УДК 539.3:519.6

В. С. ГУДРАМОВИЧ, Э. Л. ГАРТ, К. А. СТРУНИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ ПРОТЯЖЁННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель: численное исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, содержащих произвольно ориентированные протяженные (полосовые, полосовые со скруглениями на концах) включения, в зависимости от сочетания жесткостей включений, их размеров и ориентации, соотношения жесткостей включений и пластины. **Метод:** метод конечных элементов, реализованный в виде стандартного лицензионного пакета ANSYS. **Результаты:** проведен анализ влияния соотношения жесткостей включений и пластины (матрицы), их размеров, взаимной ориентации включений на распределение напряжений и деформаций для широкого диапазона материалов (в качестве таких материалов в статье взяты алюминий и его сплавы, сталь, медь). Построены графики распределения интенсивностей напряжений. Рассмотрены два включения в виде полос и полос со скруглениями на концах. Алгоритмы расчета позволяют рассмотреть напряженно-деформированное состояние при варьировании в широком диапазоне жесткостных характеристик протяженных включений, их формы, количества, а также соотношения жесткостей включений и матрицы (пластины). Проведенный анализ имеет научное и практическое значение для моделирования процессов порошковой металлургии и керамического производства, процессов деформирования сред с дискретными изменениями структуры и элементов конструкций с тонкими накладками и включениями.

Ціль: чисельне дослідження напружено-деформованого стану прямокутних пластин, що містять довільно орієнтовані протяжні (смугові, смугові з округленнями на кінцях) включення, залежно від комбінації жорсткостей включень, їх розмірів і орієнтації, співвідношення жорсткостей включень і пластини. **Метод**: метод скінцевих елементів, реалізований у вигляді стандартного ліцензійного пакету ANSYS. **Результати**: проведено аналіз впливу співвідношення жорсткостей включень і пластини (матриці), їх розмірів, взаємної орієнтації включень на розподіл напружень і деформацій для широкого діапазону матеріалів (у якості таких матеріалів в статті взяті алюміній і його сплави, сталь, мідь). Побудовані графіки розподілу інтенсивностей напружень. Алгоритми розрахунку дозволяють розглянути напружено-деформований стан при варіюванні в широкому діапазоні жорсткостних характеристик протяжних включень, їх форми, кількості, а також співвідношення жорсткостей включень і матриці (пластини). Розглянуто два включення у вигляді смуг і смуг з округленнями на кінцях. Проведений аналіз має наукове й практичне значення для моделювання процесів порошкової металургії й керамічного виробництва, проведення процесів деформування середовищ із дискретними змінами структури й елементів конструкцій з тонкими накладками й включеннями.

The research aim is to study numerically the stressed-strained state of rectangular plates with arbitrarily-oriented extended inclusions (strip ones with and without twists at ends) depending on the combination of rigidities of inclusions, theirs sizes and orientations, relations of rigidities of inclusions and the plate. The research method is the finite-element method in the form of the ANSYS standard licensed package. The following results are obtained: the effects of the relation of rigidities of inclusions and the plate (matrix), their sizes, mutual orientations of inclusions on distribution of stresses and strains over a wide range of materials (the paper deals with aluminium and its alloys, steel, copper as examples) are analyzed. Plots of distributions of stresses intensities are built. Two inclusions in the form of strips and ones with rounding at ends are examined. Algorithms for calculating allow consideration of the stressed-strained state with variations in characteristics of extended inclusions, their forms, quantities as well as relations of rigidities of inclusions and the matrix over wide range of rigidities. The analysis made is of scientific and practical use for modelling processes in powder metallurgy and ceramics production, deforming the media with discrete variations in the structure and structural members with thin straps and inclusions.

Нарушения сплошности (отверстия, поры, трещины) и наличие разнообразных включений являются факторами, обусловливающими неоднородность структуры, и характерны для элементов конструкций и сооружений различных отраслей современной техники и строительства. Они оказывают значительное влияние на процессы деформирования и приводят к концентрации напряжений, что может вызвать локальные разрушения или появление несовершенств формы, приводящих к невозможности дальнейшей эксплуатации конструкции. Материалы, используемые при создании конструкций, также неоднородны по своей структуре (включения, поры, трещины). Включения могут моделировать тонкие подкрепляющие элементы, накладки, сварные или клеевые соединения.

Необходимость учёта наличия тонких включений возникает также при исследовании фазовых превращений материалов, например формирования мартенситных структур [11]. Включениями можно моделировать заполненные материалом поры.

Исследование деформирования разнообразных тел с включениями имеет важное значение в процессах порошковой технологии, керамического производства и др. В них, в частности, осуществляется спекание при больших температурах порошка, спресованного под высоким давлением. Актуальным является оценка влияния включений, пор на процессы деформирования [14, 17, 23, 24].

К перспективным направлениям для многих отраслей техники относится использование поверхностного упрочнения, повышающего работоспособность элементов конструкций. Важным здесь является разработка дискретного упрочнения, которое осуществляется технологическими схемами определённого вида [12, 13, 15]. При моделировании влияния дискретных упрочнений на напряжённо-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций их также можно рассматривать как включения особой структуры.

Включения могут моделировать также полосчатость ферритно-перлитной структуры в микроструктуре, связанной с предварительным сложным нагружением при пластическом деформировании материалов [6, 9].

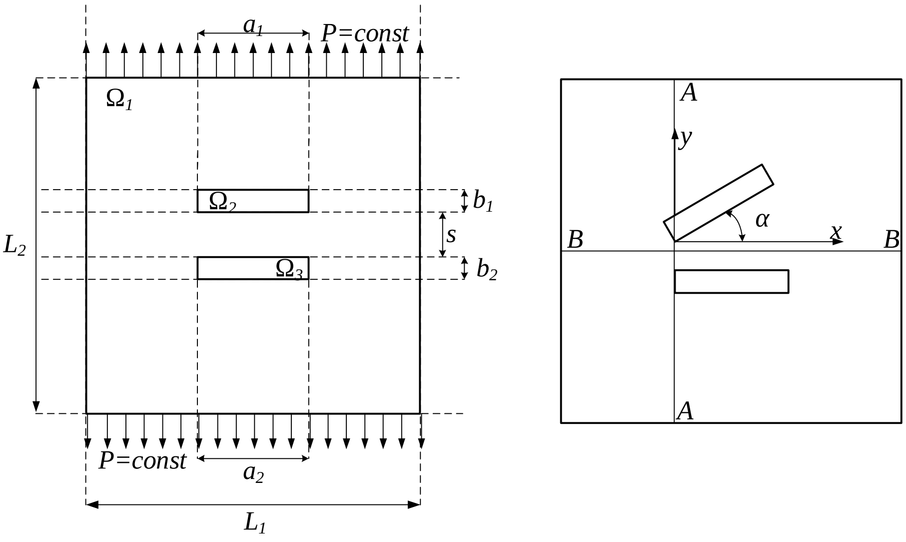
Для задач о включениях канонической формы в неограниченных средах возможно применение аналитических методов (метод интегральных преобразований, метод функции скачка (для исследования тонких включений) [18] и др.) Однако в случае тел сложной формы, наличия включений различной конфигурации и ориентации аналитические подходы зачастую неприемлемы. Поэтому целесообразно использование численных методов, которые являются достаточно универсальными и пригодными для объектов разной формы, размеров, а также различных видов нагружения.

К основным численным методам решения задач механики деформируемого твердого тела, получившим широкое распространение, относятся методы конечных разностей, граничных элементов, вариационно-сеточный метод конечных элементов (МКЭ) [1, 3, 10, 16]. Проекционно-итерационные схемы реализации сеточных методов, существенно уменьшающие компьютерное время расчёта, исследованы в трудах известных учёных-математиков (Л. В. Канторович, Г. И. Марчук, А. А. Самарский, В. В. Шайдуров, W. Hackbush, R. Kluge и др.). Исследование НДС тел с включениями и структурированных сред на основе этих схем проведено в [4 – 6] и др. Применение таких расчётных схем является перспективным подходом при моделировании НДС различных объектов современной техники [7].

В проектных организациях используется реализация МКЭ в составе пакетов прикладных программ, в частности ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, и др. Пакет ANSYS – это универсальная система конечноэлементного анализа со встроенным графическим интерфейсом пользователя и редактором моделей, позволяющая решать разнообразные линейные и нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела, жидкости и газа. Пакет эффективен для применения к различным случаям НДС и критических состояний элементов конструкций разных отраслей современной техники и строительства [19].

В данной статье с помощью лицензионного пакета ANSYS проведено компьютерное моделирование поведения прямоугольной пластины с двумя протяжёнными упругими включениями разной жёсткости, расположенными под различными углами друг к другу. Исследовано влияние жёсткости включений и их ориентации на НДС пластины.

Постановка задачи. Алгоритм решения. Рассматривается неоднородная изотропная прямоугольная пластина Ω с двумя упругими включениями Ω_2, Ω_3 $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$. На рис. 1 приведены: а) геометрия и схема нагружения пластины; б) схема расположения включений и характерные сечения. Через L_1, L_2 обозначены длины сторон пластины; a_i, b_i – соответствующие размеры сторон включения; s – расстояние между ними. На границе γ области Ω ($y = 0,\ 0 \le x \le L_1$ и $y = L_2,\ 0 \le x \le L_1$) заданы растягивающие усилия $P(x,y) = (P_x(x,y), P_y(x,y))^T$ ($P_x(x,y) = 0,\quad P_y(x,y) = const$). На остальной части границы области Ω ($x = 0,\ 0 \le y \le L_2$ и $x = L_1,\ 0 \le y \le L_2$) усилия равны нулю. Необходимо определить поля перемещений и напряжений u и v в пластине с включениями при разной ориентации включений.



а) б)

Рис. 1

В вариационной постановке исходная задача для пластины сводится к минимизации функционала [2]:

$$I[u,v] = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} \left\{ 2\mu_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx\,dy -$$

$$- \int_{\gamma} (P_x u + P_y v)\, d\gamma,$$

где λ_1, μ_1 – постоянные Ляме материала пластины; λ_i, μ_i $(i = \overline{2,n})$ – постоянные Ляме для включений; $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ – область определения переменных x и y.

Для моделей плоского напряжённого состояния (ПН) и плоской деформации (ПД) имеем:

$$\lambda_{ПН} = \lambda_{ПД} \frac{1-2\nu}{1-\nu} = \frac{2G\nu}{1-\nu}; \qquad \mu_{ПН} = \mu_{ПД} = G$$

где G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Для решения поставленной задачи применялся МКЭ в составе пакета прикладных программ ANSYS [19]. Известно [3, 10], что вариационно-сеточный МКЭ основан на идее дискретизации области непрерывного изменения аргументов искомой функции (в физической интерпретации – перемещения, температуры, давления и т. д.) совокупностью конечного числа подобластей – конечных элементов – и аппроксимации непрерывной функции в пределах каждого конечного элемента некоторым полиномом. В результате этого исходная вариационная задача заменяется дискретной моделью – системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции в узлах сетки.

При расчётах использованы треугольные лагранжевые конечные элементы второй степени (шестиузловые). Аппроксимация неизвестных функций перемещений и напряжений $u(x,y)$ и $v(x,y)$ внутри каждого конечного элемента осуществляется с помощью квадратичного полинома:

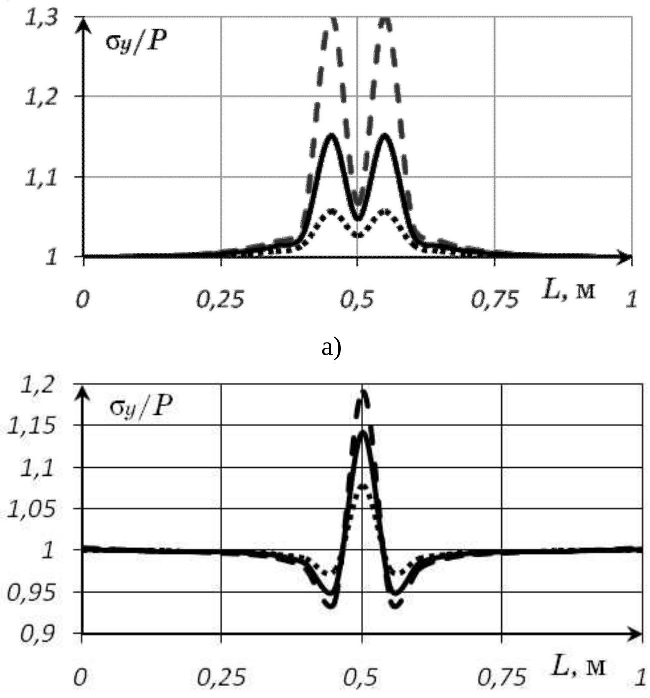
$$\varphi(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 .$$

Проведено сравнение параметров НДС, полученных для тонкого крестообразного включения на основе рассматриваемого в [18] аналитического метода функций скачка, с параметрами, полученными на основе указанного пакета. Различие составляет около 3%.

Результаты численного анализа. Численный анализ проведен для квадратных пластин размерами 0,4 × 0,4 м с двумя одинаковыми протяжёнными прямоугольными включениями 0,02 × 0,01 м, относительная жёсткость которых $k = G_{вкл} / G_{матр}$ может быть больше либо меньше 1. Расстояние между включениями $s = 0{,}02$ м, внешняя нагрузка $P = 10\,МПа$. Для определённости взяты материалы со следующими модулями упругости E и коэффициентами Пуассона ν: сталь ($E = 200\,ГПа,\ \nu = 0{,}33$), алюминий ($E = 70\,ГПа,\ \nu = 0{,}3$), медь ($E = 110\,ГПа,\ \nu = 0{,}3$). Выбор материала носит условный характер. Могут быть взяты и другие жесткостные параметры включений, определяемые E и ν. В частности, в порошковой технологии в качестве материала, формирующего матрицу, может использоваться алюминий, а для упрочняющих включений – различные стали (СТ3, Р6М5 и др.). Более мягкие по отношению к матрице включения могут использоваться для придания некоторых функциональных свойств бинарных систем (проводимость, порообразование). Рассмотренные включения могут моделировать подкрепляющие элементы тонкостенных конструкций, дискретные упрочнения покрытий, включения в порошковой технологии.

Расчёты проведены на ПК Intel Inside с тактовой частотой Dual-Core 2,10 GHz, оперативной памятью 3 GB, разрядность системы – x32. Количество конечных элементов – 56037. Время расчёта в среднем – 0,2 мин.

На рис. 2 приведены графики распределения напряжений σ_y / P в пластине при $k > 1$, $\alpha = 0^\circ$; L – безразмерная величина (для сечения *А–А* $L = L_2 / L_2$, для *В–В* $L = L_1 / L_1$). Рис. 2, а показывает распределение напряжений в сечении *А–А*; рис. 2, б – в сечении *В–В*. Рассмотрены случаи: 1) включение из меди, пластина из алюминия ($k = 1{,}57$) (мелкая пунктирная линия); 2) включение из стали, пластина из меди ($k = 2{,}04$) (сплошная линия); 3) включение из стали, пластина из алюминия ($k = 3{,}2$) (крупная пунктирная линия).

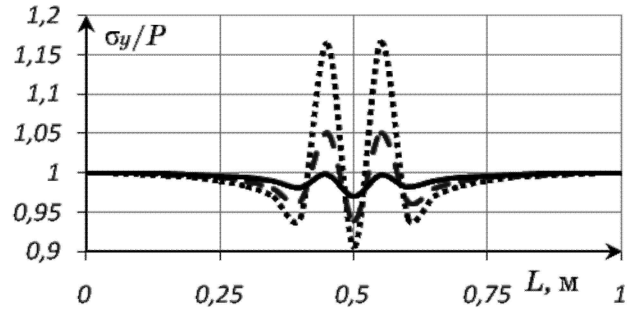


а)

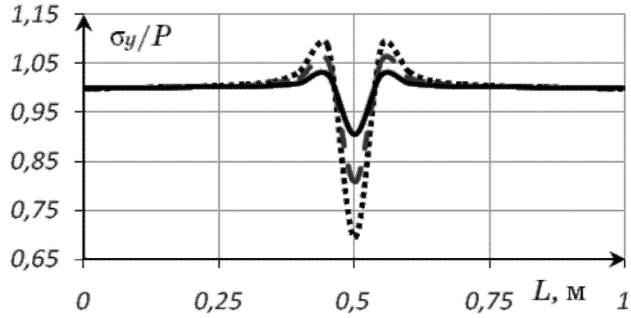
б)

Рис. 2

На рис. 3 приведены графики распределения напряжений в пластине при $k < 1$, $\alpha = 0^\circ$: а) в сечении *А–А*; б) в сечении *В–В*. Рассмотрены случаи: 1) включение из алюминия, пластина из стали ($k = 0{,}31$) (мелкая пунктирная линия); 2) включение из меди, пластина из стали ($k = 0{,}48$) (крупная пунктирная линия); 3) включение из алюминия, пластина из меди ($k = 0{,}63$) (сплошная линия).



а)



б)

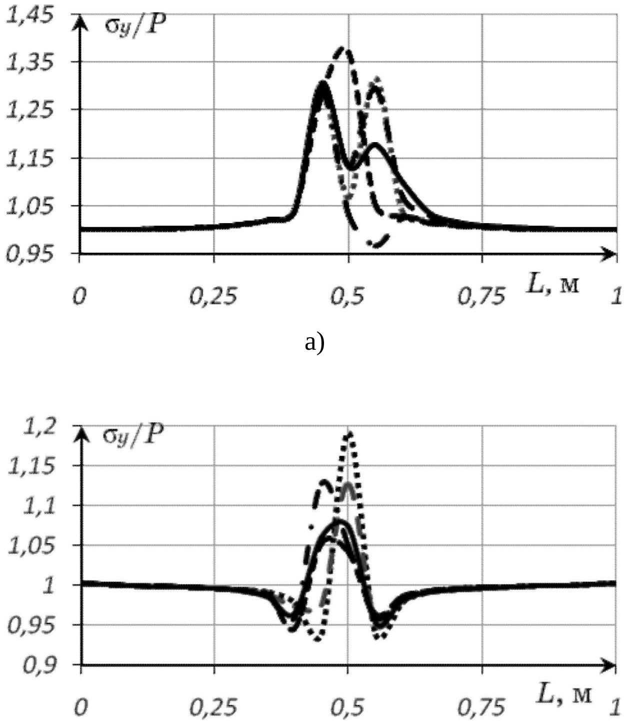
Рис. 3

На рис. 2 видно, что для случая $k > 1$ при увеличении относительной жёсткости включений коэффициент концентрации напряжений возрастает. Обратная зависимость наблюдается для случая $k < 1$ (рис. 3). Так, для материалов алюминий и сталь в зависимости от того, включение это или матрица, наблюдается увеличение скачков напряжений ~ на 11% для более жёсткого включения.

Для исследуемых сочетаний материалов максимальный наблюдаемый скачок напряжений для случая $k > 1$ $(k = 3{,}2)$ оказывается ~ на 10% больше, чем при $k < 1$ $(k = 0{,}31)$.

На рис. 4 приведены графики распределения напряжений в пластине для случая $k > 1$ $(k = 3{,}2)$ при различных углах поворота включения одного относительно другого: а) в сечении *А–А*; б) в сечении *В–В*. Рассмотрены случаи: 1) $\alpha = 0^\circ$ (мелкая пунктирная линия); 2) $\alpha = 45^\circ$ (крупная пунктирная линия); 3) $\alpha = 90^\circ$ (сплошная линия); 4) $\alpha = 135^\circ$ (линия точка с пунктиром); 5) $\alpha = 180^\circ$ (частая крупная пунктирная линия).

Можно видеть, что в сечении пластины *А–А* при изменении угла поворота от 0° до 90° напряжения уменьшаются на $1{,}5\%$, а при изменении угла от 90° до 180° – увеличиваются ~ на 5%. Для сечения *В–В* при изменении угла поворота одного включения относительно другого от 0° до 90° значения напряжений уменьшаются ~ на 8%, а при изменении угла от 90° до 180° уменьшаются на $6{,}5\%$.



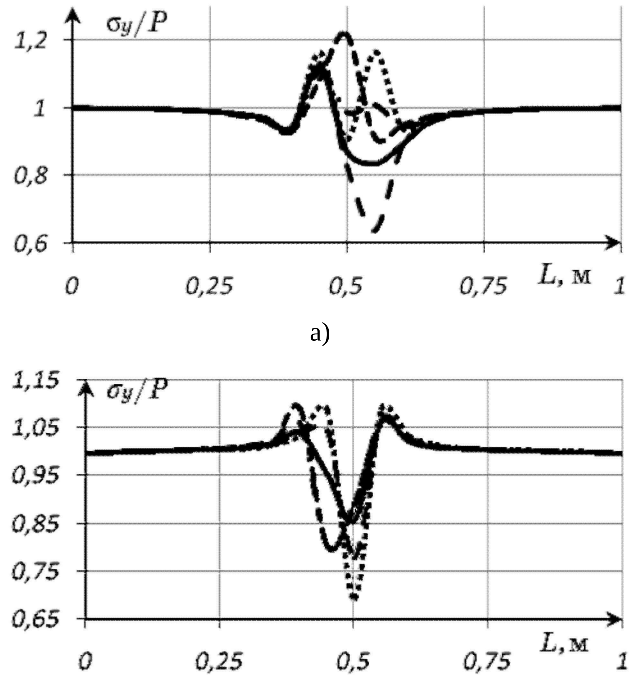
а)

б)

Рис. 4

Рис. 5, а показывает распределение напряжений в сечении *A–A*; рис. 5, б – в сечении *B–B*. Рассмотрены случаи: 1) $\alpha = 0^\circ$ (мелкая пунктирная линия); 2) $\alpha = 45^\circ$ (крупная пунктирная линия); 3) $\alpha = 90^\circ$ (сплошная линия); 4) $\alpha = 135^\circ$ (линия точка с пунктиром); 5) $\alpha = 180^\circ$ (частая крупная пунктирная линия).

При относительной жёсткости включений $k < 1$ $(k = 0{,}31)$ (рис. 5) наблюдаются обратные эффекты в распределении напряжений. Для сечения *A–A*: при изменении угла от 0° до 90° напряжения уменьшаются $\sim$ на 5%; при изменении угла от 90° до 180° напряжения увеличиваются на $3{,}3\%$. Для сечения *B–B*: при изменении угла поворота от 0° до 90° напряжения увеличиваются на $19{,}5\%$; при изменении угла от 90° до 180° $\sim$ на 5%.



а)

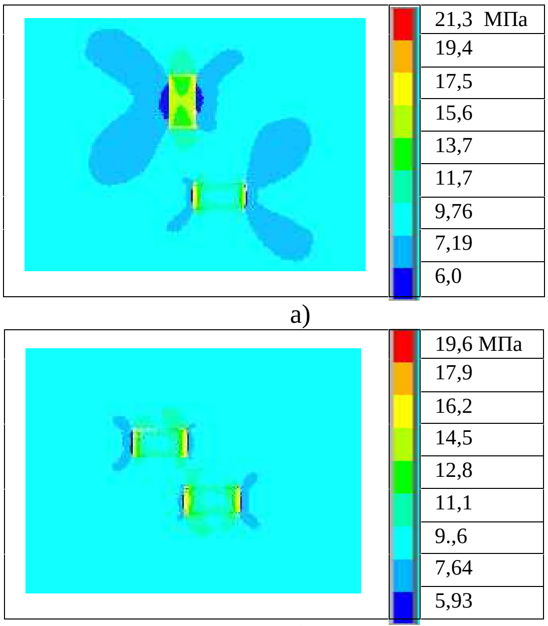
б)

Рис. 5

На рис. 6 приведены распределения интенсивности напряжений при $k = 3{,}1$ для различных углов поворота α включений относительно друг друга. Материал пластины – алюминий, материал включений – сталь. Рис. 6, а и рис. 6, б соответствуют углам α, равным 90° и 180°. Справа расположены шкалы значений интенсивности напряжений в МПа. Для более жёсткого материала матрицы (пластины) (при $k = 0{,}31$) на рис. 7 приведены распределения интенсивности напряжений для различных углов поворота α: а) 90°; б) 135°. Материал пластины и включений – соответственно сталь и алюминий.

Проведены также расчёты для пластин с протяжёнными включениями разной длины, остроугольными и со скруглениями при их различной ориентации друг относительно друга.

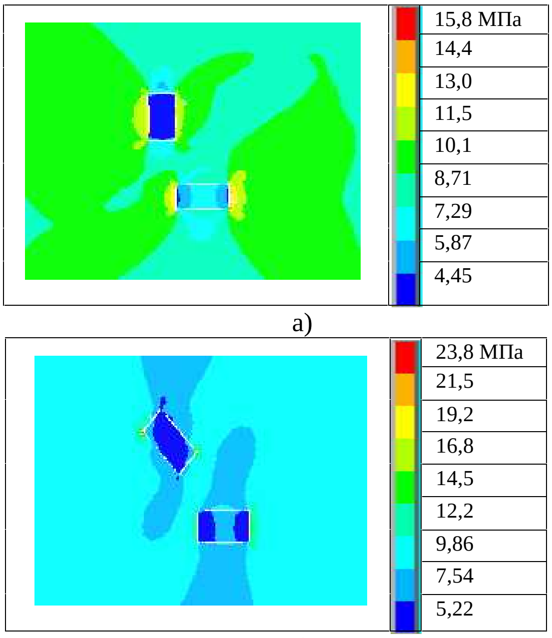
На рис. 8 приведены графики распределения напряжений в сечениях пластины для случая $k > 1$ $(k = 3{,}2)$, рассмотрены включения: а) прямоугольные; б) скруглённые на краях. Расстояние между включениями $s = 0{,}02$ м. Длина и ширина включений на рис. 8, а: $a_1 = 0{,}04$ м, $a_2 = 0{,}02$ м, $b_1 = b_2 = 0{,}01$ м; на рис. 8, б: $a_1 = 0{,}04$ м, $a_2 = 0{,}03$ м, $b_1 = b_2 = 0{,}01$ м. Скруглённое включение повернуто на $\alpha = 45^\circ$ относительно его центра; L – безразмерная величина (для сечения *А–А* $L = L_2 / L_2$, для *В–В* $L = L_1 / L_1$). Рис. 8, а показывает распределение напряжений в сечении *А–А*; рис. 8, б – в сечении *В–В*.



а)

б)

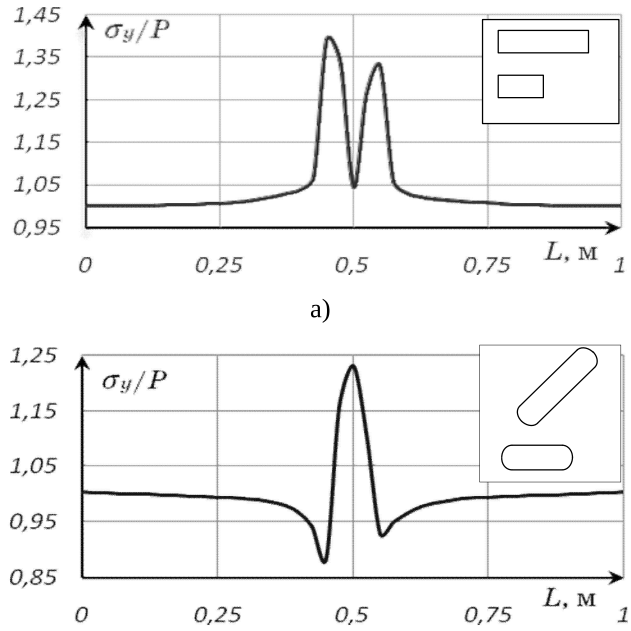
Рис. 6



а)

б)

Рис. 7



а)

б)

Рис. 8

Выводы. На основе использования метода конечных элементов в составе стандартного пакета ANSYS исследовано НДС упругой изотропной пластины с протяжёнными включениями при различной жёсткости и их взаимной ориентации. Построено графическое распределение напряжений в прямоугольной пластине с двумя включениями для разных сочетаний материалов (сталь, медь, алюминий).

Сравнение решения, полученного на основе используемого пакета, с аналитическим решением [18] для тонкого ленточного крестовидного включения показало различие не более 3%.

Изменение угла поворота одного включения относительно другого существенно влияет на распределение напряжений в пластине. В случае относительной жёсткости включений $k>1$ в сечении *А–А*: при изменении угла поворота от 0° до 90° напряжения уменьшаются $\sim$ на $1{,}5\%$, а при угле от 90° до 180° – увеличиваются $\sim$ на 5%. Для сечения *B–B* пластины напряжения уменьшаются при изменении угла от 0° до 90° $\sim$ на 8%, а при увеличении угла от 90° до 180° – возрастают $\sim$ на $6{,}5\%$. При относительной жёсткости $k<1$ наблюдаются обратные эффекты в распределении напряжений.

Наиболее безопасным углом, определяющим ориентацию включений, является 0° (включения располагаются параллельно), наиболее опасными –

45° и 135°. Для включений более жёстких, чем матрица, опасным также является угол 90°.

При росте относительной жёсткости включений коэффициент концентрации напряжений увеличивается, что может привести к появлению пластических деформаций в пластине, связанному с ним падению жёсткости и началу разрушения элементов конструкции.

Стандартные пакеты на основе МКЭ позволяют рассмотреть НДС при варьировании в широком диапазоне жесткостных характеристик включений, их протяжённости, количества, параметров пластины и другие виды нагружения (двухосное растяжение-сжатие, кручение), различные соотношения жесткостных характеристик включений и пластин, а также протяжённые включения другой формы (эллиптические, прямоугольные со скруглениями и др.).Такие исследования имеют значение при моделировании процессов порошковой технологии и керамического производства, исследовании влияния дискретного упрочнения, а также дискретизации микроструктуры материала при фазовых превращениях.

1. *Бенерджи П.* Метод граничных элементов в прикладных науках : Пер. с англ. / *П. Бенерджи, Р. Баттерфилд*. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / *К. Васидзу*. – М. : Мир, 1987. – 544 с.
3. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы : Пер. с англ. / *Р. Галлагер*. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
4. *Гарт Э. Л.* Численный анализ процесса упруго-пластического деформирования структурированных сред / *Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович* //Доп. НАН України. –2012. – №5. – С. 49 – 56.
5. *Гарт Э. Л.* Конечноэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями / *Э. Л. Гарт* // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. : Механіка. – 2011. – Вип. 15, т. 2. – С. 39 – 47.
6. *Гарт Э. Л.* Проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів у задачах деформування пластин з отворами та включеннями / *Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович* // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2013. –Т. 56, № 2. – С. 48 – 59.
7. *Гудрамович В. С.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики / *В. С. Гудрамович* // Техническая механика. – 2013. – С. 97 – 104.
8. *Гудрамович В. С.* Проекционно-итерационные схемы метода конечных элементов в задачах деформирования структурированных сред / *В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт* // Сучасні проблеми механіки та математики : Матер. Міжн. наук. конф. присв. 85-річчю від дня народж. академіка Я. С. Підстригача (21 – 25 травня 2013 р., Львів) : в 3-х т. – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 32 – 33.
9. *Гультяев В. И.* Закономерности пластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении / *В. И. Гультяев* : автореф. дис…д-ра техн. наук. – Тверь : Изд-во ТГТУ, 2012. – 44 с.
10. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимация : Пер. с англ. / *О. Зенкевич, К. Морган*. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
11. *Коваль Ю. Н.* Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа / *Ю. Н. Коваль, В. А. Лободюк*. – К. : Наук. думка, 2010. – 288 с.
12. *Ляшенко Б. А.* Упрочнение поверхности металлов покрытиями дискретной структуры с повышенной адгезионной и когезионной стойкостью / *Б. А. Ляшенко, Ю. А. Кузема, М. С. Дигам*. – К. : Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины. – 1984. – 57 с.
13. *Ляшенко Б. А.* Упрочняющие покрытия дискретной структуры / *Б. А. Ляшенко, А. Я. Мовшович, А. И. Долматов* // Технологические системы. – 2001. – № 4. – С. 17 – 25.
14. *Максименко А. Л.* Багатомасштабне моделювання впливу жорстких вкраплень на спікання / *А. Л. Максименко, А. В. Кузьмов* // Наукові нотатки. Міжвуз. зб. – Вип. 25, част. II. – Луцьк : Изд-во ЛНТУ, 2009. – С. 143 – 146.
15. *Подгайский М. С.* Термическое армирование проката / *М. С. Подгайский* // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1992. – № 10. – С. 20 – 23.
16. *Самарский А. А.* Методы решений точных уравнений / *А. А. Самарский, Е. С. Николаев*. – М. : Наука, 1972. – 592 с.
17. *Скороход В. В.* Реологические основы теории спекания / *В. В. Скороход*. – К. : Наук. думка, 1972. – 152 с.
18. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / *Г. Т. Сулим*. – Львів, 2007. – 716 с.
19. ANSYS release 11.0. Documentation for ANSYS WORKBENCH [Электронный ресурс], 2007.
20. *Barrallier L.* Residual stress analysis in nitrided layers. A comparison between the X-ray diffraction technique and a thin plate deflection method / *L. Barrallier, J. Barralis, J. Frey* // Bull. Cercleetud. metaux. – 1993. – Vol. 16, № 7. – P. 4.1 – 4.12.

21. *Honein T.* On bonded inclusions with circular or straight boundaries in plain elastostatics / *T. Honein, G. Herrmann* // Trans. ASME. Journ. of Applied Mechanics. – 1990. – Vol. 57. – P. 850 – 856.
22. *Olevsky E. A.* On line sintering strength of ceramic composites / *E. A. Olevsky, A. Maximenko, O. Van Der Biest* // Intern. Journ. of Mechanical Sciences. – 2002. – Vol. 44. – P. 756 – 770.
23. *Olevsky E. A.* Theory of sintering: from discrete to continuum / *E. A. Olevsky* // Material Science and Engineering, Reports: A Review Journal, R23. – 1998. – P. 41 – 100.
24. *Rose L. R. F.* An application of the inclusion analogy for banded reinforcements / *L. R. F. Rose* // Intern/ Journ. of Solids and Structures. – 1981. – Vol. 17, № 8. – P. 827 – 838.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,

Днепропетровский национальный
университет им. Олеся Гончара,

Государственное предприятие «Конструкторское
Бюро «Южное» им. академика М. К. Янгеля»,
Днепропетровск

Получено 14.05.14
в окончательном варианте 13.06.14