энергии j-го кольца рассмотрим его деформационное состояние. Участок кольца показан на рис. 2. Кривизну срединной линии j-го кольца обозначим через R_j. Для описания деформирования j-го кольца введем локальную систему координат $\left(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j\right)$. Депланация поперечного сечения кольца не учитывается. Изгиб кольца в двух перпендикулярных направлениях обозначим через $u_j(\tilde{y}_j, t)$ и $w_j(\tilde{y}_j, t)$, а его растяжение и сжатие описываются функцией $v_j(\tilde{y}_j, t)$. Кручение кольца описывается функцией $\varphi_j(\tilde{y}_j, t)$. Все обобщенные перемещения показаны на рис. 2.

Деформации и обобщенные перемещения кольца связаны между собой соотношениями [11]:

$$\varepsilon = \frac{\partial v_j}{\partial \tilde{y}_j} - \frac{w_j}{R_j}, \qquad \tau = \frac{\partial u_j}{R_j \partial \tilde{y}_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tilde{y}_j},$$

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 u_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{\varphi_j}{R_j}, \qquad \chi_2 = \frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{w_j}{R_j^2}, \tag{4}$$

где $\chi_1, \chi_2 -$ изменение кривизны срединной линии кольца; $\varepsilon-$ окружная деформация; $\tau-$ относительный угол закручивания.

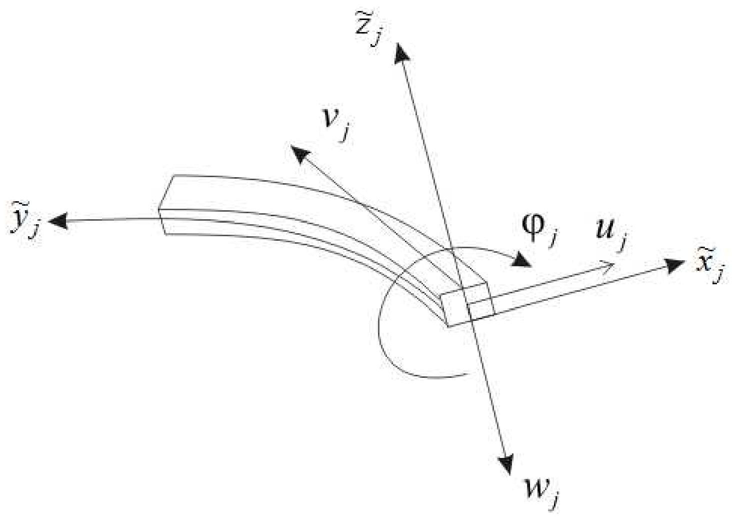


Рис. 2

Потенциальную энергию j-го кольца с учетом выражений (4) представим в следующем виде:

$$\Pi_2^{(j)} = \frac{1}{2}\oint\left\{E_j F_j\left(\frac{\partial v_j}{\partial \tilde{y}_j} - \frac{w_j}{R_j}\right)^2 + E_j J_{Z_j}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{\varphi_j}{R_j}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + E_j J_{X_j}\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{w_j}{R_j^2}\right)^2 + G_j J_j\left(\frac{\partial u_j}{R_j \partial \tilde{y}_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tilde{y}_j}\right)^2\right\} d\tilde{y}_j, \qquad (5)$$

где E_j, G_j – модуль Юнга и модуль сдвига материала j-го кольца; F_j – площадь поперечного сечения кольца; J_{Z_j}, J_{X_j}, J_j – моменты инерции поперечных сечений кольца.

Внешняя сторона кольца жестко связана с внутренней стороной оболочки, что описывается уравнениями, которые имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} &u_j(\tilde{y}_j, t) = u(s_j^*, \varphi, t) - \tilde{h}_j \varphi_1(s_j^*, \varphi, t), \\ &v_j(\tilde{y}_j, t) = -v(s_j^*, \varphi, t) - \tilde{h}_j \varphi_2(s_j^*, \varphi, t), \\ &w_j(\tilde{y}_j, t) = -w(s_j^*, \varphi, t), \\ &\varphi_j(\tilde{y}_j, t) = \varphi_1(s_j^*, \varphi, t), \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\varphi_1\left(s_j^*, \varphi, t\right) = \left.\frac{\partial w(s, \varphi, t)}{\partial s}\right|_{s=s_j^*}$, $\varphi_2 = \frac{\partial w(s_j^*, \varphi, t)}{\partial \tilde{y}} + \frac{v(s_j^*, \varphi, t)}{R_j}$, $\tilde{h}_j = \tilde{H}_j + \frac{h}{2}$,

$\tilde{H}_j$ – расстояние от внутренней стороны оболочки до срединной линии кольца.

Теперь соотношение (6) введем в потенциальную энергию кольца (5) и используем полученные соотношения и выражение (3) для записи потенциальной энергии конструкции. Тогда потенциальную энергию конструкции представим относительно компонент перемещений оболочки. Потенциальную энергию конструкции можно записать в следующей операторной форме:

$$\Pi = \int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\Lambda(u,v,w)ds d\varphi + \sum_{j=1}^{N}\oint\Lambda_j\left[u(s_j^*,\varphi,t),v(s_j^*,\varphi,t),w(s_j^*,\varphi,t)\right]d\tilde{y}_j\,, \tag{7}$$

где $\Lambda(u,v,w),\Lambda_j\left[u(s_j^*,\ddot{\ },t),v(s_j^*,\ddot{\ },t),w(s_j^*,\ddot{\ },t)\right]-$ операторы относительно перемещений оболочки. Они имеют достаточно сложной вид [12] и поэтому здесь не приводятся.

Кинетическую энергию конструкции представим так: $T = T_1 + \sum_{j=1}^{N}T_2^{(j)}$,

где T_1 – кинетическая энергия конической оболочки; $T_2^{(j)}$ – кинетическая энергия j-го шпангоута. Кинетическая энергия оболочки имеет вид:

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\rho h}{2}\int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]ds\,d\varphi\,, \tag{8}$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Кинетическую энергию j-го шпангоута представим так:

$$T_2^{(j)} = \frac{{}^{\circ}{}_1 F_j}{2}\oint\left(\dot{u}_j^2+\dot{v}_j^2+\dot{w}_j^2\right)d\,\tilde{y}_j + \frac{{}^{\circ}{}_1 J_j}{2}\oint\ddot{\ }_j^{2}d\,\tilde{y}_j\,, \tag{9}$$

где ${}^{\circ}{}_1$ – плотность материала шпангоута; J_j – полярный момент инерции. Используя (6), кинетическую энергию шпангоута (9) выразим через производные от перемещения оболочки. Просуммировав результат с (8), получаем кинетическую энергию конструкции в перемещениях оболочки.

Снаружи оболочка обтекается газом. На значительном удалении от оболочки, газ движется в положительном направлении оси z со сверхзвуковой скоростью V_f. Для описания давления, действующего на оболочку, применяется поршневая теория. Согласно этой теории, давление описывается так [6 – 8]:

$$p = -\frac{\rho_f V_f^2}{\beta}\left[\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\left(M^2-2\right)}{V_f\beta^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right], \tag{10}$$

где $\beta=\sqrt{M^2-1}$; M – число Маха; ρ_f – плотность газа.

Виртуальную работу аэродинамического давления δA с учетом вида давления (10) представим так:

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{V_f\rho_f}\delta\mathrm{A} = -\int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\left(V_f\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{M^2-2}{M^2-1}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]\delta w\,ds\,d\varphi\,, \tag{11}$$

где δw – виртуальное перемещение конструкции.

2. Динамическая модель с конечным числом степеней свободы

Для исследования динамической неустойчивости оболочки выводится динамическая модель с конечным числом степеней свободы. Для этого применяется метод заданных форм [12]. Проекции перемещений оболочки раскладываются в укороченные ряды по собственным формам свободных колебаний $U_n(s,\varphi), V_n(s,\varphi), W_n(s,\varphi)$ так:

$$
\begin{aligned}
u(s,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t)U_n(s,\varphi),\\
v(s,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t)V_n(s,\varphi),\\
w(s,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t)W_n(s,\varphi).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Обобщенные координаты системы сгруппируем в вектора таким образом:

$$
q^{(u)} = [q_1^{(u)},\dots,q_{N_u}^{(u)}];\ q^{(v)} = [q_1^{(v)},\dots,q_{N_v}^{(v)}];\ q^{(w)} = [q_1^{(w)},\dots,q_{N_w}^{(w)}].
$$

Для расчета собственных форм колебаний применяется метод Релея-Ритца [12]. Собственные формы колебаний представим в виде:

$$
\begin{aligned}
U_n(s,\varphi) &= \sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} A_{lj}^{(n)}\psi_l^{(u)}(s)\cos j\varphi,\\
V_n(s,\varphi) &= \sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} B_{lj}^{(n)}\psi_l^{(v)}(s)\sin j\varphi,\\
W_n(s,\varphi) &= \sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} C_{lj}^{(n)}\psi_l^{(w)}(s)\cos j\varphi,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $A_{lj}^{(n)}, B_{lj}^{(n)}, C_{lj}^{(n)}$ – неизвестные коэффициенты, которые находятся из проблемы собственных значений. Функции $\psi_l^{(u)}(s)$, $\psi_l^{(v)}(s)$ являются собственными формами продольных колебаний консольного стержня. Функции $\psi_l^{(w)}(s)$ описывают изгибные формы колебаний консольного стержня:

$$
\begin{aligned}
&\psi_l^{(u)}(s) = \psi_l^{(v)}(s) = \sin\frac{(2l-1)\pi s}{L},\\
&\psi_l^{(w)}(s) = \frac{1}{2}\left(\cosh\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right] - \cos\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]\right) -\\
&-\frac{\sinh(k_l s)+\sin(k_l s)}{2(\cosh(k_l s)-\cos(k_l s))}\left(\sinh\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right] - \sin\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Для упрощения дальнейшего анализа все обобщенные координаты объединим в один вектор $q=[q^{(u)},q^{(v)},q^{(w)}]=[q_1,...,q_{N_G}]$, где $N_G = N_u + N_v + N_w$.

Теперь выведем соотношения для обобщенных сил Q_n, $n=1,...,N_G$. Вектора обобщенных сил $Q^{(u)},Q^{(v)},Q^{(w)}$ соответствуют следующим векторам обобщенных координат $q^{(u)},q^{(v)}$, $q^{(w)}$. Все элементы векторов $Q^{(u)},Q^{(v)}$ равны нулю $Q^{(u)}\equiv 0$, $Q^{(v)}\equiv 0$. Элементы вектора обобщенных сил $Q^{(w)}$ определяются с учетом (11) так:

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{V_f\rho_f}Q_n^{(w)}=-\int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\left(V_f\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{M^2-2}{M^2-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)W_n(s,\varphi)\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]dsd\varphi,$$
$$n=1,...,N_w.$$

Разложение (12) введем в последнее соотношение. В результате вектор обобщенных сил получим в следующем матричном виде:

$$Q^{(w)}=K^{(w)}q^{(w)}+C^{(w)}\dot{q}^{(w)}, \qquad (15)$$

где $C^{(w)}$ – матрица аэродинамического демпфирования; $K^{(w)}$ – матрица аэродинамической жесткости.

Разложения (12), используя (13) и (14), введем в потенциальную (7) и кинетическую энергии конструкции. В результате потенциальную энергию получим в виде квадратичной формы обобщенных координат, а кинетическую энергию – в виде квадратичной формы обобщенных скоростей. Эти соотношения представим так: $\Pi=\Pi\left(q_1,...,q_{N_G}\right)$, $T=T\left(\dot{q}_1,...,\dot{q}_{N_G}\right)$. Используя (15), уравнения Лагранжа, описывающие движение конструкции, запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&M_{11}\ddot{q}^{(u)}+K_{11}q^{(u)}+K_{12}q^{(v)}+K_{13}q^{(w)}=0,\\
&M_{22}\ddot{q}^{(v)}+K_{21}q^{(u)}+K_{22}q^{(v)}+K_{23}q^{(w)}=0,\\
&M_{33}\ddot{q}^{(w)}+K_{31}q^{(u)}+K_{32}q^{(v)}+K_{33}q^{(w)}+K^{(w)}q^{(w)}+C^{(w)}\dot{q}^{(w)}=0,
\end{aligned} \qquad (16)$$

где M_{ii} – диагональные матрицы масс, $i=1,2,3$; K_{ij} – матрицы жесткости, $i=1,2,3$; $j=1,2,3$.

Как следует из [12], собственные частоты с преобладающими продольными и крутильными колебаниями значительно выше собственных частот с преобладающими изгибными колебаниями. Поэтому инерционными продольными и крутильными слагаемыми можно пренебречь: $\ddot{q}^{(u)}=\ddot{q}^{(v)}=0$. Тогда из первых двух уравнений системы (16) получим:

$$q^{(u)}=K_{u,w}\,q^{(w)};\, q^{(v)}=K_{v,w}\,q^{(w)}, \qquad (17)$$

где $K_{u,w}$ и $K_{v,w}$ – матрицы размером $N_u\times N_w$ и $N_v\times N_w$. Решение (17) вводится в третье уравнение системы (16). Тогда получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат изгибных колебаний в следующей матричной форме:

$$M_{33}\,\ddot{q}^{(w)} + K_* q^{(w)} + \tilde{C}^{(w)} \dot{q}^{(w)} = 0, \qquad (18)$$

где $K_* = K_{31}K_{u,w} + K_{32}K_{v,w} + K_{33} + K^{(w)}$; $\tilde{C}^{(w)} = C^{(w)} + A$; $A-$ диагональная матрица, описывающая демпфирование в материале конструкции.

Дальнейшее решение уравнений (18) проводится численными методами.

Целью нашего анализа является определение чисел Маха потока, при котором наблюдается потеря динамической устойчивости. Такие значения чисел Маха называются критическими. Особый интерес вызывает форма оболочки при потере динамической устойчивости конструкции. Метод расчета этой формы оболочки подробно рассматривается в [13]. Здесь этот метод будет применяться для численного расчета пространственной формы потери устойчивости конструкции.

3. Численный анализ колебаний

Численно исследуются четыре варианта конической оболочки с оребрениями. Все эти конструкции содержат коническую оболочку с высотой H = 5,24 м, радиусом основания R = 1,95 м и толщиной $h = 2\cdot10^{-3}$ м. Коническая оболочка изготовлена из материала со следующими механическими характеристиками: $E = 72\cdot10^{9}$ Па; ρ = 2770 кг/м^3, ν = 0,3. Первый вариант исследуемой конструкции является конической оболочкой без шпангоутов. Вторая, третья и четвертая конструкции содержат три, пять и семь шпангоутов, соответственно. Все шпангоуты имеют одинаковые поперечные сечения; они Γ-образные. Площади этих поперечных сечений таковы: $F_j = 5{,}7\cdot10^{-4}$ м^2. Расстояния между шпангоутами и торцевыми сечениями оболочки и шпангоутами одинаковы. Для конструкций с тремя, пятью и семью шпангоутами расстояния между ними таковы: d_3 = 1,398 м, d_5 = 0,932 м и d_7 = 0,699 м. Механические характеристики материала шпангоутов и конической оболочки одинаковы.

Для расчета собственных частот и форм колебаний конструкций применяется метод Релея–Ритца. Колебания конструкций представляются в виде укороченных рядов (13). Полученные результаты расчетов собственных частот и форм сравнивались с данными, полученными программным комплексом ANSYS. Результаты расчета собственных частот в Гц всех четырех конструкций представлены в табл. 1. Данные из табл. 1 сравнивались с результатами расчетов методом конечных элементов. Относительная разница результатов, полученных двумя методами, находится в пределах 2 %; 1,7 %; 0,4 % и 2,7 % для конструкций без шпангоутов и для конструкций с тремя, пятью и семью шпангоутами соответственно. Анализ собственных частот четырех конструкций показал, что оребрение конструкции приводит к увеличению собственных частот более чем в два раза. Как следует из табл. 1, увеличение числа шпангоутов от пяти до семи не влияет на первые три собственные частоты колебаний конструкции.

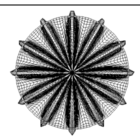
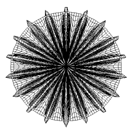
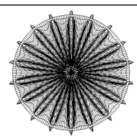
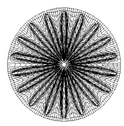
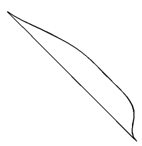
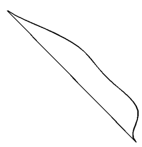
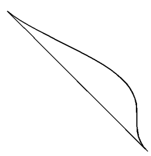
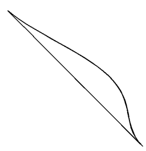
Таблица 1

Номер частоты	Без шпангоутов	С тремя шпангоутами	С пятью шпангоутами	С семью шпангоутами
1	27,088	60,952	69,674	70,761
2	27,465	61,179	75,105	76,993
3	27,973	61,842	77,557	77,764
4	28,671	62,171	85,804	91,175
5	30,474	63,418	86,024	109,02
6	31,23	63,83	86,306	111,9
7	32,753	65,418	86,921	112,16
8	35,437	66,818	87,075	112,69
9	38,485	67,404	87,553	113,25
10	41,873	69,078	89,031	114,31

Исследуем собственные формы колебаний конструкции. Результаты анализа первой собственной формы поперечных колебаний $W_1(s,\varphi)$ конструкций с различным числом шпангоутов представлены в табл. 2. Число узлов первой формы конструкции со шпангоутами в полтора раза больше, чем число узлов первой формы конструкции без шпангоутов. Число узлов в окружном направлении не изменится, если число шпангоутов увеличивать от 3 до 7. Первая собственная форма конструкции не имеет узлов в продольном направлении. Оребрение оболочки существенно изменяет вид первой собственной формы.

Теперь численно исследуем динамическую неустойчивость конструкции в сверхзвуковом газовом потоке. Для этого рассчитываются характеристические показатели динамической системы (18) для разных чисел Маха. Числа Маха задаются с некоторым шагом h_M так: $M_j = 1 + jh_M$; $j = 1,2,...$. Для каждого значения M находятся характеристические показатели. В результате такого расчета определяется диапазон чисел M, в которых состояние равновесия устойчиво или неустойчиво. Граничное значение числа Маха, при котором устойчивое состояние равновесия сменяется неустойчивым, называется критическим.

Таблица 2

	Без шпангоутов	С тремя шпангоутами	С пятью шпангоутами	С семью шпангоутами
Число узлов в окружном направлении	24	36	36	36
Вид сверху первой собственной формы				
Сечение собственной формы в продольном направлении				

В численных расчетах плотность газового потока принималась ρ_f = = 1 кг/м^3. В разложениях (12) использовалось одинаковое число слагаемых $N_u = N_v = N_w$. Числа слагаемых в этих разложениях принимались 8, 9, 12, 15, 18, 21. Соответственно, динамическая система (18) при таких разложениях имеет 8, 9, 12, 15, 18, 21 степеней свободы. Критические числа Маха M_* определяются для моделей с различным числом степеней свободы. Таким образом, исследуется сходимость разложения (12). Результаты расчетов критических чисел Маха для систем с 8, 9, 12, 15, 18, 21 степенями свободы очень близки. Более того, конструкции с тремя, пятью и семью шпангоутами имеют очень близкие критические числа Маха. Неустойчивое состояние равновесия конструкций в сверхзвуковом газовом потоке наблюдается в следующем диапазоне чисел Маха: $1 < M < 1{,}414$. Устойчивое состояние равновесия наблюдается при $M > 1{,}414$. Итак, если величина критического числа Маха выбрана в качестве критерия сходимости решения (12), то сходимость наблюдается для математических моделей колебаний (18) с 8, 9, 12, 15, 18, 21 степенями свободы. Подчеркнем, что значение частоты начала автоколебаний Ω_1 может быть выбрано в качестве критерия сходимости решения (12). Результаты расчетов критических частот автоколебаний конических оболочек без шпангоутов и конических оболочек с тремя, пятью и семью шпангоутами представлены в табл. 3. В этой таблице представлены результаты расчетов системы (18) с 9, 12, 15, 18 и 21 степенями свободы. Как следует из табл. 3, сходимость решения (12) наблюдается для всех рассматриваемых конструкций, которые описываются моделями с 12 степенями свободы и больше.

Исследовалось поведение первой собственной частоты и частоты автоколебаний для различных конструкций (в зависимости от номера конструкции). Коническая оболочка без шпангоутов обозначается номером 1, а коническим оболочкам с тремя, пятью и семью шпангоутам присваивались номера 2, 3 и 4 соответственно. Поведение первой собственной частоты ω_1 и критической частоты автоколебаний Ω_1 в зависимости от номера конструкции показывается на рис. 3. Кривая, описывающая поведение первой собственной частоты ω_1, обозначается цифрой 1. Кривая, описывающая критическую частоту автоколебаний Ω_1, обозначена цифрой 2.

Таблица 3

N_w	Без шпангоутов	С тремя шпангоутами	С пятью шпангоутами	С семью шпангоутами
9	63,18	65,623	57,841	58,256
12	57,113	58,938	60,113	60,147
15	56,657	60,007	60,532	60,734
18	56,392	60,319	61,096	61,045
21	56,389	60,317	61,095	61,044

Как следует из рис. 3, для конической оболочки без шпангоутов частота автоколебаний значительно выше первой собственной частоты. Эти частоты близки для конической оболочки с тремя шпангоутами. Критическая частота автоколебаний меньше, чем первая собственная частота для конструкций с пятью и семью шпангоутами. Подчеркнем, что критическая частота автоколебаний и первая собственная частота конструкции мало изменяются, если число шпангоутов увеличится от пяти до семи.

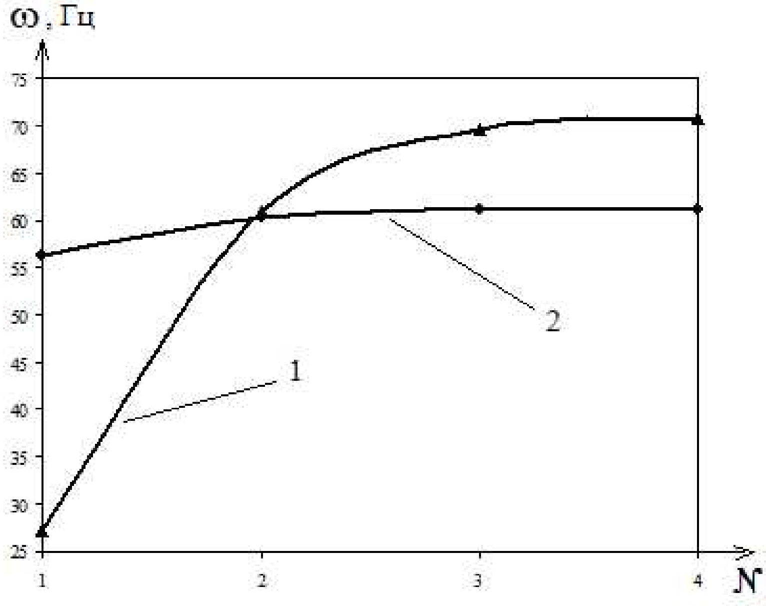


Рис. 3

Теперь численно исследуем пространственную форму конструкции при потере ею динамической устойчивости. Для этого используется подход, предложенный в работе [4]. Эта пространственная форма конструкции соответствует бифуркации Хопфа. В качестве примера пространственная форма потери устойчивости конической оболочки с тремя шпангоутами показывается на рис. 4. На рис. 4 показан вид сбоку, а на рис. 5 – вид сверху.

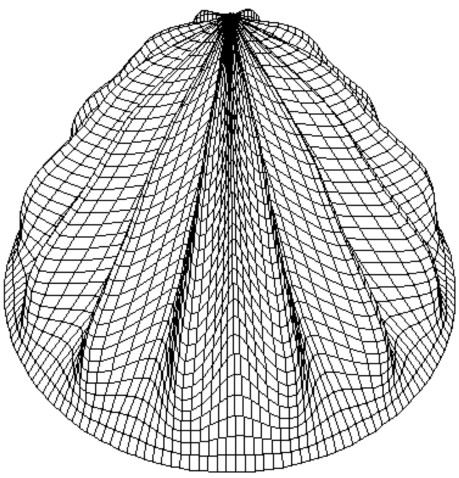


Рис. 4

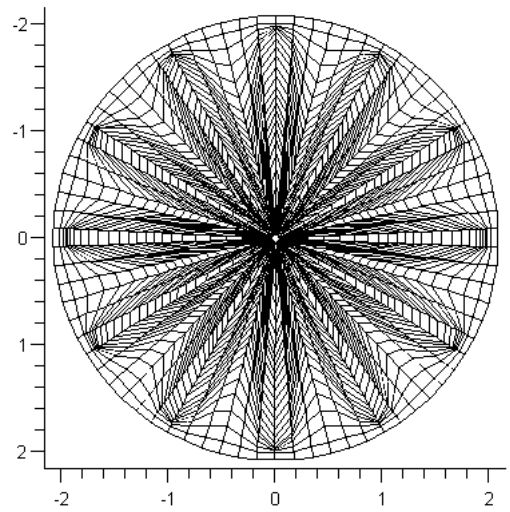


Рис. 5

Выводы

Для исследования динамической неустойчивости оребренных оболочек в сверхзвуковом газовом потоке в статье получены модели с конечным числом степеней свободы. Аэроупругие колебания оболочки представляются в виде укороченного ряда по собственным формам колебаний, которые находятся методом Релея–Ритца.

Анализ свободных колебаний конических оболочек с различным числом шпангоутов показал, что оребрение увеличивает величины собственных частот более чем в два раза. Подчеркнем, что увеличение числа шпангоутов с пяти до семи не влияет на первые три собственные частоты колебаний конструкции. Число узлов первой собственной формы конструкции со шпангоутами в полтора раза больше, чем число узлов той же формы колебаний конструкции без шпангоутов. Число узлов первой формы колебаний не изменится, если число шпангоутов варьируется с 3 до 7. Первые формы колебаний всех исследуемых конструкций не содержат узлов в продольном направлении.

Анализ сходимости решений для перемещений конструкций в сверхзвуковом газовом потоке производился с помощью динамических моделей с 8, 9, 12, 15, 18 и 21 степенями свободы. Критические числа Маха для всех этих моделей близки. Поэтому если критические числа Маха выбираются в качестве критерия сходимости решения, то сходимость результатов наблюдается для моделей с 8, 9, 12, 15, 18, 21 степенями свободы. Однако, если значение критической частоты автоколебаний выбирается в качестве критерия сходимости, то она наблюдается для моделей с 15 степенями свободы. Подчеркнем, что критические числа Маха для моделей с 8, 9, и 12 степенями свободы существенно разнятся. Итак, для анализа сходимости решения задач о динамической неустойчивости конструкций в потоке газа как критические параметры потока, так и критическая частота автоколебаний должны учитываться в анализе.

Критическая частота автоколебаний, в основном, значительно выше первой собственной частоты конструкции. Эти частоты близки для конической оболочки с тремя шпангоутами. Частота автоколебаний меньше первой собственной частоты конструкции с пятью и семью шпангоутами.

Подчеркнем, что частоты автоколебаний и первая собственная частота конструкции не изменяются, если число шпангоутов увеличивается от пяти до семи.

От авторов

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг. в рамках договора «Расчетная оценка вибраций элементов аэрокосмических систем при силовых и аэродинамических нагружениях».

1. *Zhao X. Li.* The element-free kp-Ritz method for free vibration analysis of conical shell panels / *X. Li. Zhao, K. M. Liew, T. Y. Ng* // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – № 295. – P. 906 – 922.
2. *Lim C. W.* Vibration of cantilevered laminated composite shallow conical shells / *C. W. Lim, K. M. Liew* // Int. J. of Solids and Structures. – 1998. – № 35. – P. 1695 – 1707.
3. *Ross C.* Vibration and elastic instability of thin-walled conical shells under external pressure / *C. Ross* // Computers & Structures. – 1995. – № 55. – P. 85 – 94.
4. *Амиро И. Я.* Теория ребристых оболочек / *И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий.* – Киев : Наукова думка,1980. – 367 с.
5. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник / Под общей редакцией *В. И. Мяченкова*. – М : Машиностроение,1989. – 456 с.
6. *Бочкарев С. А.* Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком / *С. А. Бочкарев, В. П. Матвеенко* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т.1, № 3.– С. 25 – 33.
7. *Миниус Г. М,* Расчет флаттера реактивного сопла с продольными сквозными канавками / *Г. М. Миниус* // Численные методы в механике деформируемого твердого тела. – 1987. – №2. – С. 15 – 22.
8. *Диткин В. В.* Численное исследование флаттера конических оболочек / *В. В. Диткин, Б. А. Орлов, Г. И. Пшеничнов* // Механика твердого тела. – 1993. – №1. – С. 185 – 189.
9. *Bismarck – Nasr M. N.* Finite elements in aeroelasticity of plates and shells / *M. N Bismarck – Nasr* // Appl. Mech. Rev. – 1996. – № 49 (10). – P. 17 – 24.
10. *Valishvili N. B.* Calculations of Shell of Revolution / *N. B. Valishvili.* – M : Machinostoenie, 1976. – 217 p.
11. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни / *В. З. Власов*. – М : Гос. изд. физ.-мат. лит, 1959. – 246 с.
12. *Аврамов К. В.* Нелинейная динамика упругих систем / *К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин*. – М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
13. *Чернобрывко М. В.* Динамическая неустойчивость обтекателей ракетоносителей в полете / *М. В. Чернобрывко, К. В. Аврамов, Т. Я. Батутина, В. Н. Романенко, В. А. Пирог.* // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т.17, № 2. – С. 9 – 16.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
Харьков;

ГП «КБ «Южное» им М. К. Янгеля»,
Днепропетровск;

Южно-Казахстанский государственный
университет им. М. Ауэзова,
Шымкент

Получено 23.12.14,
в окончательном варианте 12.03.15