УДК 629.5

С. В. ХОРОШИЛОВ

СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ РАСШИРЕННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ С УЧЕТОМ ЗАДАННЫХ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ТРЕБОВАНИЙ К ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Предложена процедура синтеза наблюдателя расширенного вектора состояния при рассмотрении замкнутого контура комбинированной системы управления. Требования, обеспечивающие заданное качество и устойчивость замкнутого контура системы управления с учетом спектральных свойств возмущений и помех измерителей, сформулированы в частотной области. Задача синтеза наблюдателя решена на базе методологии оптимизации H_∞ с использованием аппарата линейных матричных неравенств.

Запропоновано процедуру синтезу спостерігача розширеного вектора стану при розгляді замкненого контуру комбінованої системи керування. Вимоги, що забезпечують задану якість і стійкість замкненого контуру системи керування з урахуванням спектральних властивостей збурень і перешкод вимірників, сформульовані в частотній області. Задача синтезу спостерігача вирішена на базі методології оптимізації H_∞ с використанням апарата лінійних матричних нерівностей.

To consider a closed loop of a combined control system, a procedure for the synthesis of an extended state observer is proposed. Requirements for the specified quality and the stability of the closed loop of the control system are formulated in the frequency domain with regard to the spectral properties of disturbances and the sensor noise. The problem of the observer synthesis is solved by the H∞ optimization methodology using linear matrix inequalities.

Ключевые слова: *наблюдатель, расширенный вектор состояния, комбинированный регулятор, функция чувствительности, весовая функция.*

Проблема оценивания вектора состояния динамических систем занимает важное место в теории автоматического управления. Это обусловлено тем, что на практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда часть составляющих вектора состояния оказывается не измеряемой, кроме того, измеренные величины могут быть искажены помехами. В связи с этим методология разработки устройств для оценивания вектора состояния, которые часто называют «наблюдателями» или «фильтрами», широко используется разработчиками систем автоматического управления.

Вопросы разработки наблюдателей вектора состояния достаточно хорошо освещены в печати. Например, обзор, посвященный этому вопросу, представлен в работе [1]. Здесь отмечается, что существенный прогресс в этой области произошел после появления так называемого наблюдателя Льюенбергера [2], к ключевым особенностями которого следует отнести использование как информации об объекте управления (ОУ), так и входной и выходной информации для уменьшения влияния помех и запаздывания по фазе, без наличия информации о начальных условиях. Однако при существенных отличиях априорных характеристик объекта управления от фактических и наличии возмущений результаты оценивания могут существенно ухудшаться. В связи с этим исследователи вынуждены были рассмотреть проблему оценивания вектора состояния при наличии неизвестных возмущений. Наиболее известным и хорошо исследованным путем решения такой проблемы является подход калмановской фильтрации [3], который позволяет при наличии известных статистических характеристик возмущений получать несмещенную оценку, оптимальную относительно среднего квадрата ошибки оценивания. Однако такой подход не всегда может быть применен на практике из-за того, что возмущения в ряде случаев не могут быть описаны как случайные процессы либо характеристики этих процессов неизвестны.

Одним из путей решения такой проблемы может быть использование H_∞-фильтрации, когда наблюдатель оптимизируется для наихудшего случая ограниченных возмущений [4]. Для случаев, когда присутствует неопределенность в математической модели объекта управления, разработаны различные алгоритмы робастной H_∞-фильтрации [5]. Другим подходом для решения задач оценивания при наличии неизвестных ограниченных возмущений является построение эллипсоидальных наблюдателей [6, 7]. Однако зачастую как эллипсоидальные наблюдатели, так и наблюдатели, синтезированные на базе методологии оптимизации H_∞, обладают значительным консерватизмом.

Еще одним подходом при оценивании вектора состояния является использование в составе наблюдателя модели возмущения. Такая методология приводит к расширению исходного вектора состояния ОУ переменными, описывающими возмущения, и предусматривает построение наблюдателя расширенного вектора состояния (НРВС). Наиболее известной в данном классе методов является работа [8], в которой возмущения описаны как «волновые», но полиномиального типа. В работе [9] приведены примеры построения с использованием такой методологии наблюдателей состояния, инвариантных по отношению к постоянному и гармоническому возмущающему моменту. Другим преимуществом использования НРВС является то, что при формировании управляющих воздействий можно использовать не только оценки вектора состояния, но и возмущений. Такое управление реализуется по двухконтурной схеме с возможностью разделения контуров по целям управления: внешний реализует выбранный критерий управления вектором состояния, внутренний – критерий компенсации или уменьшения влияния вектора суммарного эквивалентного возмущения, который кроме внешних воздействий также включает и внутренние воздействия, обусловленные неточностями математического описания ОУ. Успешность решения задач управления с использованием такого подхода во многом определяется качеством восстановления возмущений.

В работе [10] показаны значительные возможности НРВС по оцениванию различных типовых возмущений, однако качество получаемых оценок при наличии помех измерителей во многом зависит от его настройки. В статье [11] предложено выбирать коэффициенты усиления наблюдателя на основании стандартных форм расположения корней характеристического полинома. При таком подходе единственным настраиваемым параметром является полоса пропускания наблюдателя, определенный выбор которого позволяет обеспечить компромисс между точностью оценивания возмущений и чувствительностью к помехам измерителей. Несмотря на то, что эффективность такого подхода иллюстрируется успешным решением ряда практических задач [12, 13], вопрос об оптимальности выбора коэффициентов наблюдателя остается открытым. В статье [14] для синтеза НРВС использована методология оптимизации H_2 и H_∞. Здесь требования к качеству оценивания формулируются во временной области в форме ограничений на расположение полюсов передаточной функции. Однако применение этих результатов на практике не всегда удобно в связи с тем, что в ряде случаев непросто установить строгую связь между этими параметрами и качеством оценивания возмущений. С этой точки зрения, требования к качеству оценивания при наличии помех интуитивно понятно задавать в частотной области таким образом, чтобы амплитудные частотные характеристики НРВС имели определенные параметры. К сожалению, такие результаты не отражены в публикациях.

Следует также отметить, что наблюдатель состояния является лишь составной частью контура управления. В связи с этим, несмотря на то, что при выполнении определенных условий синтез наблюдателя и регулятора возможно проводить независимо, в общем случае оптимальные наблюдатель и регулятор обладают хорошими показателями качества и робастной устойчивости только тогда, когда они рассматриваются раздельно. Однако эти показатели в общем случае не гарантируются при рассмотрении системы управления в целом. Так, например, в работе [15] показаны случаи, когда такой раздельный подход при синтезе комбинированного регулятора приводит к неудовлетворительным показателям по запасу устойчивости. В статье [16] продемонстрировано, что даже выполнение условия, когда быстродействие наблюдателя значительно выше динамики объекта управления, не всегда помогает обеспечить нужные показатели качества. Для решения этой проблемы предлагались различные методы, наиболее известный из которых – метод восстановления передаточной функции замкнутого контура [17]. В соответствии с этим методом сначала раздельно синтезируются оптимальные регулятор и наблюдатель, а затем корректируются коэффициенты усиления наблюдателя таким образом, чтобы передаточная функции замкнутой системы «ОУ–наблюдатель–регулятор» приближалась к передаточной функции «ОУ–регулятор». Однако такой подход неудобно использовать при комбинированном управлении с использованием наблюдателя расширенного вектора состояния, поскольку необходимо рассматривать одновременно передаточные функции как по задающему, так и возмущающему воздействиям. В связи с этим представляет интерес рассмотреть задачу прямого синтеза наблюдателя расширенного вектора состояния при рассмотрении полного контура системы управления.

Целью статьи является синтез и анализ наблюдателя расширенного вектора состояния с учетом требований к замкнутому контуру комбинированной системы управления, заданных в частотной области.

Постановка задачи. Рассмотрим ОУ, описываемый нелинейным дифференциальным уравнением n -го порядка в виде

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}, w_v) + bu, \tag{1}$$

где y – измеряемый выход системы; u – скалярный вход (управление) системы; f – функция, описывающая внутреннюю динамику ОУ и внешнее возмущение w; b – некоторый параметр.

Уравнение (1) имеет следующее представление в форме пространства состояний

$$\dot{X}_0 = A_0 X_0 + B_{01} u + B_{02} f, \; Y_0 = C_0 X_0, \; Y_l = C_l X_0 + D_0 \xi, \tag{2}$$

где X_0 – вектор состояния; Y_0, Y_l – векторы контролируемого и измеряемого выхода соответственно; ξ – помеха измерителя.

Матрицы, входящие в уравнение (2), имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad B_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, C_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n}, \; D_0 = [d],$$

где d – некоторый параметр.

Предположим, что имеется возможность помимо оценки вектора состояния $\hat{X}_0 \approx X_0$ получать оценки суммарного возмущения $\hat{f} \approx f$, тогда управляющие воздействия могут формироваться следующим образом:

$$u = (u_0 - \hat{f})/b. \tag{3}$$

Составляющая управляющего воздействия u_0 может быть представлена в виде

$$u_0 = K(R - \hat{X}), \tag{4}$$

где K – матрица коэффициентов усиления размерностью $1\times n$, которая выбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение заданного критерия управления вектором состояния номинального (компенсированного) объекта

$$y^{(n)} = u_0.$$

Для того, чтобы оценить вектор состояния X_0 и возмущение f, математическую модель ОУ следует дополнить моделью возмущения. В работе [16] показано, что в общем случае модель возмущения может быть представлена в следующем виде:

$$f(s) = 1/s^k, \; k \geq 1.$$

Эта модель в форме пространства состояний представляется таким образом:

$$\dot{X}_f = A_f X_f, \; f = C_f X_f, \tag{5}$$

где $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k\times k}$; $C_f = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times k}$.

Следует отметить, что если известна более точная модель возмущения, она также может быть использована.

Дополняя представление (2) моделью (5) и используя расширенный вектор состояния $X_e = \begin{bmatrix} X_0 & X_f \end{bmatrix}^T$, получаем

$$\dot{X}_e = A_e X_e + B_e u\ ,\ Y = C_e X_e + D_0 \xi\ , \tag{6}$$

где $A_e = \begin{bmatrix} A_0 & B_{02}C_f \\ 0 & A_f \end{bmatrix}$; $B_e = \begin{bmatrix} B_{01} \\ 0 \end{bmatrix}$; $C_e = \begin{bmatrix} C_l & 0 \end{bmatrix}$.

Система (6) наблюдаема в том случае, если ни одно из собственных чисел матрицы A_f не совпадает с нулями системы (2). При выполнении этого условия оценки расширенного вектора состояния могут быть получены с использованием следующего наблюдателя:

$$\dot{\hat{X}}_e = A_e \hat{X}_e + B_e u + L\left(Y_l - C_e \hat{X}_e\right).$$

Представим это уравнение в стандартной форме пространства состояний

$$\dot{\hat{X}}_e = A_e \hat{X}_e + B_e u + B_u U_L\ ,\ \ U_L = L\left(Y_l - C_e \hat{X}_e\right),$$

где B_u – единичная матрица размерности $n + k \times n + k$.

Оценки вектора состояния $\hat{X}$ и возмущения $\hat{f}$ могут быть определены так:

$$\hat{X} = C_x \hat{X}_e,\ C_x = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}_{n \times n+k}\ ,$$

$$f = C_F \hat{X}_e,\ C_F = \begin{bmatrix} 0 & C_f \end{bmatrix}_{1 \times n+k}\ ,$$

где I – единичная матрица размерности $n \times n$.

Требования к синтезируемому наблюдателю удобно задавать в частотной области. При анализе замкнутого контура систем управления можно использовать функции чувствительности (ФЧ) и дополнительной чувствительности (ФДЧ) [17]. ФЧ $S(j\omega)$ представляет собой передаточную функцию от входа к ошибке слежения, а ФДЧ $T(j\omega)$ – это передаточная функция от входа к выходу замкнутой системы. Для обеспечения требуемого качества функционирования системы (подавления внешних возмущений, уменьшения ошибки слежения) следует уменьшать функцию $S(j\omega)$, а для повышения робастности системы по отношению к шумам измерителей и неопределенностям ОУ необходимо обеспечить малые значения функции $T(j\omega)$.

Следует отметить, что требования минимизации ФЧ и ФДЧ являются весьма противоречивыми, так как они связаны следующим образом:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1\ .$$

Для устранения этого противоречия предлагается минимизировать эти функции в разном диапазоне частот [20]. Так, целесообразно иметь малые значения ФЧ в низкочастотной области, а ФДЧ – в высокочастотной. Идеальная ФЧ имеет малые значения на низких частотах и приближается к единице на высоких частотах при отсутствии значений больше единицы. ФДЧ, наоборот, должна иметь близкие к единице значения на низких частотах и малые – на высоких частотах. Чем быстрее функция $T(j\omega)$ убывает с увеличением частоты, тем более система робастна по отношению к высокочастотным возмущениям в контуре управления.

Структурная схема эквивалентного представления рассматриваемой динамической системы (1) в виде «номинальный ОУ – НРВС – регулятор» представлена на рис. 1. На этом рисунке элементы, входящие в состав НРВС, обведены штриховой линией. Как видно из этого рисунка, эквивалентная система представляет собой многомерную систему, при синтезе которой необходимо одновременно рассматривать ФЧ и ФДЧ как по задающему воздействию R, так и по возмущению f.

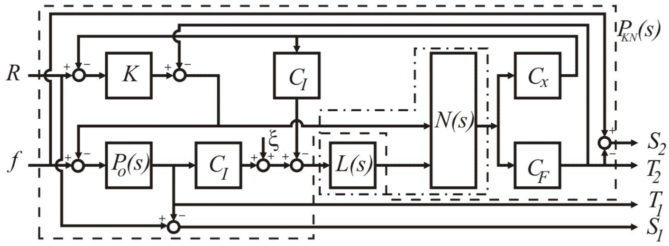

Рис. 1

При анализе и синтезе многомерных систем управления удобно пользоваться сингулярными числами. Зависимость сингулярных чисел передаточной функции от частоты в многомерных системах является обобщением амплитудной частотной характеристики в одномерных системах. Сингулярные числа характеризуют по соответствующему выходу многомерной системы коэффициент усиления на заданной частоте. В соответствии с этим подходом для описания качества многомерной системы управления широко используется H_∞-норма ее передаточной функции $H(j\omega)$, которая определяется следующим образом [19]:

$$\|H\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}\left[H(j\omega)\right], \tag{6}$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное сингулярное число матричной передаточной функции $H(j\omega)$.

Оптимальный наблюдатель можно найти из условия минимизации нормы H_∞ передаточной матрицы замкнутой системы. При этом для упрощения процедуры нахождения параметров наблюдателя эти условия целесообразно сформулировать в форме такой субоптимальной задачи:

$$\|H\|_\infty \le \gamma\,, \tag{7}$$

где γ – некоторое выбранное число.

Для того, чтобы оптимизировать ФЧ и ФДЧ в требуемом диапазоне частот, используем зависящие от частоты весовые функции $W_S(j\omega)$ и $W_T(j\omega)$, которые представляют собой соответственно фильтры низких и высоких частот. С учетом этого условие (7) можно представить в виде

$$\left\| \begin{matrix} W_S(j\omega)S(j\omega) \\ W_T(j\omega)T(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty \le \gamma\,. \tag{8}$$

Условие (8) перепишем следующим образом:

$$\left|W_S(j\omega)S(j\omega)\right|^2+\left|W_T(j\omega)T(j\omega)\right|^2\le\gamma^2,$$

откуда следует, что

$$\left|S(j\omega)\right|\le\gamma/W_S,\ \left|T(j\omega)\right|\le\gamma/W_T.$$

С учетом особенностей выбранных весовых функций можно утверждать, что $\left|S(j\omega)\right|\approx\gamma/W_S$ – для малых значений ω, а $\left|T(j\omega)\right|\approx\gamma/W_T$ – для больших значений ω. Этот результат иллюстрирует то, что выбором соответствующих весовых функций можно обеспечить требуемые амплитудные частотные характеристики ФЧ и ФДЧ.

В соответствии с этим подходом дополним систему, изображенную на рис. 1, весовыми функциями W_{S1}, W_{S2}, W_{T1} и W_{T2} следующим образом:

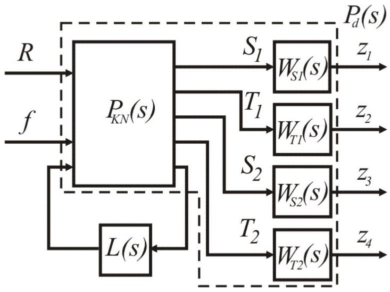

Рис. 2

На этом рисунке $P_{KN}(s)$ обозначает передаточную функцию системы, которая обведена штриховой линией на рис. 1.

Будем искать передаточную функцию звена $L(s)$ наблюдателя при рассмотрении дополненной системы P_d, которая на рис. 2 обведена штриховой линией. Для дополненной системы условие (8) примет вид

$$\left\|\begin{matrix}W_{S1}S_1\\ W_{S2}S_2\\ W_{T1}T_1\\ W_{T2}T_2\end{matrix}\right\|_\infty\le\gamma. \qquad (9)$$

При этом неравенство (9) является достаточным условием устойчивости рассматриваемой системы при $\gamma<1$ [19].

Нахождение субоптимального наблюдателя. Для решения задачи синтеза НРВС в соответствии с критерием (9) представим систему, изображенную на рис. 2, в следующей стандартной форме, используемой при H_∞-оптимизации:

$$\begin{aligned}\dot X&=AX+B_1F+B_2U_L,\\ Z&=C_1X+D_{11}F+D_{12}U_L,\\ Y&=C_2X+D_{21}F+D_{22}U_L,\end{aligned} \qquad (10)$$

где X – вектор состояния; Z – вектор контролируемого выхода; Y – вектор измеряемого выхода; F – вектор входных воздействий (возмущений); U_L – вектор управляющих воздействий.

Пусть весовые функции $W_{S1}(s)$, $W_{S2}(s)$, $W_{T1}(s)$, $W_{T2}(s)$ имеют соответствующие им представления в форме пространства состояний

$$\dot{X}_{ij} = A_{ij} X_{ij} + B_{ij} U_{ij}\ , Y_{ij} = C_{ij} X_{ij} + D_{ij} U_{ij}\ ;\ i = S,T\ ,\ j = 1,2\ .$$

С учетом этого, а также представлений (2) и (6) и особенностей дополненной системы $P_d(s)$ (рис. 1, 2) матрицы и векторы, входящие в (10), могут быть записаны следующим образом:

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ \hat{X}_e \\ X_{S1} \\ X_{T1} \\ X_{S2} \\ X_{T2} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_0 & -B_{01}(C_F + KC_x)/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_e - B_e(C_F + KC_x)/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{S1}C_0 & 0 & A_{S1} & 0 & 0 & 0 \\ B_{T1}C_0 & 0 & 0 & A_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{S2}C_F & 0 & 0 & A_{S2} & 0 \\ 0 & B_{T2}C_F & 0 & 0 & 0 & A_{T2} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{01}K/b & B_{02} \\ B_eK/b & 0 \\ B_{S1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{S2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\qquad D_{11} = \begin{bmatrix} D_{S1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & D_{S2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -D_{S1}C_0 & 0 & C_{S1} & 0 & 0 & 0 \\ D_{T1}C_0 & 0_F & 0 & C_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & -D_{s2}C_F & 0 & 0 & C_{S2} & 0 \\ 0 & D_{T2}C_F & 0 & 0 & 0 & C_{T2} \end{bmatrix}, D_{12} = [0],$$

$$C_2 = [C_I \quad -C_I C_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\ D_{21} = [0],\ D_{22} = [0],\ F = [R \quad f]^T\ .$$

Синтезируемое звено $L(s)$ наблюдателя можно представить в форме пространства состояний

$$\dot{X}_L = A_L X_L + B_L Y\ , U_L = C_L X_L + D_L Y\ , \qquad (11)$$

где X_L – вектор состояния звена $L(s)$.

Поведение замкнутой системы «$P_d(s)$ – $L(s)$» также представим в аналогичной форме

$$\dot{X}_{CL} = A_{CL} X_{CL} + B_{CL} F\ ,\ Z = C_{CL} X_{CL} + D_{CL} F\ , \qquad (12)$$

где

$$X_{CL}=\begin{bmatrix} X \\ X_L \end{bmatrix}, \quad A_{CL}=\begin{bmatrix} A+B_2D_LC_2 & B_2C_L \\ B_LC_2 & A_L \end{bmatrix}, \quad B_{CL}=\begin{bmatrix} B_1+B_2D_LD_{21} \\ B_KD_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{CL}=\left[(C_1+D_{12}D_LC_2) \quad D_{12}C_L\right], \; D_{CL}=\left[D_{11}+D_{12}D_LD_{21}\right].$$

Для нахождения с учетом критерия (9) матриц A_L , B_L , C_L , D_L , входящих в представление (11), может быть использован аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН). В соответствии с работой [20] условие (9) выполняется в том случае, если существует симметричная положительно определенная матрица V , для которой выполняются следующее матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} A_{CL}^TV+VA_{CL} & VB_{CL} & C_{CL}^T \\ (*)^T & -\gamma I & D_{CL}^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

$$\gamma<\gamma_{\min},$$

где символ $(*)^T$ обозначает транспонированный элемент матрицы, который расположен симметрично относительно главной диагонали.

Анализируя выражения для матриц замкнутой системы (12), можно сделать вывод о нелинейности матричного неравенства (13). Эта особенность вызывает существенные сложности при нахождении матриц наблюдателя с использованием неравенств (13).

Для линеаризации этих неравенств в работе [21] предложено использовать следующие новые переменные:

$$\hat{A}_L=TA_LO^T+TB_LC_2V+RB_2C_LO^T+R(A+B_2D_LC_2)V, \tag{14}$$

$$\hat{B}_L=TB_L+RB_2D_L. \tag{15}$$

$$\hat{C}_L=C_LO^T+D_LC_2V. \tag{16}$$

Матрицы O , T , V , R , входящие в (14) – (16), связаны следующим образом:

$$OT^T=I-VR.$$

Матрицы O и T могут быть найдены таким образом:

$$O=N_1\overline{N}_d, \; T=\overline{N}_dN_2^T, \; \overline{N}_d=\mathrm{diag}\left(\sqrt{N_d}\right),$$

где N_d – матрица, у которой на главной диагонали расположены сингулярные числа матрицы $[I-VR]$, а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми.

Матрица N_d может быть вычислена с использованием сингулярного разложения (svd)

$$\mathrm{svd}(I-VR)=N_1N_dN_2^T,$$

где N_1, N_2 – унитарные матрицы, состоящие из левых и правых собственных сингулярных векторов соответственно.

С использованием новых переменных (14) – (16) это неравенство может быть линеаризовано и представлено в следующем виде.

$$Q < 0, \tag{17}$$

где элементы матрицы Q имеют следующие значения

$q_{11} = AV + B_2\hat{C}_L + \left(AV + B_2\hat{C}_L\right)^T$, $q_{12} = \hat{A}_L^T + A + B_2 D_L C_2$,

$q_{13} = B_1 + B_2 D_L D_{21}$, $q_{14} = VC_1^T + \hat{C}_L^T D_{21}^T$, $q_{21} = (q_{12})^T$,

$q_{22} = RA + \hat{B}_L C_2 + \left(RA + \hat{B}_L C_2\right)^T$, $q_{23} = RB_1 + \hat{B}_L D_{21}$,

$q_{24} = C_1^T + C_2^T D_L^T + D_{12}^T$, $q_{31} = (q_{13})^T$, $q_{32} = (q_{23})^T$, $q_{33} = -\gamma I$,

$q_{34} = D_{11}^T + D_{21}^T D_L D_{12}^T$, $q_{41} = (q_{14})^T$, $q_{42} = (q_{24})^T$, $q_{43} = (q_{34})^T$, $q_{44} = -\gamma I$.

Решая ЛМН (17) с помощью существующих численных методов, можно найти минимальное значение $\gamma = \gamma_{\min}$, для которого существуют матрицы $\hat{A}_L$, $\hat{B}_L$, $\hat{C}_L$, D_L, V, R. После этого искомые матрицы наблюдателя, обеспечивающие выполнение условия (9), определяются с использованием следующих выражений:

$$C_L = (\hat{C}_L - D_L C_2 V)(O^T)^{-1}, \tag{18}$$

$$B_L = T^{-1}(\hat{B}_L - RB_2 D_L), \tag{19}$$

$$A_L = T^{-1}(\hat{A}_L - TB_L C_2 V - RB_2 C_L O^T - R(A + B_2 D_L C_2)V)(O^T)^{-1}. \tag{20}$$

Процедура синтеза наблюдателя с использованием предложенного выше подхода может быть представлена в виде следующих шагов.

1. Выбор номинальной модели $P_0(s)$ ОУ.
2. Определение коэффициентов усиления регулятора K исходя из выбранного критерия управления вектором состояния номинальной модели $P_0(s)$.
3. Выбор порядка модели возмущений (5) (в случаях, когда известна более точная модель возмущений, она также может быть использована).
4. Выбор весовых функций $W_{S1}(s)$, $W_{S2}(s)$, $W_{T1}(s)$, $W_{T2}(s)$ с учетом требований управления вектором состояния, а также предполагаемого спектра возмущений и помех измерителей.
5. Вычисление матриц представления дополненной системы P_d (10).
6. Нахождение матриц A_L, B_L, C_L, D_L и $\gamma_{\min}$ путем численного решения ЛМН (17) и использования выражений (18 – 20).
7. В случае, если не существует решения ЛМН (17) для требуемого значения γ, следует увеличить порядок модели возмущений (шаг 3) и (или) ослабить требования к комбинированной системе управления путем выбора других весовых функций (шаг 4).

Численный пример. Проиллюстрируем эффективность применения описанной выше процедуры на примере задачи управления вращательным движением твердого тела с присоединенным упругим элементом. Плоское движение такого ОУ с учетом одной формы изгибных колебаний может быть описано следующей передаточной функцией:

$$P(s) = \frac{s^2 + 2\delta\Omega + \Omega^2}{Js^2\left[s^2(1 - g^2/J) + 2\delta\Omega + \Omega^2\right]},$$

где J – осевой момент инерции системы «твердое тело + недеформированный элемент»; Ω и δ – частота и декремент собственных колебаний упругого элемента; g – коэффициент влияния упругих колебаний на движение твердого тела.

Будем использовать следующие исходные данные: $J = 1$ кг$\cdot$м^2, $g = 0{,}85$ кг$\cdot$м^2, $\Omega = 0{,}01...5$ рад/с, $\delta = 0{,}001$.

Структурная схема системы управления для проведения исследований представлена на рис. 3, где $KN(s)$ – передаточная функция комбинированного регулятора с НРВС.

В соответствии с изложенным выше подходом, в качестве номинальной модели при синтезе НРВС используем представление $P_0(s) = 1/s^2$. Соответствующие этой модели матрицы пространства состояний имеют вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Примем следующую модель возмущения: $A_f = [0]$, $C_f = [1]$. Матрицу коэффициентов усиления регулятора компенсированного ОУ выберем в виде

$$K = \begin{bmatrix} \omega_r^2 & 2\omega_r \end{bmatrix},$$

где $\omega_r = 0{,}1$ рад/с – верхняя граница полосы пропускания регулятора.

На рис. 4 штрихпунктирной линией представлены сингулярные числа ФЧ для случая отсутствия в замкнутом контуре НРВС ($KN(s) = K$). Здесь и далее для отображения сингулярных чисел использован логарифмический масштаб.

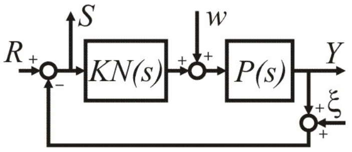

Рис. 3

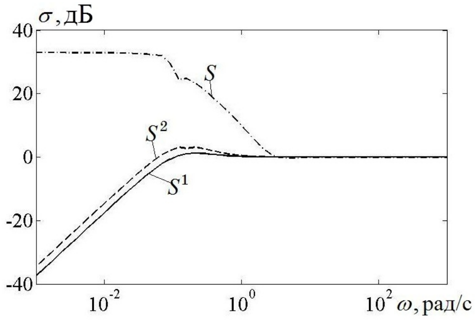

Рис. 4

Из рис. 4 видно, что применение такого регулятора приводит к неудовлетворительным результатам из-за действия внешних возмущений и возмущений, обусловленных немоделируемой динамикой ОУ. Для устранения этого включим в состав $KN(s)$ компенсатор возмущений, дополнив контур управления НРВС.

Выберем в качестве весовых функций следующие частотные фильтры первого порядка:

$$W_{S1} = \frac{0{,}526s + 0{,}07}{s + 0{,}0007},\ W_{S2} = \frac{0{,}526s + 10}{s + 0{,}01},\ W_{T2} = \frac{0{,}526s + 10}{s + 0{,}01}.$$

Функции W_{S1} и W_{S2} задают минимальные требования к верхним границам полос пропускания системы «номинальный ОУ – НРВС – регулятор» по задающему и возмущающему воздействиям на уровне соответственно 0,07 рад/с и 10 рад/с. Функция W_{T2} позволяет ограничить максимально допустимую полосу пропускания наблюдателя на уровне 30 рад/с для уменьшения влияния высокочастотных помех в контуре управления.

В связи с тем, что выбранная полоса пропускания регулятора K существенно меньше заданных границ полосы пропускания НРВС, для рассматриваемого примера можно исключить оптимизацию функции T_2 при поиске наблюдателя, что позволяет уменьшить порядок звена $L(s)$.

Путем численного решения ЛМН (13) с помощью метода, изложенного в работе [12], найдены матрицы звена $L(s)$, порядок которого для рассмотренного примера равен 8. Субоптимальное решение найдено для $\gamma = 0{,}9$, что удовлетворяет достаточному условию устойчивости замкнутого контура системы управления (9). Далее при анализе полученных результатов будем обозначать этот наблюдатель как Н1.

Для иллюстрации эффективности предложенного подхода исследуем рассмотренную систему в сравнении с результатами, полученными для случая независимого выбора коэффициентов усиления регулятора и наблюдателя, согласно методике, предложенной в работе [11], и обозначим такой наблюдатель как Н2. Для этого случая используем следующие коэффициенты усиления наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} 3\omega_n & 3\omega_n^2 & \omega_n^3 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где $\omega_n = 10{,}1$ рад/с – верхняя граница полосы пропускания наблюдателя.

На рис. 5, 6 представлены сингулярные числа ФЧ и ФДЧ. Здесь и далее сплошной линией изображены результаты, полученные с использованием предложенного в статье подхода, а зависимости для Н2 показаны штриховой линией.

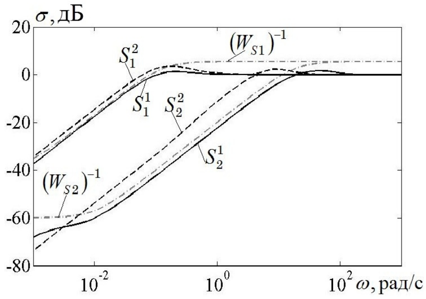

Рис. 5

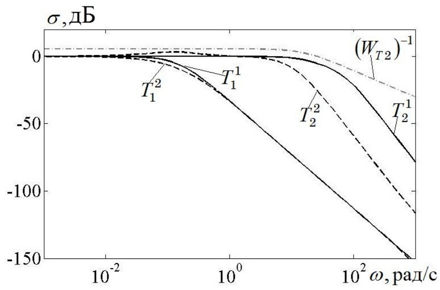

Рис. 6

На рис. 5 штрихпунктирной линией показаны зависимости $\sigma\left(W_{s1}^{-1}(j\omega)\right)$ и $\sigma\left(W_{s2}^{-1}(j\omega)\right)$, которые задают границы допустимых областей расположения соответствующих ФЧ. Из этого рисунка видно, что ФЧ синтезированного наблюдателя удовлетворяют этим требованиям. В то же время для H2 ФЧ как по задающему, и по возмущающему воздействиям выходят за границы, определенные соответствующими весовыми функциями.

На рис. 6 штрихпунктирной линией показана зависимость $\sigma\left(W_{T2}^{-1}(j\omega)\right)$, которая определяет границы допустимой области расположения ФДЧ. Из рисунка видно, что результаты для обоих наблюдателей удовлетворяют заданным требованиям.

На рис. 7, 8 показана реакция системы на единичное возмущающее воздействие. Из этих рисунков видно, что синтезированный наблюдатель имеет существенное преимущество с точки зрения длительности протекания переходных процессов; кроме того, при использовании H2 наблюдается значительная амплитуда переходных процессов по регулируемой величине.

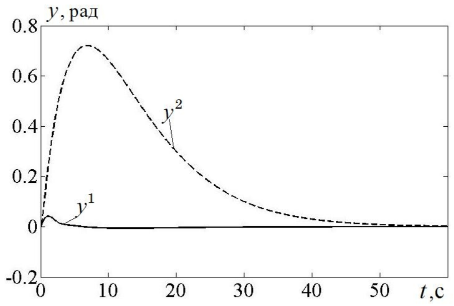

Рис. 7

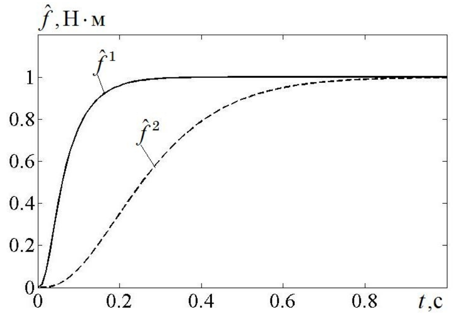

Рис. 8

На рис. 9 представлена зависимость выходной переменной y от времени при прямоугольном задающем и синусоидальном возмущающем воздействиях. Из этого рисунка видно, что несмотря на достаточно малую ошибку оценивания возмущения обоими наблюдателями, для случая H2 наблюдается значительная ошибка управления выходом системы. Результаты, приведенные на этих рисунках, иллюстрируют тот факт, что отдельно высокая точность оценивания возмущений и приемлемая полоса пропускания регулятора не всегда позволяют обеспечить требуемые результаты для варианта H2 даже для случая, когда быстродействие наблюдателя значительно выше быстродействия регулятора.

На рис. 4 дополнительно к сингулярным числам, описанным выше, представлены ФЧ для исходной рассматриваемой системы (рис. 3) при использовании в контуре управления НРВС. Из этого рисунка видно, что для H1 эта характеристика совпадает с ФЧ эквивалентной системы, использованной при синтезе наблюдателя (рис. 1).

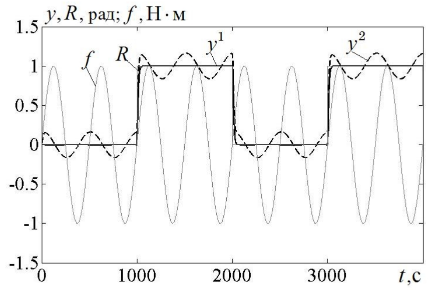

Рис. 9

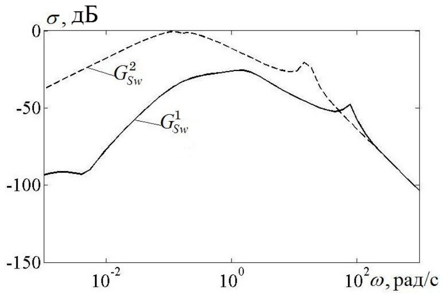

Рис. 10

На рис. 10 изображены зависимости сингулярных чисел передаточных функций $W_{Sw}(s)$ от входа w к выходу S (рис. 3) для рассматриваемых вариантов наблюдателей. На основании этого рисунка можно сделать вывод, что комбинированный регулятор с H1 обеспечивает лучшую по сравнению вариантом H2 компенсацию возмущений.

Заключение. В статье с использованием методологии оптимизации H_∞ предложена процедура синтеза наблюдателя расширенного вектора состояния при рассмотрении замкнутого контура комбинированной системы управления. В соответствии с этой процедурой, структура и параметры наблюдателя определяются таким образом, чтобы обеспечить выполнение требований, предъявляемых к замкнутому контуру системы управления, а не лишь требований к контуру оценивания вектора состояния. Требования, обеспечивающие заданное качество и устойчивость замкнутого контура системы управления с учетом спектральных свойств возмущений и помех измерителей, формулируются в частотной области. При этом границы допустимых областей расположения сингулярных чисел передаточной функции рассматриваемой системы управления определяются с помощью весовых функций, которыми дополняется исходная система. Решение рассмотренной задачи с использованием методов анализа многомерных систем управления позволяет одновременно обеспечить выполнение требований как по компенсации возмущений, так и по управлению вектором состояния. Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована на примере синтеза комбинированной системы управления вращением твердого тела с присоединенным упругим элементом путем сравнения полученных результатов с известными ранее.

Результаты статьи могут быть использованы на практике при решении задач управления и наблюдения при наличии существенных неконтролируемых возмущений и значительной неопределенности математической модели объекта управления.

К недостаткам предложенного подхода следует отнести то, что дополнение исходной модели весовыми функциями приводит к повышению порядка наблюдателя. В связи с этим представляет интерес задача редукции размерности синтезированного наблюдателя при выполнении требований к замкнутому контуру системы управления, что может быть предметом дальнейших исследований.

1. *Radke A.* Survey of State and Disturbance Observers for Practitioners / *A. Radke, Zh. Gao* // Proceeding of the American Control Conference. – 2006. – P. 5183 – 5188.
2. *Luenberger D.* Observers for Multivariable Systems / *D. Luenberger* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1966. – Vol. 11, No. 2. – P. 190 – 197.

3. *Sorenson H.W.* Kalman Filtering: Theory and Application / *H. W. Sorenson*. – IEEE Press, 1985. – 457 p.
4. *Shaked U. H_∞*-Optimal Estimation: A Tutorial. / *U. Shaked, Theodor Y.* // Proceedings of the IEEE Conference on Decision Control, Tucson, AZ. – 1992. – P. 2278 – 2286.
5. *De Souza C. E.* Robust H_∞-Filtering for Continuous Time Varying Uncertain Systems with Deterministic Input Signals / *C. E. De Souza, U. Shaked, M. Fu* // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1995. – No. 43. – 709 – 719.
6. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / *В. М. Кунцевич*. – К. : Наукова думка, 2006. – 264 с.
7. *Бакан Г. М.* Оценивание состояния непрерывных динамических систем методом эллипсоидов / *Г. М. Бакан, В. В. Волосов, Н. Н. Куссуль* // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №6. – С. 72 – 91.
8. *Джонсон С.* Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям / *С. Джонсон* // Фильтрация и стохастическое управлениё в динамических системах. – М., 1980. – С. 253 – 320.
9. *Павловский М. А.* Системи керування обертальним рухом космічних апаратів. Підручник / *М. А. Павловский, В. П. Горбулин, О. М. Клименко*. – Київ : Наукова думка, 1997. – 199 с.
10. *Yang X.* Capabilities of Extended State Observer for Estimating Uncertainties / *X. Yang, Y. Huang* // Proceeding of the American Control Conference. – 2009. – P. 3700 – 3705.
11. *Gao Z.* Active Disturbance Rejection Control: a Paradigm Shift in Feedback Control System Design / *Z. Gao* // Proceeding of the American Control Conference. – 2006 – P. 239 – 2405.
12. *Alexander B. X. S.* A Novel Aapplication of Extended State Observer for High Performance Control of NASA's HSS Flywheel and Fault detection / *B. X. S. Alexander, R. Rarick, L. Dong* // Proceeding of the American Control Conference. – 2008. – P. 5216 – 5221.
13. *Chen Z.* Active Disturbance Rejection Control of Chemical Processes / *Z. Chen, Q. Zheng, Z. Gao* // 16th IEEE International Conference on Control Application. – 2007. – P. 855 – 861.
14. *Хорошилов С. В.* Синтез субоптимальных компенсаторов возмущений в форме наблюдателя расширенного вектора состояния / *С. В. Хорошилов* // Техническая механика. – 2014. – Вып. 2. – С.79 – 92.
15. *Doyle J. C.* Guaranteed Margins for LQG Regulators / *J. C. Doyle* // IEEE Transaction on Automatic Control. – 1978. – Vol. AC-23, No. 4. – P. 756 – 757.
16. *Doyle J. C.* Robustness with Observers / *J. C. Doyle, G. Stein* // IEEE Transaction on Automatic Control. – 1979. – Vol. AC-24, No. 4. – P. 607 – 611.
17. *Stein G.* The LQR/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design / *G. Stein, M. Athans* // IEEE Transaction on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC-24, No. 4. – P. 607 – 611.
18. *Schrijver E.* Disturbance Observers for Rigid Mechanical Systems: Equivalence, Stability, and Design / *E. Schrijver, J. Van Dijk* // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2002. – Vol. 124. – P. 539 – 548.
19. *Francis B. A.* A Course in H_∞ Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences / *B. A. Francis*. – NY. : Springer-Verlag, 1987. – 150 p.
20. *Verma M. H_∞*-Compensation with Mixed Sensitivity as a Broadband Matching Problem / *M. Vermaand, E. Jonckheere* // Systems and Control Letters. – 1984. – No 4. – P. 125 – 130.
21. *Zhou K.* Robust and Optimal Control / *K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover*. – NY: Prentice-Hall, 1996. – 596 p.
22. *Chilali* M. Robust Pole Placement in LMI Regions / *M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian* //IEEE Trans. on Automatic Control. – 1999. – Vol. 44. – P. 2257 – 2270.
23. *Chilali M.* H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach / *M. Chilali, P. Gahinet* //IEEE Trans. on Automatic Control. – Vol. 41. – 1996. – P. 358 – 367.
24. *Nesterov Y.* The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities / *Y. Nesterov, A. Nemirovskii* // Math. Programming Series B. – 1997. – Vol. 77. – P. 163 – 190.
25. *Лорензо Р.* Синтез систем управления угловым положением деформируемых спутников на основе метода Гильберта / *Р. Лорензо, А. Сантинелли* // Управление в пространстве. Труды международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в пространстве. – 1975. – Том 1. – С. 190 – 198.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 15.02.16,
в окончательном варианте 15.02.16