УДК 519.25:681.5 https://doi.org/10.15407/itm2022.02.025

О. П. САРИЧЕВ

ВИЗНАЧЕННЯ ЗМІН ХАРАКТЕРУ РУХУ ОБ'ЄКТІВ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ ЗА АВТОРЕГРЕСІЙНИМИ МОДЕЛЯМИ В УМОВАХ НЕРІВНОВІДДАЛЕНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, Дніпро, Україна,49005; e-mail: alexsar2021@gmail.com

Проблема підвищення точності прогнозування та виявлення змін характеру руху об'єктів ракетно-космічної техніки (РКТ) є актуальною для завдань визначення часу їх існування, каталогізації космічного сміття, навігації. Тому задача виявлення змін у динамічних системах, що характеризуються нерівновіддаленими спостереженнями, актуальна. Мета роботи – розробка авторегресійних моделей з нерівновіддаленими за часом спостереженнями для виявлення змін характеру руху об'єктів РКТ.

Методи досліджень – багатовимірний статистичний аналіз та прогнозування часових рядів, моделювання складних систем в умовах структурної невизначеності. Як вихідні спостереження для опису руху об'єктів РКТ використано дані, що формуються службою NORAD (США). Вони актуальні, постійно оновляються та вільно поширюються для використання в Інтернеті. Ці дані подаються у форматі TLE (Two-Line Element – формат даних, що кодує список елементів орбіти об'єкта, який знаходиться на орбіті Землі, для заданого часу). Запропоновано метод побудови авторегресійних моделей для опису динаміки об'єктів РКТ, що представлені часовими рядами TLE-елементів з нерівновіддаленими за часом значеннями. На його основі побудовано авторегресійні моделі динаміки космічного апарата «Січ-2». Проведено аналіз середньоквадратичних помилок моделей на екзаменаційних вибірках, знайдено значні відхилення середньоквадратичних помилок для основних змінних (апогею, перигею, ексцентриситету, довготи висхідного вузла, аргументу перигею, середньої аномалії), тим самим виявлено зміни руху космічного апарата «Січ-2» від основного режиму.

Новизна – раніше завдання виявлення зміни характеристик руху об'єктів РКТ на основі запропонованого виду авторегресійних моделей не розглядалося. Практична цінність – моделювання руху космічного апарата «Січ-2» за тимчасовими рядами TLE-елементів дозволяє виявити зміни режимів; метод може бути використаний для виявлення змін властивостей об'єктів РКТ у процесі їх експлуатації.

Ключові слова: *часові ряди TLE-елементів, нерівновіддалені спостереження, авторегресійні моделі, космічний апарат «Січ-2».*

The problem of increasing prediction accuracy for the motion of Earth-orbiting objects (EOOs) and detecting changes therein is topical for the tasks of spacecraft life prediction, space debris cataloguing, and navigation. Therefore, the problem of detecting changes in dynamic systems characterized by non-equidistant observations is topical. The purpose of this work is the development of autoregressive models with observations non-equidistant in time to detect changes in EOO motion.

The methods employed are multivariate statistical analysis, time series prediction, and complex-system simulation under structural uncertainty. Data generated by NORAD (USA) were used as initial observations to describe EOO motion. They are actual, constantly updated, and freely available via the Internet. These data are presented in the Two-Line Element (TLE) format, which is a data format encoding a list of orbital elements of an EOO for a given point in time. This paper presents a method for constructing autoregressive models to describe the dynamics of EOOs represented by time series of TLE elements with values non-equidistant in time. On its basis, autoregressive models of the Sich-2 spacecraft's dynamics were constructed. The standard errors of the models were analysed on examination samples, and significant deviations of the standard errors for the basic variables (apogee, perigee, eccentricity, longitude of ascending node, perigee argument, and average anomaly) were found, thus demonstrating changes in the Sich-2 motion from its basic regime.

The novelty of this work lies in that the problem of detecting changes in EOO motion characteristics based on the proposed type of autoregressive models has not been considered before. Its practical value lies in that the simulation of the Sich-2 motion using time series of TLE elements allows one to detect changes in motion regimes; the method may be used in detecting in-service changes in EOO properties.

Keywords: *time series of TLE elements, non-equidistant observations, autoregressive models, Sich*-2 spacecraft.

Вступ. Проблема підвищення точності прогнозування та виявлення змін характеру руху супутників є актуальною для завдань визначення часу їх існування, каталогізації космічного сміття, навігації [1] – [4]. У сучасній теорії виявлення зміни сигналів різної фізичної природи в умовах дії шумів розглядаються алгоритми максимуму правдоподібності, послідовного аналізу, робастні та деякі інші у стохастичних динамічних системах [5] – [13]. Успішно вирішуються завдання виявлення стрибкоподібних змін середнього значення сигналу, виявлення різких змін у динамічних системах у разі моделювання часових рядів з рівновіддаленими спостереженнями [5] – [8].

Прикладом виявлення зміни властивостей динамічних систем на основі авторегресійних рівнянь є роботи [12], [13]. В [14] запропоновано підхід до побудови математичних моделей контролю технічного стану силових та енергетичних установок при тривалій експлуатації. У разі часових рядів з нерівновіддаленими спостереженнями зазвичай намагаються перейти до рівномірної сітки на основі різних процедур локальної апроксимації на ковзному інтервалі. На цьому шляху виникає завдання вибору виду та оптимального порядку полінома, що згладжує; фактично одне завдання замінюється іншим. Тому задача виявлення змін у динамічних системах, що характеризуються нерівновіддаленими спостереженнями, є актуальною.

Ця робота є продовженням досліджень, присвячених підвищенню ефективності функціонування об’єктів ракетно-космічної техніки (РКТ) на основі статистичних методів моделювання [15]–[21]. Своєчасне виявлення зміни характеристик об’єктів РКТ у ході їх тривалої експлуатації є актуальним. Єдиним відкритим джерелом вихідних орбітальних даних для вирішення цього завдання є дворядні елементи [22] з нерегулярними часовими інтервалами між спостереженнями.

Мета роботи – розробка авторегресійних моделей з нерівновіддаленими у часі спостереженнями для виявлення змін характеру руху об’єктів РКТ.

Новизна роботи – раніше завдання виявлення зміни характеристик руху об’єктів РКТ на основі запропонованого виду авторегресійних моделей не розглядалося. Практичне значення роботи – виявлення зміни руху космічного апарата (КА) «Січ-2» на основі розроблених моделей.

Актуальні дані опису руху об’єктів ракетно-космічної техніки. Як вихідні спостереження для опису руху об’єктів використовуємо дані, що формуються службою NORAD (США), які подаються у форматі TLE (Two-Line Element) [22]. TLE – дворядковий формат даних, набір елементів орбіти для супутника Землі. Перевага цих даних – безкоштовний доступ, регулярне оновлення, достатньо даних для статистичного моделювання. Особливість: часові ряди TLE-елементів характеризуються значеннями, що нерівно віддаляються в часі; значення параметрів орбіти, що містяться в TLE-файлах, обчислюються за допомогою опосередкування в рамках специфічних моделей SGP4 або SDP4 [22] і не є Кеплеровими елементами оскулюючої орбіти. Приклад TLE-елемента для КА «Січ-2» (97-й день у 2022 році) [23]:

1 37794U 11044G 22097.86934719 .00000480 00000-0 10422-3 0 9991
2 37794 97,8482 137,2015 0012321 349,7557 184,6317 14,62096825567605

Розшифровку цих двох рядків наведено у табл. 1.

Табл. 1. Приклад-розшифровка TLE-елемента для "Січ-2" (7.04.2022 р.)

Рядок 1		
Поло- ження	Зміст	Приклад
01-01	Номер рядка	1
03-07	Номер супутника у базі даних NORAD	37794
08-08	Класифікація (U=Unclassified – без класифікації)	U
10-11	Міжнародне позначення (останні дві цифри року	11
12-14	Міжнародне позначення (номер запуску на рік)	044
15-17	Міжнародне позначення (частина запуску)	G
19-20	Рік епохи (останні дві цифри)	22
21-32	Час епохи (ціла частина – номер дня на рік, дробо-	097.86934719
34-43	Перша похідна від середнього руху (прискорення),	.00000480
45-52	Друга похідна від середнього руху, поділена на	00000-0
54-61	Коефіцієнт гальмування (число починається з де-	10422-3
63-63	Спочатку типи ефемерид, зараз – число 0	0
65-68	Номер (версія) елемента	999
69-69	Контрольна сума за модулем 10	1
Рядок 2		
01-01	Номер рядка	2
03-07	Номер супутника у базі даних NORAD	37794
09-16	Нахилення у градусах	97,8482
18-25	Довгота висхідного вузла у градусах	137,2015
27-33	Ексцентриситет (число починається з десяткового	0012321
35-42	Аргумент перицентру у градусах	349,7557
44-51	Середня аномалія у градусах	184,6317
53-63	Частота обернення (обертів на день)	14,62096825
64-68	Номер витка на момент епохи	56760
69-69	Контрольна сума за модулем 10	5
Всі інші стовпці пусті або фіксовані		

Апріорні припущення про динамічний об’єкт, представлений часовими рядами TLE-елементів. Нехай функціонування динамічного об’єкта підпорядковується закону у вигляді авторегресійної моделі

$$\overset{*}{x}_i = \left(\overset{*}{x}_{i-1}, \overset{*}{x}_{i-2}, ..., \overset{*}{x}_{i-p}\right)\left(\overset{o}{\theta}_{1i}, \overset{o}{\theta}_{2i}, ..., \overset{o}{\theta}_{pi}\right)^{\mathrm{T}} + \zeta_{i-1} = \overset{*}{\mathbf{Z}}_{i,\bullet}(p)\overset{o}{\boldsymbol{\Theta}}_{\bullet,i}(p) + \zeta_{i-1}, \quad (1)$$

де $\overset{*}{x}_i$ – значення (що не спостерігається) вихідної змінної об’єкта в дискретні моменти часу $t = t_i$, $i = 1, 2, ..., n$; n – загальна кількість спостережень; p – число попередніх значень вихідної змінної, які впливають на її поточне значення; ζ_{i-1} – випадкова величина (що не спостерігається).

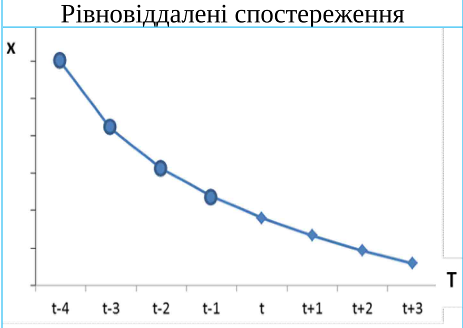
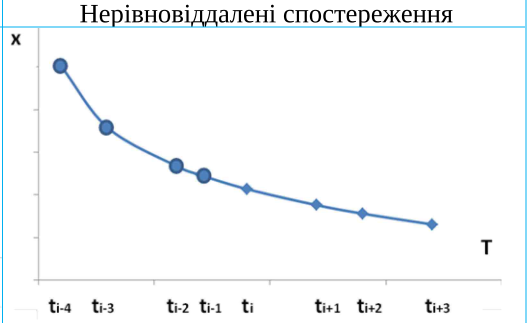
У моделі функціонування (1) $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)$ – $(n \times p)$-матриця p попередніх значень змінної, що не спостерігаються:

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)=\begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0 & \overset{*}{x}_{-1} & \cdots & \overset{*}{x}_{1-p}\\ \overset{*}{x}_1 & \overset{*}{x}_0 & \cdots & \overset{*}{x}_{2-p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{*}{x}_{i-1} & \overset{*}{x}_{i-2} & \cdots & \overset{*}{x}_{i-p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{*}{x}_{n-1} & \overset{*}{x}_{n-2} & \cdots & \overset{*}{x}_{n-p} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{*}{\mathbf{Z}}_{1,\bullet}(p)\\ \overset{*}{\mathbf{Z}}_{2,\bullet}(p)\\ \vdots\\ \overset{*}{\mathbf{Z}}_{i,\bullet}(p)\\ \vdots\\ \overset{*}{\mathbf{Z}}_{n,\bullet}(p) \end{bmatrix},$$

де $\overset{*}{\mathbf{Z}}_{i,\bullet}(p)$ означає той рядок $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)$, у якому перший елемент – $\overset{*}{x}_{i-1}$; у позначенні цієї матриці « p » означає, що при формуванні величини $\overset{*}{x}_i$ беруть участь p величин $\overset{*}{x}_{i-1}, \overset{*}{x}_{i-2}, \ldots, \overset{*}{x}_{i-p}$, тобто i-й рядок матриці $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)$ множиться на i-й стовпець матриці $\overset{o}{\mathbf{\Theta}}(p)$.

Побудова авторегресійної моделі за умов рівновіддалених спостережень реалізується за допомогою методу найменших квадратів [24], а в разі нерівновіддалених спостережень для оцінювання коефіцієнтів потрібна процедура, яка враховує відмінність часових інтервалів між сусідніми спостереженнями (табл. 2).

Табл. 2 – Відмінність у побудові авторегресійної моделі в умовах рівновіддалених та нерівновіддалених спостережень

Рівновіддалені спостереження	Нерівновіддалені спостереження
	
$\overset{*}{x}_i=\theta_1\overset{*}{x}_{i-1}+\theta_2\overset{*}{x}_{i-2}+\ldots+\theta_p\overset{*}{x}_{i-p}+\varepsilon_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$	
Оцінювання коефіцієнтів моделі за методом найменших квадратів та отримання моделі виду: $\hat{x}_t=\hat{a}_1x_{t-1}+\hat{a}_2x_{t-2}+\ldots+\hat{a}_px_{t-p}$	Метод найменших квадратів у класичному вигляді не застосовується. Потрібно побудувати процедуру оцінювання коефіцієнтів

Нехай $^{2}{}_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$ – значення часових інтервалів між сусідніми парами спостережень. Нехай відносно $(p\times1)$-вектора коефіцієнтів $\overset{o}{\mathbf{\Theta}}_{\bullet,i}(p)$ виконується:

$$\overset{o}{\mathbf{\Theta}}_{\bullet,i}(p)=\left(\overset{o}{\theta}_{1i},\overset{o}{\theta}_{2i},\ldots,\overset{o}{\theta}_{pi}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\theta_1^{\text{«}_i},\theta_2^{\text{«}_i},\ldots,\theta_p^{\text{«}_i}\right)^{\mathrm{T}}, i=1,2,\ldots,n, \quad (2)$$

де $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)^{\mathrm{T}}$ – вектор невідомих детермінованих коефіцієнтів, які необхідно визначити за результатами спостереження об’єкта; $«_i = ²_i / ¢_t$ – показник ступеня, в який зводяться компоненти вектора $\boldsymbol{\theta}$; $¢_t$ – деяке задане значення (наприклад, одна година).

Якщо $¢_t$ прийняти рівним середньому значенню часових інтервалів між сусідніми парами спостережень:

$$¢_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ²_i = \frac{1}{n} (t_n - t_0) ,$$

то це значення відповідатиме часовому інтервалу спостережень у разі рівновіддалених спостережень, тобто $«_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

З урахуванням (2) закон функціонування (1), за яким формується вихідна змінна, запишемо як

$$\overset{*}{x}_i = \overset{*}{\mathbf{Z}}_{i,\bullet}(p) \left(\theta_1^{«_i}, \theta_2^{«_i}, \ldots, \theta_p^{«_i} \right)^{\mathrm{T}} + \zeta_{i-1} , \; i = 1, 2, \ldots, n , \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\theta}$ – $(p \times 1)$-вектор невідомих детермінованих коефіцієнтів.

В (3) позначимо $\overset{=}{x}_i = \overset{*}{\mathbf{Z}}_{i,\bullet}(p) \left(\theta_1^{«_i}, \theta_2^{«_i}, \ldots, \theta_p^{«_i} \right)^{\mathrm{T}}$, отримаємо

$$\overset{*}{x}_i = \overset{=}{x}_i + \zeta_{i-1} , \; i = 1, 2, \ldots, n . \tag{4}$$

Позначимо

$$\overset{*}{\mathbf{x}} = (\overset{*}{x}_{i-1}, \overset{*}{x}_{i-2}, \ldots, \overset{*}{x}_{i-p})^{\mathrm{T}}, \quad \overset{=}{\mathbf{x}} = (\overset{=}{x}_{i-1}, \overset{=}{x}_{i-2}, \ldots, \overset{=}{x}_{i-p})^{\mathrm{T}} ,$$

$$\boldsymbol{\zeta}(-1) = \left(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1} \right)^{\mathrm{T}} ,$$

де $\boldsymbol{\zeta}(-1)$ – випадковий $(n \times 1)$-вектор (що не спостерігається); "**–**1" означає, що величина $\zeta_i(-1) = \zeta_{i-1}$ адитивно бере участь у формуванні величини $\overset{*}{x}_i$.

Тоді модель функціонування у векторному вигляді:

$$\overset{*}{\mathbf{x}} = \overset{=}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\zeta}(-1) , \tag{5}$$

де $\overset{=}{\mathbf{x}}$ – неспостережувана складова вектора значень змінної.

Нехай для спостережень вихідної змінної об’єкта виконується

$$x_i = \overset{*}{x}_i + \varepsilon_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{6}$$

де x_i – значення змінної, що спостерігається, виміряне в момент часу $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\overset{*}{x}_i$ – неспостережуване значення, яке формується згідно з (1) та (4); ε_i – випадкова помилка вимірювання, що не спостерігається.

Згідно (6) запишемо модель спостереження об’єкта у векторному вигляді:

$$\mathbf{x} = \overset{*}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon} . \tag{7}$$

Сформулюємо припущення про статистичні властивості випадкових величин у моделях функціонування (5) та спостереження (7). Нехай

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1)\} = \mathbf{0}_n, \quad E\{\boldsymbol{\zeta}(-1)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(-1)\} = \sigma_\zeta \cdot \mathbf{I}_n, \; E\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{0}_n, \quad E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\} = \sigma_\varepsilon \cdot \mathbf{I}_n,$$

де $E\{\cdot\}$ – знак математичного сподівання за можливими реалізаціями вектора, що стоїть у дужках; $\mathbf{0}_n$ – нульовий вектор; σ_ζ – дисперсія випадкової величини $\zeta_i(-1)$, обмежена величина; $\mathbf{I}_n$ – одинична $(n \times n)$-матриця, σ_ε – дисперсія величини ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, обмежена величина.

Припускаємо також, що випадкові вектори $\boldsymbol{\zeta}(-1)$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$ статистично незалежні:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{O}_{(n\times n)},$$

де $\mathbf{O}_{(n\times n)}$ – нульова $(n \times n)$-матриця.

Нехай у моменти часу $t = t_i$, $i = 1-2p, \quad 2-2p, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n$ отримано $(n + 2p)$-вектор спостережень вихідної змінної

$$\left(x_{1-2p}, x_{2-2p}, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ --- \\ \mathbf{x} \end{pmatrix},$$

де $(2p \times 1)$-вектор $\mathbf{x}(0)$ буде використано як початкові умови.

Для оцінювання невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{\theta}$ за спостереженнями об'єкта використовуємо результати [15] – [17], де розроблено та досліджено ітераційну процедуру параметричної ідентифікації для моделей у класі систем авторегресійних моделей в умовах рівновіддалених спостережень.

Оцінювання коефіцієнтів в авторегресійних моделях в умовах нерівновіддалених спостережень. З моделі функціонування (7) випливає

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}(p) = \overset{=}{\mathbf{Z}}(p) + \boldsymbol{\Gamma}(-2; Z), \tag{8}$$

де $\overset{=}{\mathbf{Z}}(p)$ – $(n{\times}p)$-матриця неспостережуваних значень вихідної змінної об'єкта, за структурою вона аналогічна матриці $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)$ в (1):

$$\overset{=}{\mathbf{Z}}(p) = \begin{bmatrix} \overset{=}{x}_0 & \overset{=}{x}_{-1} & \cdots & \overset{=}{x}_{1-p} \\ \overset{=}{x}_1 & \overset{=}{x}_0 & \cdots & \overset{=}{x}_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{=}{x}_{i-1} & \overset{=}{x}_{i-2} & \cdots & \overset{=}{x}_{i-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{=}{x}_{n-1} & \overset{=}{x}_{n-2} & \cdots & \overset{=}{x}_{n-p} \end{bmatrix}; \tag{9}$$

$\boldsymbol{\Gamma}(-2; Z)$ – $(n{\times}p)$-матриця неспостережуваних випадкових величин

$$\mathbf{\Gamma}(-2;Z)=\begin{bmatrix}\zeta_{-1} & \zeta_{-2} & \cdots & \zeta_{-p}\\ \zeta_{0} & \zeta_{-1} & \cdots & \zeta_{1-p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{i-2} & \zeta_{i-3} & \cdots & \zeta_{i-1-p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{n-2} & \zeta_{n-3} & \cdots & \zeta_{n-1-p}\end{bmatrix}, \qquad (10)$$

у позначенні якої «–2» означає, що в (3) при формуванні величини $\overset{*}{x}_{i-1}$ адитивно бере участь величина ζ_{i-2}.

Підставимо в (7) вектор $\overset{*}{\mathbf{x}}$ з (5) і використовуємо (8) для $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p)$:

$$x_i=\overline{\overline{\mathbf{Z}}}_{i,\bullet}(p)\left(\theta_1^{\text{«}_i},\theta_2^{\text{«}_i},...,\theta_p^{\text{«}_i}\right)^{\mathrm{T}}+\left\{\varepsilon_i+\mathbf{\Gamma}_{i,\bullet}(-2;Z)\left(\theta_1^{\text{«}_i},\theta_2^{\text{«}_i},...,\theta_p^{\text{«}_i}\right)^{\mathrm{T}}+\zeta_i(-1)\right\} \quad (11)$$

або

$$x_i=\overline{\overline{\mathbf{Z}}}_{i,\bullet}(p)\left(\theta_1^{\text{«}_i},\theta_2^{\text{«}_i},...,\theta_p^{\text{«}_i}\right)^{\mathrm{T}}+\xi_i,\ i=1,2,...,n, \qquad (12)$$

де ξ_i – випадкова величина, укладена у фігурні дужки в (11).

Використовуючи (8)–(12) та враховуючи, що випадкові вектори $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$, $\boldsymbol{\zeta}(-1)$ та випадкова матриця $\mathbf{\Gamma}(-2;Z)$ мають нульові математичні сподівання, і всі ці величини статистично незалежні, для математичного сподівання $\boldsymbol{\xi}=(\xi_i,\xi_2,...\xi_n)^{\mathrm{T}}$ отримуємо

$$E\{\boldsymbol{\xi}\}=\mathbf{0}_n, \qquad (13)$$

де $\mathbf{0}_n$ – нульовий $(n\times 1)$-вектор.

Введемо позначення

$$\mathbf{y}=\mathbf{x},\quad \mathbf{R}=\overline{\overline{\mathbf{Z}}}(p), \qquad (14)$$

де $\mathbf{y}$ – $(n\times 1)$-вектор спостережень вихідної змінної; $\mathbf{R}$ – $(n\times p)$-матриця регресорів для вихідної змінної.

Враховуючи (14), модель (12) набуває вигляду:

$$y_i=\mathbf{R}_{i,\bullet}\begin{pmatrix}\theta_1^{\text{«}_i}\\ \theta_2^{\text{«}_i}\\ \vdots\\ \theta_p^{\text{«}_i}\end{pmatrix}+\xi_i=\mathbf{R}_{i,\bullet}\,\boldsymbol{\theta}^{(\text{«}_i)}+\xi_i=\mathbf{R}_{i,\bullet}\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}_i+\xi_i=\overset{o}{y}_i+\xi_i,\ i=1,2,...,n, \quad (15)$$

або у векторному вигляді:

$$\mathbf{y}=\overset{o}{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\xi}, \qquad (16)$$

де $\boldsymbol{\theta}^{(\text{«}_i)}$ – позначення для покомпонентного зведення в ступінь «_i всіх компонент $(p\times 1)$-вектора $\boldsymbol{\theta}$.

Знаходження вектора невідомих детермінованих коефіцієнтів $\boldsymbol{\theta}$ являє собою складне завдання в силу того, що в моделі (15) компоненти цього вектора входять у ступені, що залежать від часових інтервалів між сусідніми парами спостережень, які для різних номерів спостережень різні.

Запишемо (15) у вигляді, зручному для побудови ітераційної процедури:

$$y_i = \mathbf{R}_{i,\bullet}\left(\theta_1^{«_i}, \theta_2^{«_i}, ..., \theta_p^{«_i}\right)^{\mathrm{T}} + \xi_i = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{R}_{i,j}\theta_j^{«_i} + \xi_i = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{R}_{i,j}\theta_j^{«_i-1}\theta_j + \xi_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,j}\theta_j + \xi_i = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,\bullet}\left(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p\right)^{\mathrm{T}} + \xi_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{17}$$

де $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,j} = \mathbf{R}_{i,j}\theta_j^{«_i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., p$ – матриця нових регресорів.

Запишемо (17) у векторному вигляді

$$\mathbf{y} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\boldsymbol{\theta} = \overset{\mathrm{o}}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi}, \tag{18}$$

де $\boldsymbol{\theta}$ – $(p \times 1)$-вектор невідомих детермінованих коефіцієнтів, які треба знайти.

Згідно [8], для оцінки коефіцієнтів $\boldsymbol{\theta}$ в (18) виконується

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}\,\mathbf{y}, \tag{19}$$

$$\mathbf{C} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{¶}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{¶}^{-1}, \tag{20}$$

де $\boldsymbol{\Sigma}_{¶}$ – коваріаційна $(n \times n)$-матриця уведеного в (12) $(n \times 1)$-вектора неспостережуваних адитивних випадкових складових $\boldsymbol{\xi}$. Вона, згідно [17], має вигляд:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{¶} = \sigma_{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\Psi} + \sigma_{¸} \cdot \mathbf{I}_n, \tag{21}$$

де σ_{ε} – дисперсія в моделі спостереження, σ_{ζ} – дисперсія в моделі функціонування; $\boldsymbol{\Psi}$ – $(n \times n)$-матриця виду:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \cdot(0) & \cdot(+1) & \cdots & \cdot(p-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot(-1) & \cdot(0) & \cdots & \cdot(p-2) & \cdot(p-1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot(1-p) & \cdot(2-p) & \cdots & \cdot(0) & \cdot(+1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdot(1-p) & \cdots & \cdot(-1) & \cdot(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdot(0) & \cdot(+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdot(-1) & \cdot(0) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

В (22) величини $\cdot(\Delta)$, $\Delta = -p+1, -p+2, ..., p-2, p-1$ визначаються за формулами

$$\cdot(\Delta) = \mathrm{Cov}\{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\} = \sigma_{\zeta} \cdot \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}(i_1 - i_2)\boldsymbol{\theta}, \tag{23}$$

де $\mathbf{I}_p(i_1 - i_2)$ – $(p \times p)$-матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, крім елементів однієї діагоналі, що дорівнюють одиниці: якщо $\Delta = i_1 - i_2 = 0$, то це головна діагональ; якщо $\Delta > 0$, то це діагональ, розміщена вище головної діагоналі на Δ строк; якщо $\Delta < 0$, то це діагональ, розміщена нижче головної діагоналі на $|\Delta|$ строк.

З урахуванням (20)–(23) для оцінок коефіцієнтів виконується

$$\hat{\mathbf{d}} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{¶}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{¶}^{-1} \mathbf{y} . \qquad (24)$$

В формулі (20) для матриці $\mathbf{C}$ матриця регресорів $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ залежить від неспостережуваної матриці $\mathbf{R}$ та від невідомого вектора коефіцієнтів $\boldsymbol{\theta}$.

У формулі (21) для матриці $\boldsymbol{\Sigma}_{¶}$ елементи матриці $\boldsymbol{\Psi}$, як випливає з (22) – (23), залежать від $\boldsymbol{\theta}$. Це використано [19] для побудови ітераційної процедури обчислення невідомих коефіцієнтів у вигляді (24).

Нехай $\hat{\mathbf{d}}(r)$ – оцінка $\boldsymbol{\theta}$ у вигляді (24), отримана на ітерації r процедури оцінювання вектора коефіцієнтів $\boldsymbol{\theta}$; матриця $\hat{\mathbf{R}}(r-1)$ – оцінка матриці регресорів $\mathbf{R}$, отримана на ітерації $r-1$; $\hat{y}_i(r)$, $i=1,2,...,n$ – вектор виходів регресійної моделі; $u_i(r)$, $i=1, 2, ... , n$ – вектор залишків [24] регресійної моделі. Запишемо регресійну модель (17) у вигляді, зручному для побудови ітераційної процедури оцінювання

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} \hat{\mathbf{R}}_{i,j}(r-1)\, \hat{d}_j^{\,«_i -1}(r-1)\, \hat{d}_j(r) + u_i(r) = \sum_{j=1}^{p} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,j}(r-1)\, \hat{d}_j(r) + u_i(r) =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,\bullet}(r-1) \left(\hat{d}_1(r), \hat{d}_2(r), ..., \hat{d}_p(r) \right)^{\mathrm{T}} + u_i(r) = \hat{y}_i(r) + u_i(r),\ i = 1, 2, ... , n , \quad (25)$$

де $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{i,j}(r-1) = \hat{\mathbf{R}}_{i,j}(r-1)\, \hat{d}_j^{\,«_i -1}(r-1),\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,p$.

Ітераційна процедура для оцінювання невідомих коефіцієнтів регресійної моделі у вигляді (25) реалізується аналогічно до викладеної у статті [20].

Зазначимо також, що завдання оцінювання коефіцієнтів авторегресії в умовах нерівновіддалених спостережень може бути поставлено і вирішено в умовах структурної невизначеності, коли порядок авторегресії апріорно невідомий. Тоді оцінювання коефіцієнтів авторегресії може бути проведено з урахуванням результатів [18] – [19].

Виявлення змін режимів руху КА Січ-2 на основі моделювання часових рядів TLE-елементів. «Січ-2» – український малогабаритний космічний апарат дистанційного зондування Землі, що функціонував у 2011–2012 роках (у грудні 2012 року зв’язок із КА «Січ-2» втрачено).

Часові ряди TLE-елементів КА «Січ-2» [23] представлені сімома основними та трьома додатковими змінними: x_1 – апогей (км), x_2 – перигей (км), x_3 – ексцентриситет (безрозмірна), x_4 – нахилення (град), x_5 – довгота висхідного вузла (град), x_6 – аргумент перигею (град), x_7 – середня аномалія (град), x_8 – сумарна кількість витків, x_9 – накопичений час (година), x_{10} (або $²_i$) – часовий інтервал між поточним та попереднім спостереженням (година).

Моделювання проводилося для семи основних змінних. Додаткові змінні x_8, x_9 використовувалися для побудови рисунків, а змінна x_{10} – для розрахунку $«_i = ²_i / ¢_t$, $i=1,2,...,n$ (показник ступеня, в який зводяться компоненти вектора $\boldsymbol{\theta}$ в (3)). Спроби моделювання безпосередньо в класі авторегресійних моделей (1) виявилися безуспішними через сильну кореляцію авторегресорів. Вихід із цієї ситуації можливий із залученням апріорних даних, що містять інформацію про співвідношення між коефіцієнтами при авторегресорах. У роботі [20] розроблено метод структурно-параметричної ідентифікації у задачі моделювання об'єктів за спостереженнями їх функціонування у класі бета-авторегресійних рівнянь. В них співвідношення вагових коефіцієнтів при авторегресорах визначаються з урахуванням функцій щільності бета-розподілів. Ці результати використані; пробними розрахунками встановлено, що максимальна кількість попередніх значень вихідних змінних $x_1, x_2, \dots, x_7$, що впливають на їхнє поточне значення, є $p = 7$.

На першому попередньому етапі моделювання на основі методу бета-авторегресії для кожної основної змінної проведено пошук оптимального значення параметра (показує ступінь збільшення вагових коефіцієнтів авторегресії при наближенні до поточного значення). Графіки вагових функцій для $= 1, 3, \dots, 25$ при $p = 7$ представлені в [21, рис. 1].

Далі для кожної основної змінної побудовано бета-авторегресійні моделі для набору значень параметра $= 1, 2, \dots, 15$.

Загальний вигляд моделі для окремої змінної:

$$\overset{*}{x}_i = \gamma \cdot (\overset{o}{\theta}_1, \overset{o}{\theta}_2, \dots, \overset{o}{\theta}_p)\,(\overset{*}{x}_{i-1}, \overset{*}{x}_{i-2}, \dots, \overset{*}{x}_{i-p})^{\mathrm{T}} + \zeta_{i-1} ,$$

де $\overset{o}{\theta}_j = F(j \cdot \Delta) - F((j-1) \cdot \Delta)$, $\Delta = 1/p$, $F(v)$ – функція ймовірності бета-розподілу, $\overset{o}{\gamma}$ – невідомий скалярний детермінований параметр; ζ_{i-1} – випадкова неспостережувана скалярна величина, $i = 1, 2, \dots, n$; n – число спостережень.

Виявлення зміни руху КА «Січ-2» проведено на основі аналізу середньоквадратичного відхилення (СКВ) моделей. Розглянуто три способи, що відрізняються визначенням індикаторів зміни руху.

Індикатори зміни руху для цих 3-х способів:

I – СКВ (покрокового прогнозування) за авторегресійними моделями на навчальному ковзному інтервалі (інтервал моделювання заданого розміру «ковзає» за годинною віссю спостережень);

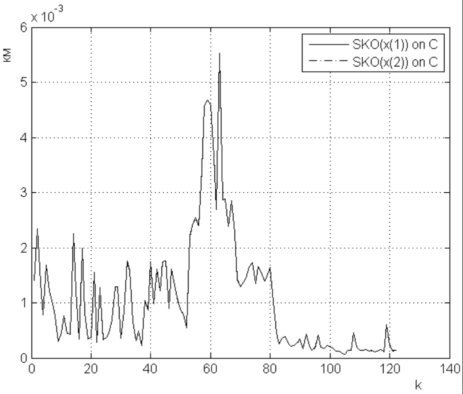
II – СКВ (покрокового прогнозування) за авторегресійними моделями на екзаменаційних інтервалах, які слідують за навчальними інтервалами (тобто для першого навчального інтервалу екзаменаційним є другий інтервал, для другого інтервалу – третій, і так далі, для передостаннього інтервалу – останній));

III – відхилення спостережуваного значення від модельного (розрахованого за авторегресійними моделями на навчальному інтервалі) одного екзаменаційного спостереження, яке йде відразу за навчальним інтервалом.

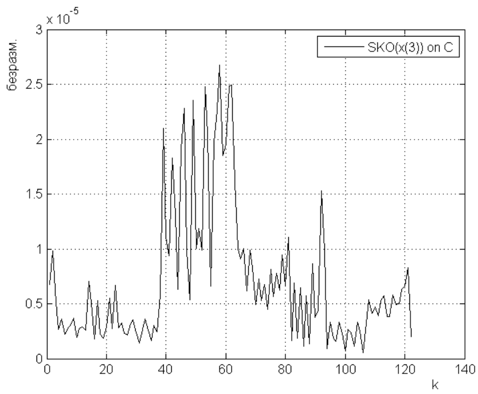
Якщо розбити весь період спостереження на інтервали, які відповідають циклам змінювання змінних x_5, x_6, x_7, можна виявити зміну структури, коефіцієнтів і середньоквадратичної помилки найкращої моделі при переході від інтервалу до інтервалу для кожної з шести основних змінних.

Спосіб I. При побудові моделей часових рядів TLE-елементів КА «Січ-2» використано 123 інтервали (по 40 спостережень кожен) із серпня 2011 р. до липня 2019 р. Моделі для змінних побудовано на навчальній вибірці (на значеннях змінних навчального інтервалу), а прогнозуючу здатність моделей оцінено на екзаменаційній вибірці (на значеннях змінних інтервалу, наступного за навчальним інтервалом). Збільшення помилки моделі на екзаменаційній вибірці – сигнал про зміну режиму руху. Інтервал моделювання заданого розміру «ковзає» за часовою віссю спостережень, тому число «екзаменів», за якими обчислюється СКО, залежить від кількості спостережень *n* та обсягів (n_A та n_C) навчальних та екзаменаційних вибірок.

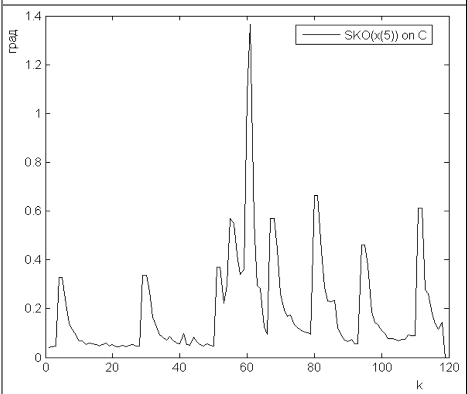
Найбільш значне відхилення від основного режиму руху КА «Січ-2» спостерігалося на інтервалах з номерами від 53 до 68 (з 123), що відповідає періоду часу з вересня 2013 р. до травня 2015 р. (рис. 1).



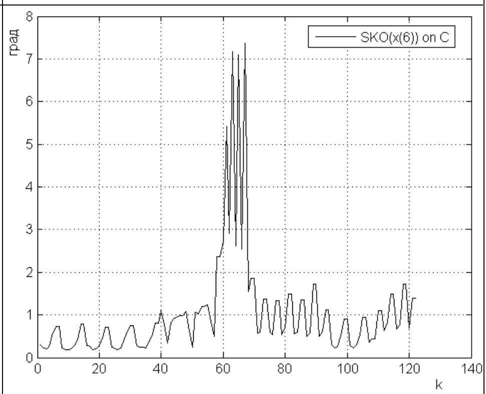
x_1 , x_2 – апогей, перигей



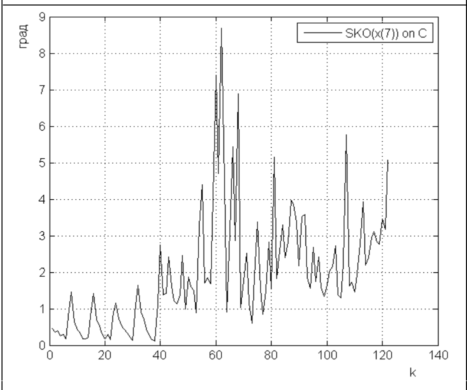
x_3 – ексцентриситет



x_5 – довгота висхідного вузла



x_6 – аргумент перигею



x_7 – середня аномалія

Найбільш значуще відхилення від основного режиму руху КА «Січ-2»:

за змінними x_1 , x_2 – для інтервалів 58, 62,
за змінною x_3 – для інтервалів 58, 62,
за змінною x_5 – для інтервалу 61,
за змінною x_6 – для інтервалів 62, 67
за змінною x_7 – для інтервалу 62
Інтервал 58-62 – зміна режиму руху

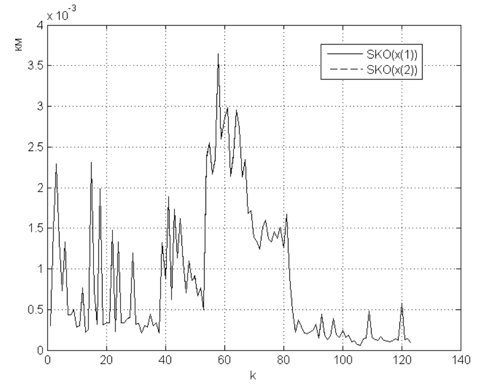
Рис. 1 – Середньоквадратична помилка моделей авторегресії для змінних x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , x_6 , x_7 на навчальному ковзному інтервалі (спосіб I)

СКВ моделей на екзаменаційних інтервалах для x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 відображають помітну зміну у поведінці КА «Січ-2», що сталася 13 грудня 2013 р.

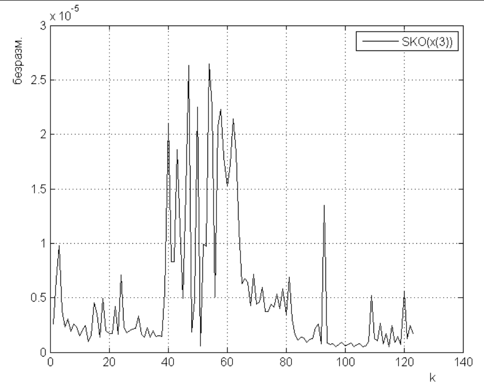
Спосіб II. Використано ті ж самі інтервали, що й для способу I. Моделі для змінних побудовано на навчальній вибірці (на значеннях змінних навчального інтервалу), а прогнозуючу здатність моделей оцінено на так званій екзаменаційній вибірці. Число «екзаменів», за якими обчислюється СКВ, дорівнює k-1=123-1=122. З отриманих результатів (приклад для x_1, x_2, x_3, x_5 на рис. 2) випливає, що найбільш значуще відхилення від основного режиму руху КА «Січ-2» спостерігалося на інтервалах з номерами від 54 до 67 (з 123), що, як і в попередньому прикладі (рис. 1), відповідає періоду часу з вересня 2013 р. до травня 2015 р.

Спосіб III. Моделювання проводилося на TLE-рядах даних з 21.01.2020 р. (10 година 03 хв.) до 19.05.2020 р. (10 година 47 хв.). Обсяг вибірки ковзного вікна – 40 спостережень, кількість положень ковзного вікна складає 217.

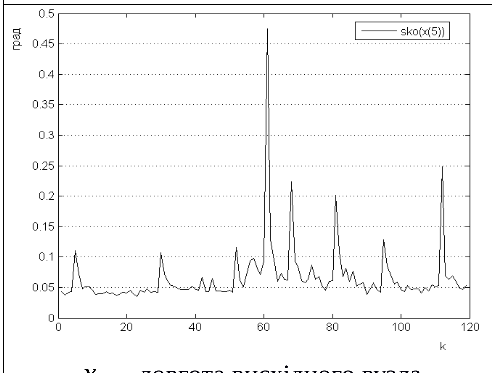
Моделі для змінних побудовано на навчальній вибірці, а прогнозуючу здатність моделей оцінено на екзаменаційному спостереженні (на значеннях змінної, що слідує за навчальним інтервалом). На рис. 3 наведено графіки зміни помилки моделей для x_5, x_7.



x_1, x_2 – апогей, перигей



x_3 – ексцентриситет

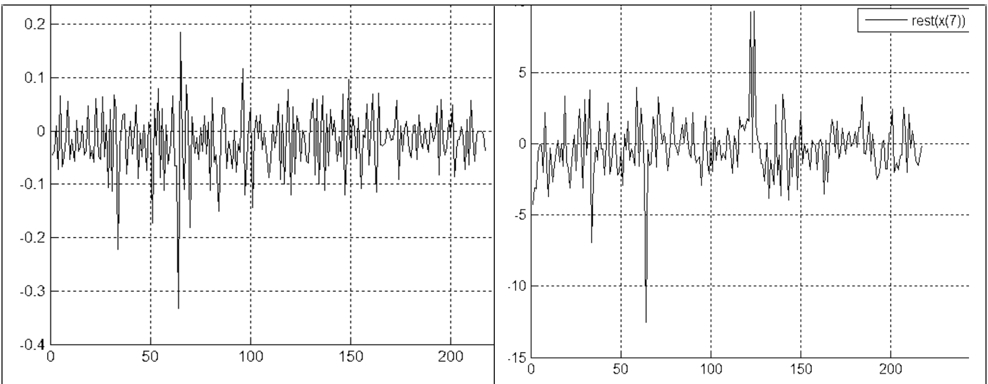


x_5 – довгота висхідного вузла

Найбільш значуще відхилення від основного режиму руху КА «Січ-2»:
за змінними x_1, x_2 – для інтервалу 58,
за змінною x_3 – для інтервалів 47,54,
за змінною x_5 – для інтервалу 61,

Рис. 2 – Середньоквадратична помилка моделей авторегресії для змінних x_1, x_2, x_3, x_5 на екзаменаційних інтервалах, які йдуть за навчальними інтервалами (спосіб II)

Встановлено, що СКВ моделей для режимів становить: для апогею і перигею ~ 1 метр, для ексцентриситету ~ 0,8х10^{-5}, для довготи висхідного вузла ~ 0,06 градуса, для аргументу перигею ~ 0,2 градуса, для середньої аномалії ~ 2 градуси.



x_5 – довгота висхідного вузла | x_7 – середня аномалія

Рис. 3 – Середньоквадратична помилка моделей авторегресії для змінних x_5 , x_7 на екзаменаційному спостереженні, що за навчальним інтервалом (спосіб III)

Зіставлення рис. 1 – рис. 2 з результатами візуального аналізу вихідних часових рядів показує, що середньоквадратичні помилки на ковзному інтервалі моделей для змінних x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , x_6 , x_7 , відображають помітну зміну у поведінці КА «Січ-2», що відбулася 13.12.2013 р.

Висновки. Розроблено метод побудови авторегресійних моделей для виявлення змін характеру руху об’єктів РКТ, що представлені часовими рядами TLE-елементів з нерівновіддаленими в часі значеннями. На його основі побудовано авторегресійні моделі динаміки космічного апарата «Січ-2» за його часовими рядами TLE-елементів. Проведено аналіз середньоквадратичних помилок моделей на екзаменаційних вибірках, знайдено значні відхилення середньоквадратичних помилок для основних змінних (апогею, перигею, ексцентриситету, довготи висхідного вузла, аргументу перигею, середньої аномалії), тим самим виявлено зміни руху КА «Січ-2» від основного режиму.

Новизна – раніше завдання виявлення зміни характеристик руху об’єктів РКТ на основі запропонованого виду авторегресійних моделей не розглядалося.

Практична цінність – моделювання руху КА «Січ-2» за часовими рядами TLE-елементів дозволяє виявити зміни режимів; метод може бути використаний для виявлення зміни властивостей об’єктів РКТ у процесі їх експлуатації.

1. *D. Gondelach, A. Lidtke, R. Armellin, C. Colombo, H. Lewis, Q. Funke, T. Flohrer*. Re-entry prediction of spent rocket bodies in GTO. URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/astro-2020-0006/pdf
2. *T. Kelecy, D. Hall, K. Hamada, D. Stocker.* Satellite Maneuver Detection Using Two-line Element (TLE) Data. URL: https://amostech.com/TechnicalPapers/2007/Modeling_Analysis_Simulation/Kelecy.pdf
3. *Назаренко А. И.* Погрешности прогнозирования движения спутников в гравитационном поле Земли. М.: ИКИ РАН. – 2010. –226 с. URL: http://www.iki.rssi.ru/books/2010nazarenko.pdf
4. *C. Levit and W. Marshall*. Improved orbit predictions using two-line elements. Advances in Space Research, V. 47, 2011, pp. 1107–1115. https://doi.org/10.1016/j.asr.2010.10.017
5. A hybrid AR-EMD-SVR model for the short-term prediction of nonlinear and non-stationary ship motion / Wen-yang Duan et al. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering), 2015, Vol. 16(7), pp. 562-576. https://doi.org/10.1631/jzus.A1500040
6. *Nazarenko A. I.* Space debris modeling. M.: IKI RAN, 2013. 216 pp.

7. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: пер. с англ. / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др.; под. ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. М. : Мир, 1989. 278 с.
8. *S. Lemmens and H. Krag.* Two-Line-Elements-Based Maneuver Detection Methods for Satellites in Low Earth Orbit. Journal of Guidance Control Dynamics. 2014. Vol. 37. May. P. 860–868. https://doi.org/10.2514/1.61300
9. *A. I. Nazarenko.* Application of the Method for Optimum Filtering of Measurements for Determination and Prediction of Spacecraft Orbits. Solar System Research. 2013. Vol. 47, No. 7. P. 564–568. https://doi.org/10.1134/S0038094613070113
10. *Бородкин Л. И.* Алгоритм обнаружения моментов изменения параметров уравнения случайного процесса. Автоматика и телемеханика. 1976. № 6. С. 23–31.
11. *Карташов В. Я.,* Новосельцева М. А. Обнаружение структурно-параметрических изменений в стохастических системах в реальном масштабе времени алгоритмами непрерывных дробей и структурного анализа. Управление большими системами. 2011. Вып. 34. С. 62–91.
12. Blasques *F., Koopman J., Lucas A.* Nonlinear autoregressive models with optimality properties. URL: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/07474938.2019.1701807
13. *Ding1 X. and Zhou Z.* Auto-regressive approximations to non-stationary time series, with inference and applications. URL: https://arxiv.org/pdf/2112.00693.pdf
14. *Миргород В. Ф.* Математические модели процессов управляемого изменения состояния силовых и энергетических установок : дисс. … д-ра техн. наук : утв. 01.05.02 / Миргород Владимир Фёдорович. Днепропетровск, 2012. 344 с.
15. *Сарычев А. П.* Идентификация параметров систем авторегрессионных уравнений при известных ковариационных матрицах. А. П. Сарычев. Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. 2012. № 3. С. 14–30.
16. *Сарычев А. П.* Исследование методом статистических испытаний итерационной процедуры для идентификации параметров системы авторегрессионных. Системні технології. 2014. Випуск 3 (92). С. 77–89.
17. *Сарычев А. П.* Линейная авторегрессия на основе метода группового учёта аргументов в условиях квазиповторных наблюдений. Искусственный интеллект. 2015. № 3–4 (69–70). С. 105–123.
18. *Сарычев А. П.* Моделирование в классе систем авторегрессионных уравнений в условиях структурной неопределенности. Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. 2015. № 4. С. 79–103.
19. *Сарычев Александр.* Моделирование сложных систем в условиях структурной неопределённости: регрессионные и авторегрессионные модели. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2016. 74 с.
20. *Sarychev O. P., Perviy B. A.* Optimal regressors search subjected to vector autoregression of unevenly spaced TLE series. Системні технології. Випуск 2 (121). 2019. С. 95–110.
21. *Саричев О. П., Первій Б. А.* Моделі руху космічних об'єктів на основі часових рядів TLE-елементів. Технічна механіка. 2021. –№ 1. С. 16–24. https://doi.org/10.15407/itm2021.01.051
22. NORAD Two-Line Element Set Format. URL: http://celestrak.com/NORAD/documentation/tle-fmt.asp
23. SICH 2 Satellite details 2011-044G NORAD 37794. URL: https://www.n2yo.com/satellite/?s=37794
24. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ : пер. с англ. М.: Мир, 1980. 456 с.

Отримано 24.05.2022,
в остаточному варіанті 15.06.2022