УДК 629.78

С. В. ТАРАСОВ[1], А. А. ФОКОВ[2]

МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССА СИСТЕМ ВЗАИМНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА И ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКИ

[1]Институт транспортных систем и технологий НАН Украины "Трансмаг"
ул. Писаржевского, 5, г. Днепр, 49000, Украина; e-mail: tsv@westa-inter.com

[2]Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины
ул. Лешко-Попеля, 15, г. Днепр, 49005, Украина; e-mail: oafokov@ukr.net

Рассмотрен класс систем взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки, к которому могут быть отнесены как существующие транспортные системы перемещения полезного груза относительно орбитального корабля при помощи антропоморфного манипулятора (механизма последовательной кинематики), так и перспективные системы высокоточного позиционирования полезной нагрузки с использованием манипуляционного механизма параллельной кинематики. Цель работы состояла в разработке для данного класса систем модельных задач, в которых для анализа исследуемых процессов выделены наиболее существенные элементы, и которые позволяют выявить особенности динамики управляемого движения рассматриваемых систем, произвести выбор и отработку алгоритмов управления их движением. Использование представленных в работе модельных задач дает также возможность исследования колебательных процессов в механизме параллельной кинематики при учете подвижности его основания в инерциальном пространстве и взаимовлияния движения системы в целом и ее относительного движения.

Розглянуто клас систем взаємного позиціонування космічного апарата і корисного навантаження, до якого можуть бути віднесені як існуючі транспортні системи переміщення корисного вантажу відносно орбітального корабля за допомогою антропоморфного маніпулятора (механізму послідовної кінематики), так і перспективні системи високоточного позиціонування корисного навантаження з використанням маніпуляційного механізму паралельної кінематики. Мета роботи полягала в розробці для даного класу систем модельних задач, в яких для аналізу досліджуваних процесів виділені найбільш істотні елементи, і які дозволяють виявити особливості динаміки керованого руху розглянутих систем, зробити вибір і відпрацювання алгоритмів керування їхнім рухом. Використання представлених в роботі модельних задач дає також можливість дослідження коливальних процесів у механізмі паралельної кінематики при врахуванні рухливості його основи в інерціальному просторі і взаємовпливу руху системи в цілому і її відносного руху.

The class of systems for mutual positioning a spacecraft and payload is considered. It can include the existing systems for transportation of a payload relative to an orbital spacecraft using an anthropomorphic manipulator and the advanced systems with a manipulative parallel-kinematics mechanism. The present work deals with the development of model problems for the above class. To attain this, the most significant elements have been specified to analyze the processes under consideration. Those model problems are able to reveal the special features of the dynamics of a controlled motion of the systems under consideration, to select and develop algorithms of the motion control. Studies of oscillation processes in the parallel-kinematics mechanism, taking into account the mobility of its base in the inertial space and the mutual effects of the entire system motion and its relative motion, are carried out based on the presented model problems.

Ключевые слова*: системы взаимного позиционирования, космический аппарат, полезная нагрузка, механизм параллельной кинематики, модельные задачи, исследование динамики.*

Введение. При исследовании динамики роботизированных космических систем [1, 2] выделен класс систем взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки, который имеет характерные особенности динамики их управляемого движения. К особенностям таких систем как объектов управления могут быть отнесены: подвижность основания манипулятора в инерциальном пространстве; малая масса манипуляционного механизма по сравнению с массами космического аппарата и полезной нагрузки; конечная жесткость звеньев и редукторов; как правило, малая мощность двигателей приводов степеней подвижности. К рассматриваемому классу могут быть отнесены как существующие транспортные системы перемещения полезного груза относительно орбитального корабля при помощи антропоморфного манипулятора (механизма последовательной кинематики), так и перспективные системы высокоточного позиционирования полезной нагрузки с использованием манипуляционного механизма параллельной кинематики. Некоторые примеры систем данного класса приведены в [2]. Необходимость качественного анализа специфичных для космических условий применения режимов движения исследуемых систем по результатам математического моделирования без возможности их полного подтверждения натурным экспериментом обуславливает значимость так называемых модельных задач [3]. В модельных задачах выделяются лишь наиболее существенные для анализа исследуемых процессов элементы. Цель работы – представить модельные задачи для рассматриваемого класса систем, которые позволят выявить особенности динамики их управляемого движения, произвести выбор и отработку алгоритмов управления движением систем. Одна из этих задач, построенная на основе системы с механизмом последовательной кинематики, описана ранее [2] и приведена здесь для полноты охвата возможных вариантов исполнения рассматриваемых систем взаимного позиционирования. Вторая задача, построенная для системы с механизмом параллельной кинематики, позволит исследовать колебательные процессы в системе при учете подвижности основания механизма в инерциальном пространстве и взаимовлияние движения системы в целом и ее относительного движения.

Модельная задача для изучения динамики систем позиционирования с манипуляционным механизмом последовательной кинематики. Рассмотрим механическую расчетную схему, изображенную на рис. 1. Система из двух тел, соединенных посредством безмассового двухзвенного механизма C_1GC_2, свободно перемещается в плоскости XOY. Звенья C_1G и GC_2 шарнирно связаны в точке G.

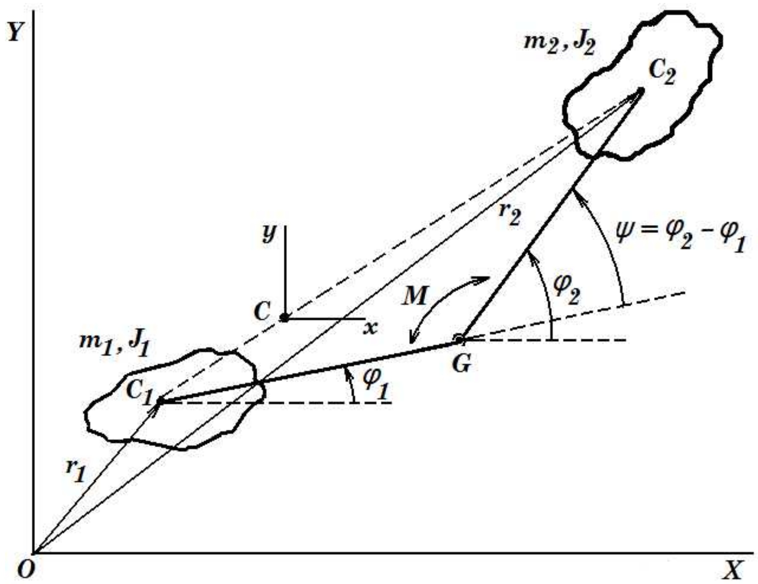

Рис. 1

Предполагается неподвижное закрепление звеньев к телам в точках C_1 и C_2, которые являются центрами масс тел. Шарнир G представляет собой идеальную одностепенную вращательную пару, ось вращения которой перпендикулярна плоскости движения. Угловые положения звеньев C_1G и GC_2 в инерциальной системе координат OXY характеризуются углами φ_1 и φ_2 соответственно, отсчитываемыми относительно оси OX.

На рис. 1 обозначено:

– m_1, m_2 – массы первого и второго тел соответственно;

– J_1, J_2 – моменты инерции первого и второго тел соответственно относительно осей, проходящих через центры масс тел перпендикулярно плоскости движения;

– M – управляющий момент в шарнире (момент, создаваемый приводом степени подвижности);

– r_1, r_2 – радиус-векторы центров масс тел;

– Cxy – система координат, связанная с центром масс системы C, оси которой в начальный момент параллельны соответствующим осям системы OXY.

Обозначим также:

– l_1, l_2 – длины звеньев C_1G и GC_2 соответственно;

– X_i, Y_i – координаты векторов $\bar{r}_i$ в системе OXY;

– x_i, y_i – координаты векторов $\bar{r}_i$ в системе Cxy.

Положительным будем считать момент M, приложенный в направлении увеличения угла $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, т. е. увеличения угла φ_2 и уменьшения угла φ_1.

Уравнения движения рассматриваемой системы описываются дифференциальными уравнениями [4]:

$$m\ddot{X}_C = Q_{X_1}, \quad m\ddot{Y}_C = Q_{Y_1}, \tag{1}$$

$$\ddot{\varphi}_1\left(J_1 + l_1{}^2\tilde{m}\right) + \ddot{\varphi}_2 l_1 l_2 \tilde{m}\cos\psi - \dot{\varphi}_2{}^2 l_1 l_2 \tilde{m}\sin\psi = Q_{\varphi_1} +$$

$$+ l_1\tilde{m}_2\left(Q_{x_1}\sin\varphi_1 - Q_{y_1}\cos\varphi_1\right), \tag{2}$$

$$\ddot{\varphi}_2\left(J_2 + l_2{}^2\tilde{m}\right) + \ddot{\varphi}_1 l_1 l_2 \tilde{m}\cos\psi + \dot{\varphi}_1{}^2 l_1 l_2 \tilde{m}\sin\psi = Q_{\varphi_2} +$$

$$+ l_1\tilde{m}_2\left(Q_{x_1}\sin\varphi_2 - Q_{y_1}\cos\varphi_2\right), \tag{3}$$

где Q_{X_1}, Q_{Y_1}, Q_{φ_1}, Q_{φ_2} – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам X_1, Y_1, φ_1, φ_2; X_C и Y_C – координаты центра масс системы, определяемые равенствами

$$X_C = \tilde{m}_1 X_1 + \tilde{m}_2 X_2, \quad Y_C = \tilde{m}_1 Y_1 + \tilde{m}_2 Y_2,$$

и использованы обозначения

$$m = m_1 + m_2, \quad \tilde{m} = m_1 m_2 / m, \quad \tilde{m}_1 = m_1 / m, \quad \tilde{m}_2 = m_2 / m. \tag{4}$$

При рассмотрении режима движения системы в случае отсутствия приложенных к системе внешних сил, то есть при $Q_{X_1} = 0$ и $Q_{Y_1} = 0$, порядок системы уравнений (1) – (3) может быть понижен. В этом случае система координат Cxy может рассматриваться как инерциальная, что не ограничивает общности рассуждений, и уравнения движения рассматриваемой системы могут быть записаны в виде:

$$x_C = 0\,, \quad y_C = 0\,, \tag{5}$$

$$\ddot{\varphi}_1\left(J_1 + l_1^2\tilde{m}\right) + \ddot{\varphi}_2 l_1 l_2 \tilde{m}\cos\psi - \dot{\varphi}_2^2 l_1 l_2 \tilde{m}\sin\psi = Q_{\varphi_1}\,, \tag{6}$$

$$\ddot{\varphi}_2\left(J_2 + l_2^2\tilde{m}\right) + \ddot{\varphi}_1 l_1 l_2 \tilde{m}\cos\psi + \dot{\varphi}_1^2 l_1 l_2 \tilde{m}\sin\psi = Q_{\varphi_2}\,. \tag{7}$$

Ограничим теперь рассматриваемые режимы движения условием отсутствия также и внешних моментов и наличием в шарнире только управляющего момента M, создаваемого приводом степени подвижности. Тогда, с учетом принятого положительного направления момента, имеем:

$$Q_{\varphi_1} = -M\,, \quad Q_{\varphi_2} = M\,. \tag{8}$$

Заменим пару обобщенных координат φ_1 и φ_2 парой координат φ_1 и ψ. Для соответствующих этим координатам обобщенных сил Q_{φ_1}, Q_ψ равенства (8) эквивалентны следующим [4]:

$$Q_{\varphi_1} = 0\,, \quad Q_\psi = M\,.$$

Тогда система уравнений (6) – (7) может быть преобразована к виду [4]:

$$\dot{\varphi}_1 = P(\psi)\dot{\psi} + LD(\psi)\,, \tag{9}$$

$$\ddot{\psi}\cdot J_{\ddot{\psi}}(\psi) + \dot{\psi}^2 J_{\dot{\psi}}(\psi) + L^2 J_{\mathrm{L}}^{-1}(\psi) = M\,, \tag{10}$$

где L – момент количества движения системы и

$$P = -\tilde{J}^{-1}\cdot(a_2 + b\cos\psi)\,,\ D = \tilde{J}^{-1}\,, \quad \tilde{J} = a_1 + a_2 + 2b\cos\psi\,,$$

$$J_{\ddot{\psi}} = \tilde{J}^{-1}\cdot(a_1 a_2 - b^2\cos^2\psi)\,,\ J_{\dot{\psi}} = \tilde{J}^{-2} b\sin\psi\cdot(a_1 + b\cos\psi)(a_2 + b\cos\psi)\,,$$

$$J_{\mathrm{L}}^{-1} = \tilde{J}^{-2} b\sin\psi\,, \quad a_1 = J_1 + \tilde{m}l_1^2\,, \quad a_2 = J_2 + \tilde{m}l_2^2\,, \quad b = \tilde{m}l_1 l_2\,.$$

Данная модельная задача представлена плоской механической расчетной схемой, изображенной на рис. 1, и моделями движения: для случая учета внешних силовых воздействий, в том числе управляющих, системой уравнений (1) – (3); для случая отсутствии внешних силовых воздействий – системой уравнений (5), (9), (10). Применение этой модельной задачи для рассматриваемого класса систем позволяет выявить особенности динамики их управляемого движения. В частности, обратим внимание на особенность уравнения (10), состоящую в наличии слагаемого $L^2 J_{\mathrm{L}}^{-1}(\psi)$, что обусловливает при $L \neq 0$ и ненулевых начальных условиях колебания по внутренней степени свободы при отсутствии управляющего момента. В [2] с использованием данной расчетной схемы и уравнений (9) – (10) решена задача синтеза управления относительным движением ориентируемого тела (второе тело) и несущего тела (первое тело), обеспечивающего перевод ориентируемого тела в требуемое положение.

Модельная задача для исследования динамики системы взаимного позиционирования, содержащей манипуляционный механизм параллельной структуры. В работе [5] рассматриваются манипуляционные механизмы параллельной кинематики, предназначенные для перспективных космических телескопов, в которых антенна перемещается относительно космического аппарата. При этом предполагается, что отличительные свойства механизмов параллельной кинематики [6] позволят обеспечить требуемую высокую точность позиционирования антенны и решить проблему гашения взаимных колебаний элементов системы. Одним из недостатков механизмов параллельной кинематики является взаимовлияние приводов, которое проявляется при исследовании колебательных процессов. Колебания по одной координате вызывают изменение колебаний по другим координатам, что имеет место в нелинейных колебательных системах. При этом нелинейность определяется структурой и геометрией механизма. В [5] для исследования колебательных процессов рассматривается простейший плоский механизм параллельной кинематики с двумя степенями свободы. Вся масса механизма предполагается сосредоточенной в центре масс выходного звена, который расположен на оси вращательной кинематической пары, сопрягающей штоки линейных приводов. Такая постановка модельной задачи позволила получить относительно простые соотношения для описания движения рассматриваемой механической схемы и соответственно для исследования колебательных процессов. Недостаток этой модельной задачи заключается в том, что она по существу направлена на изучение колебательных процессов в самом нагруженном механизме, а не в системе, содержащей параллельный механизм на подвижном основании. В связи с этим рассмотрим более общую по сравнению с [5] постановку задачи. При этом предварительно получим уравнения движения, соответствующие схеме [5], с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Расчетная схема исследуемого в [5] простейшего механизма приведена на рис. 2.

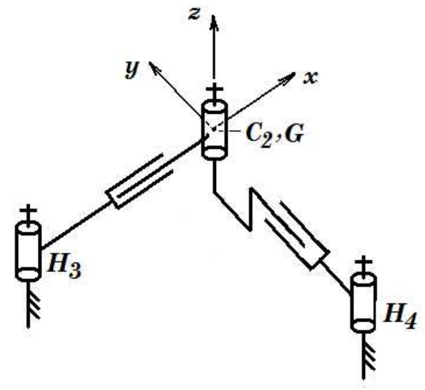

Рис. 2

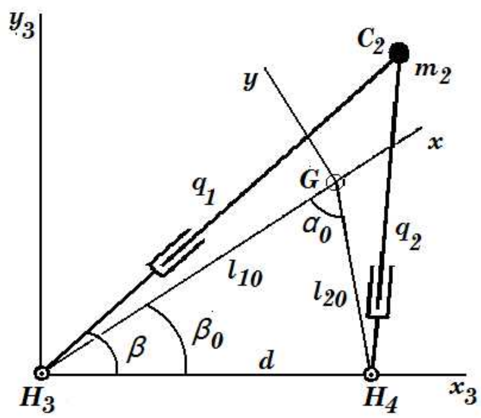

Рис. 3

На рисунке обозначено: H_3 и H_4 – неподвижные основания кинематических цепей; $Gxyz$ – неподвижная правая система координат, начало которой G находится в невозмущенном равновесном положении центра масс C_2 выходного звена, направление оси Gx совпадает с направлением равновесного положения H_3G цепи H_3C_2, ось Gz перпендикулярна плоскости подвижности механизма.

Уравнения, описывающие свободные колебания простейшего механизма [5], имеют вид:

$$\begin{cases} m_2\ddot{x} = -\Delta l_1 \cdot c_1 \cdot \cos\beta_1 - \Delta l_2 \cdot c_2 \cdot \cos\beta_2 \\ m_2\ddot{y} = -\Delta l_1 \cdot c_1 \cdot \sin\beta_1 - \Delta l_2 \cdot c_2 \cdot \sin\beta_2 \end{cases}, \tag{11}$$

$$\Delta l_i = (l_i - l_{i0}), \quad l_i = \sqrt{(x - x_{H_{i+2}})^2 + (y - y_{H_{i+2}})^2},$$

$$\cos\beta_i = (x - x_{H_{i+2}})/l_i, \quad \sin\beta_i = (y - y_{H_{i+2}})/l_i, \quad i = 1,2,$$

где m_2 – масса выходного звена; c_i – жесткости приводов; l_i – длины кинематических цепей; l_{i0} – длины цепей в равновесном состоянии до начала колебаний; x, y – координаты центра выходного звена; $x_{H_{i+2}}, y_{H_{i+2}}$ – координаты неподвижных точек H_{i+2}, $i = 1,2$. В данных уравнениях присутствуют восстанавливающие силы, пропорциональные ходам штоков соответствующих линейных приводов.

Получим уравнения, описывающие свободные колебания рассматриваемой системы, с помощью уравнений Лагранжа. Введем обобщенные координаты $q_s = l_s$, $s = 1,2$. Введем систему координат $H_3x_3y_3$ (см. рис. 3), начало которой расположено в неподвижной точке H_3, а ось H_3x_3 проходит через неподвижную точку H_4. Кроме ранее введенных, на рисунке также используются обозначения: d – расстояние между точками H_3 и H_4; β_o, β – углы начального и текущего углового положений кинематической цепи H_3C_2; α_0 – угол между кинематическими цепями в их равновесном положении.

Выразим декартовы координаты x_{3C_2}, y_{3C_2} выходного звена в системе $H_3x_3y_3$ через обобщенные координаты

$$x_{3C_2} = q_1 \cdot \cos\beta = ({q_1}^2 + d^2 - {q_2}^2)/(2d), \quad y_{3C_2} = \sqrt{{q_1}^2 - x_{3C_2}^2}. \tag{12}$$

В рассматриваемом случае в выражения декартовых координат через обобщенные время явно не входит, тогда выражение для кинетической энергии системы имеет вид [7]

$$K = \frac{1}{2} m_2 (A_{11}{\dot{q}_1}^2 + A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 + A_{22}{\dot{q}_2}^2),$$

где

$$A_{sk} = A_{ks} = \frac{\partial x_{3C_2}}{\partial q_s}\frac{\partial x_{3C_2}}{\partial q_k} + \frac{\partial y_{3C_2}}{\partial q_s}\frac{\partial y_{3C_2}}{\partial q_k}, \quad s,k = 1,2. \tag{13}$$

В соответствии с [7] операторы Эйлера $\mathrm{E}_s(\cdot)=\frac{d}{dt}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial(\cdot)}{\partial q_s}$, $s=1{,}2$, над функцией кинетической энергии K имеют вид

$$\mathrm{E}_s(K)=m_2\left(\sum_{k=1}^{2}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{ki}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k\dot{q}_i+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right). \quad (14)$$

С учетом выражения для потенциальной энергии системы

$$\Pi=\frac{1}{2}c_1(q_1-l_{10})^2+\frac{1}{2}c_2(q_2-l_{20})^2$$

уравнения Лагранжа для независимых координат q_1, q_2 могут быть представлены в виде системы уравнений

$$\begin{cases} m_2\left(A_{11}\ddot{q}_1+A_{12}\ddot{q}_2+\dot{q}^T B_1\dot{q}\right)+c_1(q_1-l_{10})=Q_1,\\ m_2\left(A_{21}\ddot{q}_1+A_{22}\ddot{q}_2+\dot{q}^T B_2\dot{q}\right)+c_2(q_2-l_{20})=Q_2,\end{cases} \quad (15)$$

где Q_1, Q_2 – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_1 и q_2; $\dot{q}=(\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2)^T$ – вектор-столбец обобщенных скоростей; символ "^{T}" – символ транспонирования; B_1, B_2 – симметрические матрицы, определяемые соотношениями:

$$B_1=\left[\begin{array}{c|c}\frac{1}{2}\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}\\ \hline * & \frac{\partial A_{12}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{22}}{\partial q_1}\end{array}\right],\quad B_2=\left[\begin{array}{c|c}\frac{\partial A_{21}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial A_{22}}{\partial q_1}\\ \hline * & \frac{1}{2}\frac{\partial A_{22}}{\partial q_2}\end{array}\right].$$

Здесь и далее символ "$*$" обозначает соответствующие симметричные элементы матриц.

Численно интегрируя систему (15) при отсутствии обобщенных сил, получим зависимости обобщенных координат q_1, q_2 от времени для случая свободных колебаний системы. Для анализа результатов интегрирования в декартовых координатах x_{3C_2}, y_{3C_2} следует воспользоваться соотношениями (12), а в декартовых координатах x, y – следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A_O\begin{bmatrix}(x_{3C_2}-x_{3G})\\ (y_{3C_2}-y_{3G})\end{bmatrix},\quad A_O=\begin{bmatrix}\cos\beta_O & \sin\beta_O\\ -\sin\beta_O & \cos\beta_O\end{bmatrix},$$

$$x_{3G}=l_{10}\cdot\cos\beta_O,\quad y_{3G}=l_{10}\cdot\sin\beta_O,\quad \beta_O=\arccos[(l_{10}^2+d^2-l_{20}^2)/(2d\cdot l_{10})].$$

На рис. 4, 5 приведены результаты интегрирования систем уравнений (11) и (15) при нулевых обобщенных силах для значений параметров $m_2=1\text{кг}$, $c_1=c_2=100\,\text{Н/м}$, $l_{10}=l_{20}=1\text{м}$. Начальное отклонение центра масс C_2 выходного звена от его равновесного положения G принято равным $0{,}1\text{м}$ по оси x. Приведенные значения параметров взяты из [5]. На рисунках значения координат x, y точки C_2, отмеченные маркерами, отвечают модели (11). Рис. 4 соответствует равновесной конфигурации системы с углом $\alpha_o = 45^o$ ($\beta_o = 67{,}5^o$), рис. 5 – конфигурации с углом $\alpha_o = 135^o$ ($\beta_o = 22{,}5^o$).

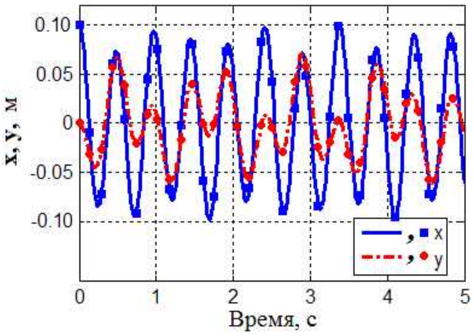

Рис. 4

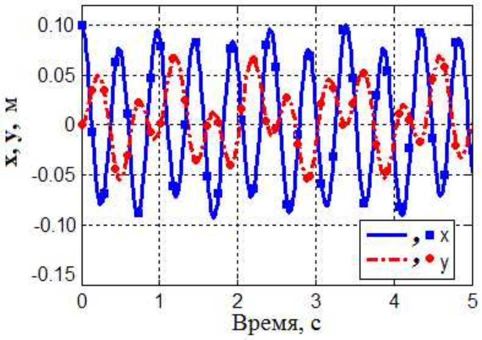

Рис. 5

Результаты интегрирования для обеих моделей совпадают и подчеркивают простоту модели (11).

Рассмотрим более общий случай, представленный на рис. 6, когда основания H_3 и H_4 кинематических цепей H_3C_2 и H_4C_2 закреплены на подвижном основании (космическом аппарате).

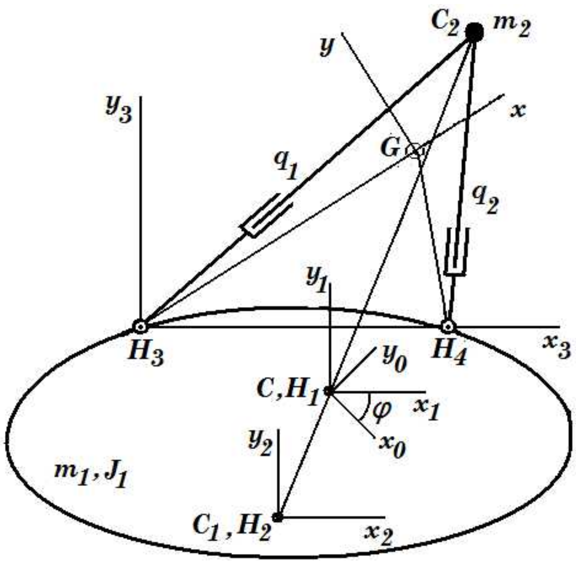

Рис. 6

Для простоты последующих соотношений без ограничения общности будем считать, что ось x_3 системы координат $H_3x_3y_3$, проходящая через точку H_4, параллельна оси x_2 системы координат $H_2x_2y_2$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции основания, а начало H_2 находится в центре масс C_1 космического аппарата. Предполагая отсутствие внешних сил, поместим начало инерциальной системы координат Cx_0y_0 в точку C центра масс системы. Введем также систему координат $H_1x_1y_1$ с началом в C, оси которой параллельны осям системы $H_2x_2y_2$. Угловое положение рассматриваемой механической системы будем характеризовать углом φ поворота системы координат $H_1x_1y_1$ относительно инерциальной Cx_0y_0. Обозначим массу основания (тело 1) и выходного звена (тело 2), как и ранее, соответственно m_1 и m_2. Остальные обозначения на рисунке соответствуют обозначениям рисунка 3. В частности, $Gxyz$ – неподвижная относительно основания система координат. Оставим также в силе обозначения для величин $\tilde{m}$, $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$, введенные соотношениями (4).

Относительное движение системы описывается введенными ранее обобщенными координатами q_1, q_2. Положение системы в инерциальном пространстве характеризуется обобщенной координатой $q_3 = \varphi$. Отсутствие внешних сил, а также конфигурация системы позволяют считать справедливыми следующие соотношения

$$\mathrm{r}_{CC_2} = -(m_1 / m_2)\cdot \mathrm{r}_{CC_1}, \quad \mathrm{r}_{CC_2} = \mathrm{r}_{CC_1} + \mathrm{r}_{C_1H_3} + \mathrm{r}_{H_3C_2}, \tag{16}$$

где r – векторы, соединяющие точки, наименования которых приведены в нижних индексах. Пронумеруем системы координат. Введем в рассмотрение векторы-столбцы $R^{(i)}$, соответствующие координатам векторов r в i-той системе координат $H_ix_iy_i$:

$$R^{(3)}_{H_3C_2} = \begin{bmatrix} x_{3C_2} \\ y_{3C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_1^2 + d^2 - q_2^2)/(2d) \\ \sqrt{q_1^2 - (x_{3C_2})^2} \end{bmatrix},$$

$$R^{(2)}_{C_1H_3} = \begin{bmatrix} x_{2H_3} \\ y_{2H_3} \end{bmatrix}, \; R^{(1)}_{CC_1} = \begin{bmatrix} x_{1C_1} \\ y_{1C_1} \end{bmatrix}, \; R^{(1)}_{CC_2} = \begin{bmatrix} x_{1C_2} \\ y_{1C_2} \end{bmatrix}.$$

Тогда в соответствии с (16) и учитывая параллельность осей введенных систем координат можно записать

$$x_{1C_1} = -(m_2 / m_1)\cdot x_{1C_2}, \; y_{1C_1} = -(m_2 / m_1)\cdot y_{1C_2}, \tag{17}$$

$$x_{1C_2} = \tilde{m}_1(x_{2H_3} + x_{3C_2}), \; y_{1C_2} = \tilde{m}_1(y_{2H_3} + y_{3C_2}), \tag{18}$$

$$x_{1C_1} = -\tilde{m}_2(x_{2H_3} + x_{3C_2}), \; y_{1C_1} = -\tilde{m}_2(y_{2H_3} + y_{3C_2}). \tag{19}$$

Отметим, что величины x_{2H_3} и y_{2H_3} являются константами. Момент инерции J рассматриваемой системы относительно ее центра масс имеет вид

$$J = J_1 + m_1\cdot(x_{1C_1}^2 + y_{1C_1}^2) + m_2\cdot(x_{1C_2}^2 + y_{1C_2}^2),$$

где J_1 – момент инерции основания (тела 1) относительно его центра масс.

Кинетическая энергия K_Σ рассматриваемой системы при относительном движении согласно [7] имеет вид

$$K_\Sigma = K_0 + K_1 + K_2,$$

где K_0 – кинетическая энергия переносного движения, не зависящая от обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$; K_1 – линейная относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ часть выражения кинетической энергии; K_2 – кинетическая энергия относительного движения, однородная квадратичная форма обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$.

Уравнения Лагранжа для данной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_\Sigma}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial K_\Sigma}{\partial q_s}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}=Q_s, \quad s=1,2,3. \tag{20}$$

В рассматриваемом случае в силу выбора инерциальной системы координат и отсутствия внешних сил кинетическая энергия переносного движения имеет вид

$$K_0=\frac{1}{2}J\cdot\dot{\varphi}^2, \quad J=J(q_1,q_2).$$

Соотношения для составляющей K_0 кинетической энергии могут быть записаны в виде квадратичной формы обобщенных скоростей

$$K_0=\frac{1}{2}\tilde{m}\dot{q}^{\mathrm{T}}\cdot\Lambda_0\,\dot{q}, \quad \Lambda_0=\mathrm{diag}\big(0,0,J/\tilde{m}\big).$$

Тогда операторы Эйлера над составляющей K_0 кинетической энергии:

$$\mathrm{E}_s(K_0)=\tilde{m}\cdot\dot{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}_{0s}\dot{q}, \quad s=1,2; \quad \mathrm{E}_3(K_0)=\tilde{m}\cdot(\dot{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}_{03}\dot{q}+(J/\tilde{m})\cdot\ddot{\varphi}),$$

где $q=(q_1\ q_2\ q_3)^T$, $\dot{q}=(\dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dot{q}_3)^T$ и матрицы N_{0s} ($s=1,2,3$) определяются соотношениями:

$$\mathrm{N}_{0s}=\mathrm{diag}\big(0,0,-n_{0s}\big), \quad n_{0s}=\frac{1}{2\tilde{m}}\cdot\frac{\partial J}{\partial q_s}, \quad s=1,2; \quad \mathrm{N}_{03}=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & n_{01} \\ \hdashline * & 0 & n_{02} \\ \hdashline * & * & 0 \end{array}\right].$$

Линейная относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ часть K_1 выражения кинетической энергии имеет вид [7]:

$$K_1=k_1\cdot\dot{q}_1+k_2\cdot\dot{q}_2,$$

$$k_s=\dot{\varphi}\cdot\left[\left(m_1\mathrm{r}_{CC_1}\times\frac{\partial \mathrm{r}_{CC_1}}{\partial q_s}\right)_z+\left(m_2\mathrm{r}_{CC_2}\times\frac{\partial \mathrm{r}_{CC_2}}{\partial q_s}\right)_z\right], \quad s=1,2.$$

Нижний индекс z в данном соотношении обозначает проекцию вектора векторного произведения на ось, перпендикулярную плоскости рассматриваемой системы.

Соотношения для составляющей K_1 кинетической энергии с учетом соотношений (17) – (19) могут быть записаны в следующего вида квадратичной форме обобщенных скоростей

$$K_1=\frac{1}{2}\tilde{m}\dot{q}^{\mathrm{T}}\cdot\Lambda_1\,\dot{q}, \quad \Lambda_1=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & (\Lambda_1)_{13} \\ \hdashline * & 0 & (\Lambda_1)_{23} \\ \hdashline * & * & 0 \end{array}\right],$$

$$(\Lambda_1)_{s3} = (\Lambda_1)_{3s} = \left(x_{2C_2} \cdot (\partial y_{3C_2} / \partial q_s) - y_{2C_2} \cdot (\partial x_{3C_2} / \partial q_s)\right), \quad s = 1,2 .$$

$$x_{2C_2} = x_{2H_3} + x_{3C_2}, \quad y_{2C_2} = y_{2H_3} + y_{3C_2} .$$

Тогда операторы Эйлера над составляющей K_1 кинетической энергии:

$$\mathrm{E}_s(K_1) = \tilde{m} \cdot (\dot{q}^{\mathrm{T}} N_{1s} \dot{q} + (\Lambda_1)_{s3} \dddot{\ }), \quad s = 1,2 ,$$

$$\mathrm{E}_3(K_1) = \tilde{m} \cdot (\dot{q}^{\mathrm{T}} N_{13} \dot{q} + (\Lambda_1)_{31} \cdot \ddot{q}_1 + (\Lambda_1)_{32} \cdot \ddot{q}_2),$$

где матрицы N_{1s} ($s = 1,2,3$):

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \dfrac{n_{11}}{2} \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{n_{12}}{2} \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{13} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\Lambda_1)_{13}}{\partial q_1} & \dfrac{n_{13}}{2} & 0 \\ * & \dfrac{\partial(\Lambda_1)_{23}}{\partial q_2} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$n_{11} = \left(\frac{\partial(\Lambda_1)_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial(\Lambda_1)_{23}}{\partial q_1}\right), \quad n_{12} = -n_{11}, \quad n_{13} = \left(\frac{\partial(\Lambda_1)_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial(\Lambda_1)_{23}}{\partial q_1}\right).$$

Кинетическая энергия K_2 относительного движения имеет вид :

$$K_2 = \frac{1}{2}\left((\Lambda_2)_{11} \cdot \dot{q}_1^{\,2} + (\Lambda_2)_{12} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (\Lambda_2)_{21} \cdot \dot{q}_2 \dot{q}_1 + (\Lambda_2)_{22} \cdot \dot{q}_2^{\,2}\right),$$

где

$$(\Lambda_2)_{sk} = \sum_{i=1}^{2} \left(m_i \frac{\partial x_{3C_i}}{\partial q_s} \frac{\partial x_{3C_i}}{\partial q_k} + m_i \frac{\partial y_{3C_i}}{\partial q_s} \frac{\partial y_{3C_i}}{\partial q_k} \right), \quad s,k = 1,2 ,$$

и с учетом (17) – (19) имеет место соотношение

$$(\Lambda_2)_{sk} = \tilde{m} \cdot A_{sk}, \quad s,k = 1,2 ,$$

где A_{sk} определены соотношениями (13).

Тогда для оператора Эйлера над функцией K_2 справедливо

$$\mathrm{E}_s(K_2) = \tilde{m} \cdot \mathrm{E}_s(K), \quad s = 1,2 ,$$

где $\mathrm{E}_s(K)$ заданы соотношениями (14) и, с учетом того, что $\mathrm{E}_3(K_2) = 0$, можно записать:

$$\mathrm{E}_s(K_2) = \tilde{m} \cdot (\dot{q}^{\mathrm{T}} N_{2s} \dot{q} + A_{s1} \ddot{q}_1 + A_{s2} \ddot{q}_2), \quad s = 1,2 , \quad \mathrm{E}_3(K_2) = \tilde{m} \dot{q}^{\mathrm{T}} N_{23} \dot{q} ,$$

где матрицы N_{2s} ($s = 1,2,3$):

$$N_{2s} = \begin{bmatrix} B_s & O_{2\times 1} \\ O_{1\times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad s = 1,2 , \quad N_{23} = O_{3\times 3} ,$$

и O – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Учитывая, что

$$\mathrm{E}_s(K_\Sigma) = \mathrm{E}_s(K_2) + \mathrm{E}_s(K_1) + \mathrm{E}_s(K_0), \quad s = 1,2,3,$$

и используя обозначения $A_{33} = J/\tilde{m}$, $A_{13} = A_{31} = (\Lambda_1)_{13} = (\Lambda_1)_{31}$ и $A_{23} = A_{32} = (\Lambda_1)_{23} = (\Lambda_1)_{32}$, операторы Эйлера над кинетической энергией K_Σ могут быть представлены в виде

$$\mathrm{E}_s(K_\Sigma) = \tilde{m} \cdot \left(A_{s1}\ddot{q}_1 + A_{s2}\ddot{q}_2 + A_{s3}\ddot{\varphi} + \dot{q}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{B}}_s\dot{q}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_s = (\mathbf{N}_{0s} + \mathbf{N}_{1s} + \mathbf{N}_{2s}), \quad s = 1,2,3.$$

Тогда в соответствии с уравнениями Лагранжа (20) можно записать уравнения движения рассматриваемой системы в виде:

$$\begin{cases} \tilde{m} \cdot \left(A_{11}\ddot{q}_1 + A_{12}\ddot{q}_2 + A_{13}\ddot{\varphi} + \dot{q}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{B}}_1\dot{q}\right) + c_1(q_1 - l_{10}) = Q_1, \\ \tilde{m} \cdot \left(A_{21}\ddot{q}_1 + A_{22}\ddot{q}_2 + A_{23}\ddot{\varphi} + \dot{q}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{B}}_2\dot{q}\right) + c_2(q_2 - l_{20}) = Q_2, \\ \tilde{m} \cdot \left(A_{31}\ddot{q}_1 + A_{32}\ddot{q}_2 + A_{33}\ddot{\varphi} + \dot{q}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{B}}_3\dot{q}\right) = Q_3, \end{cases} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Для уравнений свободных колебаний рассматриваемой системы следует в (21) положить $Q_s = 0$, $s = 1,2,3$. При $m_1 \to \infty$ и нулевой начальной скорости углового вращения системы, что соответствует случаю неподвижного основания, $\tilde{m} \to m_2$ и при $Q_3 = 0$ система уравнений (21) фактически вырождается в систему (15). Но наибольший интерес вызывает случай соизмеримых значений масс тел системы. На рис. 7 и рис. 8 приведены результаты интегрирования системы (21) при $m_1 = 1000$ кг и $m_2 = 500$ кг. В обоих случаях рассматривается конфигурация системы, определяемая углом $\alpha_o = 45^o$ (см. рис. 3). На рис. 7 представлены колебания системы, вызванные начальным отклонением по оси x центра масс C_2 тела 2 от его равновесного положения G при начальной нулевой угловой скорости вращения системы. Отклонение принято равным $0{,}05$ м. Значения остальных параметров соответствуют ранее принятым. На рис. 8 представлены колебания системы, вызванные наличием угловой скорости вращения системы вокруг ее центра масс, равной $3^o/$с.

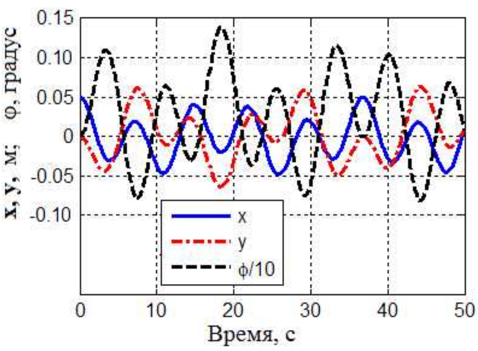

Рис. 7

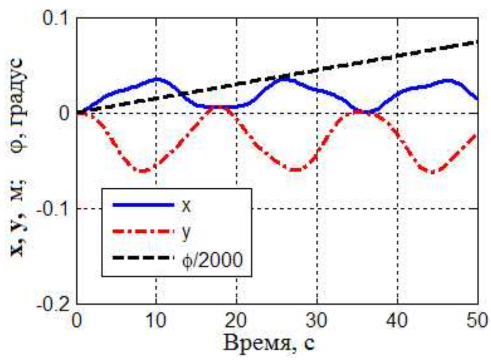

Рис. 8

Приведенная постановка модельной задачи в отличие от постановки задачи [5] позволяет изучение колебательных процессов в системах взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки, которые содержат механизм параллельной структуры, при учете подвижности в инерциальном пространстве основания механизма, а также дает возможность исследовать взаимовлияние движения системы в целом и ее относительного движения.

Выводы. Рассмотрен класс систем взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки, к которому могут быть отнесены как существующие транспортные системы перемещения полезного груза относительно орбитального корабля при помощи антропоморфного манипулятора (механизма последовательной кинематики), так и перспективные системы высокоточного позиционирования полезной нагрузки с использованием манипуляционного механизма параллельной кинематики. Для данного класса систем разработаны модельные задачи, в которых для анализа исследуемых процессов выделены наиболее существенные элементы. Это позволяет выявить особенности динамики управляемого движения рассматриваемых систем и исследовать колебательные процессы в механизме параллельной кинематики при учете подвижности его основания в инерциальном пространстве и взаимовлияние движения системы в целом и ее относительного движения. Представленные модельные задачи могут быть также использованы для выбора и отработки алгоритмов управления движением систем взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки.

1. *Алпатов А. П., Белоножко П. А., Белоножко П. П., Кузьмина Л. К., Тарасов С. В., Фоков А. А.* Перспективы использования и особенности исследования динамики космических манипуляторов с упругими конструктивными элементами. Техническая механика. 2012. № 1. С. 82 – 93.
2. *Артеменко Ю. Н., Белоножко П. П., Карпенко А. П., Фоков А. А.* Исследование особенностей наведения массивной полезной нагрузки при помощи космического манипулятора с учетом подвижности основания в режиме отсутствия внешних сил. Наука и Образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 682 – 704.
3. *Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Закржевский А. Е., Пироженко А. В., Трогер Г., Хорошилов В. С.* Ротационное движение космических тросовых систем. Днепропетровск: Институт технической механики НАН и НКА Украины, 2001. 404 с.
4. *Артеменко Ю. Н., Белоножко П. П., Карпенко А. П., Саяпин С. Н., Фоков А. А.* Использование механизмов параллельной структуры для взаимного позиционирования полезной нагрузки и космического аппарата. Труды 7-го международного симпозиума «Экстремальная робототехника – робототехника для работы в условиях опасной окружающей среды». Санкт-Петербург: Изд-во «Политехника-сервис», 2013. С. 271 – 284.
5 *Демидов С. М.* Разработка и анализ механизмов параллельной структуры, предназначенных для манипулирования антеннами космических телескопов. Вестник научно-технического развития. 2013. № 4(68). С. 3 – 7.
6 *Merlet J.-P.* Parallel Robots. Dordrecht. The Netherlands: Springer, 2006. 394 с.
7 *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Получено 12.05.2017,
в окончательном варианте 23.06.2017