УДК 621.396.4

Е. Н. ТАЧИНИНА

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ ГРУППЫ НАНОСПУТНИКОВ АВИАЦИОННО-КОСМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Национальный авиационный университет
пр. Космонавта Комарова, 1, 03058, Киев, Украина;
e-mail: tachinina@rambler.ru

Целью публикации является определение условий построения оптимальной траектории выведения группы наноспутников авиационно-космической системой, позволяющих удовлетворить как основные, так и альтернативные требования к оптимальным траекториям, а также эффективно использовать энергетические ресурсы составной динамической системы. Применены методы математического моделирования, вариационного исчисления, оптимального управления, численного интегрирования.

В статье предложен метод построения оптимальных траекторий составной динамической системы, состоящий в применении принципа расширения не только к критерию оптимизации и вектору фазового состояния ракеты-носителя, но и к ограничениям, накладываемым на траектории отделяющихся ракет, позволяющий удовлетворить как основные, так и альтернативные требования к оптимальным траекториям.

Сделан вывод о том, что предложенный метод позволяет заменить исходную задачу оптимизации со сложными ограничениями другой, более простой задачей, где исключены перекрестные связи, но при этом ее решение удовлетворяет заданным требованиям и совпадает с решением исходной задачи.

Метою публікації є визначення умов побудови оптимальної траєкторії виведення групи наносупутників авіаційно-космічної системою, що дозволяють задовольнити як основні, так і альтернативні вимоги до оптимальних траєкторій, а також ефективно використовувати енергетичні ресурси складеної динамічної системи. Застосовані методи математичного моделювання, варіаційного обчислення, оптимального управління, числового інтегрування.

В статті запропоновано метод побудови оптимальних траєкторій складеної динамічної системи, який полягає в застосуванні принципу розширення не тільки до критерію оптимізації та вектору фазового стану ракети-носія, але й до обмежень, що накладаються на траєкторії ракет, що відділяються, який дозволяє задовольнити як основні, так і альтернативні вимоги до оптимальних траєкторій.

Зроблено висновок про те, що запропонований метод дозволяє замінити вихідну задачу оптимізації зі складними обмеженнями іншою, більш простою задачею, де виключені перехресні зв'язки, але при цьому її розв'язок задовольняє заданим вимогам і збігається з розв'язком вихідної задачі.

The paper deals with the determination of the conditions for constructing an optimal launch trajectory for the nanosatellite constellation injected by the aerospace system. These conditions satisfy both the main and alternative requirements for optimal trajectories, as well as use efficiently the power resources of an integrated dynamic system. The methods of mathematical modeling, variation calculations, optimal control, and numerical integration are applied.

The paper proposes the method for building the optimal trajectories of an integrated dynamic system. It includes the enhancing concept applied to not only the optimization criterion and the phase state vector of a launch vehicle, but to limitations imposed on the trajectories of the separated head rockets as well. This method satisfies both the basic and alternate requirements for optimal trajectories.

It is concluded that the proposed method allows replacing the initial problem of the complex-limitations optimization with other simpler problem wherein cross couplings are excluded. In this case, the solution of this problem satisfies given requirements and coincides with the solution of the initial problem.

Ключевые слова: *составная динамическая система, оптимизация, траектория, наноспутники.*

Ведение. Вступление в третье тысячелетие совпало с новым этапом развития технологий миниатюрных космических аппаратов – микро- и наноспутников. Наноспутники – это космические аппараты, имеющие массу от 1 кг до 10 кг, размером 1U (10x10x10 см), 2U (10x10x20 см) и 3U (10x10x30 см), призванные решать простые, но важные задачи. Наноспутники планируется использовать для дистанционного зондирования Земли, экологического мониторинга, прогноза землетрясений, исследования ионосферы.

Период единичных прорывных результатов и первых удачных опытов создания малоразмерных спутников уже позади. Основная сегодняшняя задача – выведение наноспутников на орбиту. Осуществление кластерных запусков сверхмалых спутников на больших ракетах-носителях имеет свои недостатки.

В связи с этим, предлагается запускать наноспутники в качестве полезной нагрузки (ПН) на базе самолета Ан-124-100, который используется в качестве подвижной стартовой площадки для запуска твердотопливной ракеты-носителя (РН) легкого класса СС-24 [10 – 11]. Самолет с ракетой в грузоотсеке будет взлетать с обычного аэродрома и подниматься на высоту около 10 км, на которой планируется осуществлять сброс ракеты-носителя с помощью авиационно-пусковой установки, включающей транспортно-пусковую площадку (ТПП) и вытяжную парашютную систему.

Далее ракета с пусковыми контейнерами, в которых размещены наноспутники, за счет собственного твердотопливного двигателя выходит на высоту порядка 600 км, на которой предполагается сбрасывать полезную нагрузку в виде миниатюрных спутников, а ТПП с помощью парашюта совершает посадку в заданном месте и готова для дальнейшего (многократного) использования.

Проведенный анализ определения оптимальной траектории выведения группы наноспутников на орбиту показывает, что к настоящему времени разработаны многочисленные точные и приближённые методы решения задач оптимального управления. Теория оптимального управления разрывными системами рассматривалась в работах Ащепкова Л. Т. [1], Сейджа Э. П., Уайта Ч. С. [2], Брайсона и Хо-Ю Ши [3]. Однако прикладные задачи оптимального управления детерминированными составными динамическими системами, которые перемещаются по ветвящимся траекториям и позволяют вывести за один запуск группу наноспутноков, не рассматривались. Впервые такие исследования были выполнены в работах Лысенко А. И. [4 – 7]. Однако в этих работах не были учтены специфические особенности выведения наноспутников, возникающие при использовании авиационно-космических систем.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть головная часть ракеты-носителя состоит из r_i $(i=\overline{1,k})$ ракет. От головной части в полете k раз произойдет отделение ракет (рис. 1). Ракета-носитель начинает управляемое движение в пункте 0 и перемещается далее вдоль ветви 0-1 к пункту 1. Затем происходит отделение ракет, которые движутся от пункта 1 к пунктам 11, 12 и $1r_k$, в которых предполагается сброс наноспутников. Полагаем, что движение происходит в вакууме в плоскопараллельном гравитационном поле. Схема ветвящейся траектории движения ракеты с разделяющейся головной частью, которая выводит группу наноспутников, представлена на рис. 1.

Траектории таких составных динамических систем называются ветвящимися [8], так как состоят из участков совместного движения составных частей ракеты-носителя и участков их индивидуального движения к цели, то есть движения по отдельным ветвям траектории.

Эффективность использования этого класса систем зависит от наилучшего, оптимального выбора координат и момента времени разделения составной динамической системы (СДС), а также от оптимального способа движения СДС к точке разделения и оптимального перемещения подсистем к целям по ветвям траектории после разделения.

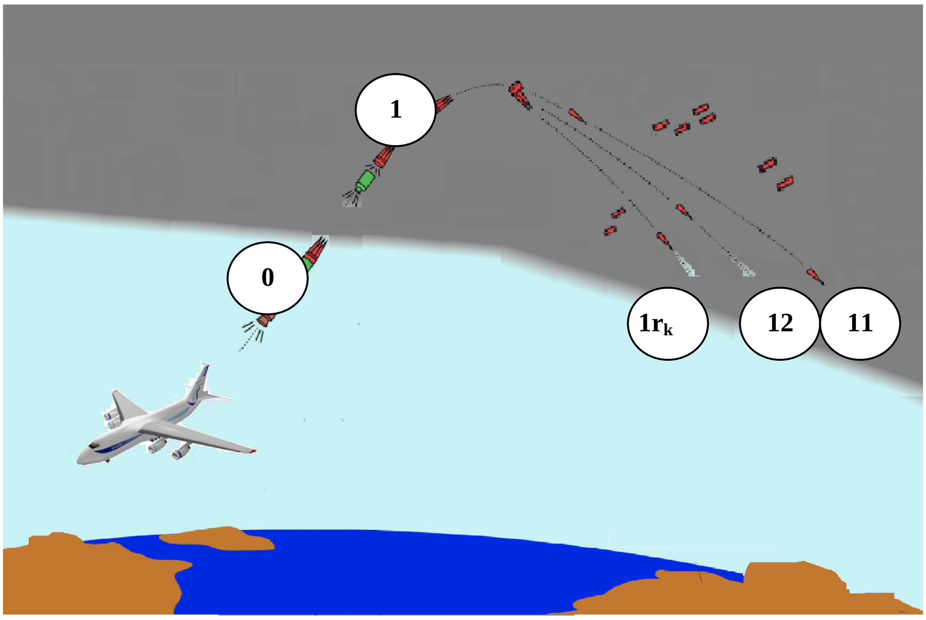

Рис. 1. – Схема ветвящейся траектории

В данной работе рассматривается задача, в которой траектории динамических систем должны удовлетворять не только основным требованиям, но и ряду альтернативных [4 – 6].

Альтернативность свойств траектории состоит в том, что в каждый момент времени движения динамической системы по этой траектории существуют условия для другого варианта движения, цель которого исключает основную цель движения системы. К указанному классу траекторий относится и траектория полета ракеты-носителя, из любой точки некоторого заданного участка которой возможен безаварийный запуск наноспутников [7]. Поиск возможных подходов, в том числе использующих положения теории оптимальных ветвящихся траекторий, определения оптимальных траекторий, удовлетворяющих не только основным, но и альтернативным требованиям, позволит расширить возможности таких динамических систем.

Основная конструктивная идея состоит в применении принципа расширения [4, 5] не только к критерию оптимизации и вектору фазового состояния, но и к ограничениям, накладываемым на траектории подсистем.

Применение принципа расширения к построению оптимальных траекторий. Рассмотрим математическую постановку задачи и ее решение. Пусть динамика движения ракеты-носителя описывается дифференциальной системой

$$dx/dt=\dot{x}=F(x,u,t),\ t\in[t_0,t_f], \tag{1}$$

где $x\in E^n$, $u\in\Omega\subset E^m$, $F(\cdot)$ – непрерывное вместе с матрицами производных F_x, F_u отображение $E^n\times E^m\to E^n$.

Ракета-носитель перемещается из точки с координатами $(x(t_0), t_0) \in Q_0 = \{(x(t_0), t_0): \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) = 0\}$ $(\varphi^{(0)}: E^{n+1} \to E^{r_0}, r_0 < n+1)$ в точку с координатами $(x(t_f), t_f) \in Q_f = \{(x(t_f), t_f): \varphi^{(f)}(x(t_f), t_f) = 0\}$ $(\varphi^{(f)}: E^{n+1} \to E^{r_f}, r_f < n+1)$.

Затем в момент времени $t \in [t_0, t_f]$, происходит разделение головной части (1) на составляющие ее ракеты которые, используя собственное управление, движутся от пункта 1 к пунктам 11, 12, …,1r_k для осуществления запуска наноспутников.

Динамика движения отделившихся ракет, перемещающихся по ветвям траектории в данном интервале времени, описывается уравнением вида

$$dy/d\xi = \dot{y}_\xi = f(y, \nu, \xi), \ \xi \in [t_0, t_k], \tag{2}$$

где $y \in E^n, \nu \in \Omega_\nu \subset E^{m_\nu}$, $y(t) = x(t)$ для всех фазовых координат, кроме массы; $f(\cdot)$ – непрерывное вместе с матрицами производных f_y, f_ν отображение $E^n \times E^m \to E^{n_\nu}$; $(y(t_k), t_k)$ – заданные пункты в которых предполагается сброс наноспутников, $y(t_k), t_k \in Q_k = \{(y(t_k), t_k): \varphi^{(k)}(y(t_k), t_k) = 0\}$ $(\varphi^{(k)}: E^{n+1} \to E^{r_k}, r_k < n+1)$.

Полагаем, что движение происходит в вакууме в плоскопараллельном гравитационном поле.

На движение отделившихся ракет (2) накладывается ограничение

$$J = \int_t^{t_k} \varphi(y, \nu, \xi) d\xi + g(y(t), t; y(t_k), t_k) \le 0. \tag{3}$$

Требуется найти такие управления $u(t)$, $\nu(\xi)$, значения координат пункта 1 $x(t)$, $y(\xi)$, $t \in [t_0, t_f]$, $t \in [t, t_k]$, а также моменты времени t_0, t_f, t_k, чтобы функционал (4) принимал наименьшее возможное значение

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \Phi(x, u, t) dt + G(x(t_0), t; x(t_f), t_f) \to \min, \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$, $G(\cdot)$ -заданные непрерывно-дифференцируемые функции.

Решение задачи предлагается искать в классе кусочно-гладких траекторий и кусочно-непрерывных управлений.

Предполагается, что задача (1) – (4) не имеет тривиального решения, состоящего в том, что оптимальная траектория задачи (1), (4) удовлетворяет ограничению (3) при неуправляемом движении отделившихся ракет.

Используя гипотезу о расширении ограничения, сущность которой состоит в том, что задачу поиска $\nu(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$, удовлетворяющих двум ограничениям (2), (3), возможно заменить на эквивалентную задачу с одним ограничением

$$\tilde{J} = \int_{t}^{t_k} \left\{ \varphi(y,\nu,\xi)d\xi + \Phi^T(\xi)\left[f(y,\nu,\xi) - \dot{y}_\xi\right]d\xi \right\} + \mu^{(k)T}\varphi^{(k)}(y(t_k),t_k) + g(x(t),t;y(t_k),t_k) \ge 0, \tag{5}$$

где $\mu^{(k)T} = \{\mu_1^{(k)},\ldots,\mu_{r_k}^{(k)}\}$ – векторный множитель, $\Phi^T(\xi) = \{\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_2(\xi)\}$ – функциональный векторный множитель, которые могут трактоваться как множители Лагранжа [9], если поиск $\nu(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$, выполняется по условию $J \to min$. В этом случае $\nu(\xi), y(\xi), \Phi^{(k)}(\xi), t_k$ должны удовлетворять уравнениям [7]

$$\dot{\Phi}_\xi = -dh/dy\Big|_{\wedge}, \tag{6}$$

$$h(\hat{y},\hat{\nu},\varphi,\xi) = \min_{\nu(\xi)\in\Omega_\nu} h(\hat{y},\nu,\varphi,\xi) \tag{7}$$

$$\mu^{(k)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial t_k}\Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\Big|_{\wedge} + h\Big|_{\wedge} = 0,$$

$$\mu^{(k)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial y t_k}\Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial y t_k}\Big|_{\wedge} - \Phi(\hat{t}_k)\Big|_{\wedge} = 0, \tag{8}$$

$$\mu^{(k)} \ge 0, \varphi_i^{(k)}(y(t_k) < t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, r_k}). \tag{9}$$

где значок «^» отмечает оптимальные переменные и параметры

$$h(y,\nu,\varphi,\xi) = \varphi(y,\nu,\xi) + \Phi^T(\xi) f(y,\nu,\xi).$$

Выполнение соотношений (8) – (9) позволяет удовлетворить неравенство (3), которое преобразуется к виду

$$\hat{J} = (x(t),(t); \hat{y}(\hat{t}_k),\hat{t}_k) \ge 0. \tag{10}$$

Если при таком подходе неравенство (3) нарушается, то остается единственный способ добиться его выполнения: изменить траекторию $x(t)$.

В задачах (1), (4), (10) ограничение (10) является ограничением типа неравенства, не содержащим управление. Возьмем полную производную по времени от выражения (10) и подставим $F(x,u,t)$ вместо $\dot{x}$ [6–7]:

$$\dot{\hat{J}}_t = \frac{\partial\hat{J}}{\partial t} + \left[\frac{\partial\hat{J}}{\partial t}\right]^T F(x,u,t) = 0, \hat{J} = 0. \tag{11}$$

Определим гамильтониан системы

$$H(x,u,\lambda,t) = \Phi(x,u,t) + \lambda^T(t)F(x,u,t) + \mu(t)\dot{\hat{J}}_t, \tag{12}$$

где

$$\mu(t)\begin{cases} \geq 0, \ \hat{J} = 0, \ \dot{\hat{J}} = 0; \\ = 0, \ \hat{J} < 0. \end{cases}$$

На основании принципа минимума для составных динамических систем [9] возможно записать необходимые условия оптимальности управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, задачи (1) – (4): для построения оптимальной ветвящейся траектории движения ракеты, которая выводит группу наноспутников: необходимо найти такие сопряженные переменные

$$\dot{\lambda}_t = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{*}; \tag{13}$$

чтобы минимизировать гамильтониан (12) по управлению

$$H(\hat{x},\hat{u},\lambda,t) = \min_{u(t)\in\Omega} H(\hat{x},u,\lambda,t).$$

В заключение отметим, что переход от неравенства (10) к неравенству (11) и далее к гамильтониану (12) является одним из возможных способов решения задачи (1), (4), (10). Другие способы решения задачи приведены в работе [7]. Гипотеза о расширении ограничения имеет место в случае, когда от неравенства (3) осуществляется переход к его минимальному значению $J = \min\limits_{n(t)\in\Omega_n} h(\hat{y},n,f,x)$.

Решение задачи (1) – (4) следует начинать с проверки отсутствия тривиального решения, то есть решить задачу (1), (5) и проверить выполнение условий (2), (3) при неуправляемом движении подсистемы (2).

Выводы. Таким образом, применение принципа расширения не только позволяет заменить исходную задачу оптимизации со сложными ограничениями другой, более простой задачей, где исключены перекрестные связи, но при этом ее решение удовлетворяет заданным требованиям и совпадает с решением исходной задачи.

Предложенный метод построения оптимальных траекторий, состоящий в применении принципа расширения не только к критерию оптимизации и вектору фазового состояния ракеты-носителя, но и к ограничениям, накладываемым на траектории отделяющихся ракет, позволит удовлетворить как основные, так и альтернативные требования к оптимальным траекториям, а также эффективно использовать энергетические ресурсы составной динамической системы при выведении группы наноспутников на околоземную орбиту.

1. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987. 226 с.
2. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.
3. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 554 с.
4. *Лысенко А. И.* Оптимизация траектории составной динамической системы с текущим моментом разделения. Техническая кибернетика. Киев: Высшая школа, 1990. Вып.14. С. 24 – 31.
5. *Лысенко А. И.* Модельная задача выбора оптимальной программы движения составной транспортной системы. Автоматика. 1988. № 6. С. 62 – 64.

6. *Лысенко А. И.* Моделирование оптимального движения составной системы. Электронное моделирование. 1989. Т. 11. № 4. С. 80 – 83.
7. *Лысенко А. И.* Необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы. Авиационные приборы, навигационные системы жизнедеятельности экипажей Л.А. М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1988. С. 82 – 95.
8. *Лисенко О. І., Тачиніна О. М., Чумаченко С. М., Нікулін О. Ф.* Постановка задачі застосування теорії розгалужених траєкторій для вирішення задач пошуку та рятування в зоні надзвичайних ситуацій. Техническая механіка. 2015. №.1. С. 73 – 78.
9. *Tachinina O, Zacharchenko V., Lysenko O., Alekseeva I.* The optimal injection path of group of nanosatellite multisensor-based platforms. IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18–20, 2016). K.: NAU, 2016. P. 155 – 158.
10. *Tachinina O., Gusynin A., Lysenko O., Chumachenko S.* The method of injection of earth remote monitoring subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on AN-124-100 and AN-225 airplanes. IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18–20, 2016). K.: NAU, 2016. P. 200 – 205.
11. *Tachinina O., Lysenko O., Chumachenko S.* The system of injection of subminiature satellites (nanosatellites) to near-Earth orbit on the basis of Ан-124-100 airplane. Tenth International Scientific Conference "Modern challenges in telecommunications" and Eighth International scientific conference of undergraduate and graduate students "Prospects for development of information-telecommunication technologies and systems" (Kyiv, Ukraine, April 19-22, 2016). K.: KPI, 2016. P. 477 – 450.

Получено 22.02.2017,
в окончательном варианте 15.03.2017