УДК 621.454.2

Н. В. ХОРЯК, С. И. ДОЛГОПОЛОВ

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ГАЗОВЫХ ТРАКТОВ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОСТНЫХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Институт технической механики Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: khoryak@i.ua

Однією з важливих задач, що виникають при проектуванні рідинних ракетних двигунів (РРД), є дослідження стійкості низькочастотних процесів у РРД методами математичного моделювання. У низькочастотному діапазоні динаміка більшості елементів РРД описується звичайними диференціальними рівняннями (ЗДР). Виняток становлять газові тракти двигуна – камера згоряння, газогенератор і газоводи, процеси в яких описуються рівняннями із запізнюваннями. Оскільки причиною низькочастотних коливань може бути нестійкість процесів у декількох різних системах двигуна, при числовому дослідженні стійкості необхідно розглядати РРД як багатоконтурну динамічну систему із потенційно нестійкими підсистемами. Ефективний метод визначення стійкості таких систем в лінійній постановці заснований на розрахунку спектра власних значень матриці – оператора лінійної системи ЗДР, проте цей метод є орієнтованим на звичайні динамічні системи. Для того, щоб застосувати його при аналізі стійкості низькочастотних процесів у РРД, необхідно в математичній моделі динаміки газових трактів перейти від рівнянь із запізнюваннями до ЗДР. У статті розглянуто задачу урахування запізнювань при аналізі низькочастотної стійкості РРД по спектру матриці. Побудовано схеми наближеної заміни рівнянь із запізнюваннями звичайними диференціальнимі рівняннями на основі апроксимації передаточної функції ланки запізнювання в області малого параметра дробно-раціональними функціями і ланцюжками функцій. Розглянуто різні апроксиманти передаточної функції ланки запізнювання і проведено їх порівняльний аналіз. Запропоновано раціональний підхід до урахування запізнювань в рівняннях динаміки газових трактів РРД і розроблено методичні рекомендації щодо їх урахування. Результати проведених досліджень можуть бути використані при моделюванні низькочастотної динаміки газових трактів і аналізі стійкості низькочастотних процесів в РРД.

Одной из важных задач, возникающих при проектировании жидкостных ракетных двигателей (ЖРД), является исследование устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД методами математического моделирования. В низкочастотном диапазоне динамика большинства элементов ЖРД описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Исключение составляют газовые тракты двигателя – камера сгорания, газогенератор и газоводы, процессы в которых описываются уравнениями с запаздываниями. Поскольку причиной низкочастотных колебаний в ЖРД может быть неустойчивость процессов в нескольких различных системах двигателя, при численном исследовании устойчивости необходимо рассматривать ЖРД как многоконтурную динамическую систему с потенциально неустойчивыми подсистемами. Эффективный метод определения устойчивости таких систем в линейной постановке основан на расчете спектра собственных значений матрицы – оператора линейной системы ОДУ, однако этот метод ориентирован на обыкновенные динамические системы. Для того, чтобы применить его при анализе низкочастотной устойчивости ЖРД, необходимо в математической модели динамики газовых трактов перейти от уравнений с запаздываниями к ОДУ. В статье рассмотрена задача учета запаздываний при анализе низкочастотной устойчивости ЖРД по спектру матрицы. Построены схемы приближенной замены уравнений с запаздываниями обыкновенными дифференциальными уравнениями на основе аппроксимации передаточной функции звена запаздывания в области малого параметра дробно-рациональными функциями и цепочками функций. Рассмотрены различные аппроксиманты передаточной функции звена запаздывания и проведен их сравнительный анализ. Предложен рациональный подход к учету запаздываний в уравнениях динамики газовых трактов ЖРД и разработаны методические рекомендации по их учету. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при моделировании низкочастотной динамики газовых трактов и анализе устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД.

One of the important problems in the designing of liquid-propellant rocket engines (LPREs) is the study of the stability of low-frequency processes in LPREs by mathematical simulation. In the low-frequency range, the dynamics of most of the LPRE components is described by ordinary differential equations (ODEs). The exception is the LPRE gas paths: a combustion chamber, a gas generator and gas lines, processes in which are described by delay equations. Since low-frequency oscillations in LPREs may be caused by the instability of processes in some of the LPRE systems, in the numerical study of stability the LPRE must be considered as a multi-loop dynamic system with potentially instable subsystems. An efficient method to study the stability of such systems in linear formulation is based on calculating the eigenfrequency spectrum of the operator matrix of a linear system of ODEs; however, that method is oriented to dynamic systems described by ODEs. To apply it to the analysis of the LPRE low-frequency stability, in the mathematical model of gas path dynamics one has to go from delay equations to ODEs. This paper addresses the problem of accounting for delays in the analysis of the LPRE low-frequency stability from the matrix spectrum. Schemes are constructed for approximate replacement of delay equations with ODEs based on approximating the delay element transfer function in a small parameter region by fractional rational functions and chains of functions. Different approximants of the delay element transfer function are considered and compared with one another. A rational approach to accounting for delays in the equations of LPRE gas path dynamics is proposed, and methodological recommendations on accounting for them are formulated. The results of this study may be used in simulating the low-frequency dynamics of gas paths and analyzing the stability of low-frequency processes in LPREs.

Ключевые слова: *жидкостной ракетный двигатель, динамическая система, устойчивость по Ляпунову, спектр матрицы, звено запаздывания, передаточная функция, аппроксиманты, частотные характеристики, собственные частоты и декременты колебаний.*

Введение. Более 50 % аварий ракет-носителей (РН) с жидкостными ракетными двигателями (ЖРД) связано с нарушением нормального функционирования и отказами двигателей [1]. Одной из причин таких нарушений является потеря устойчивости рабочих процессов в ЖРД. Высокая энергонапряженность ЖРД способствует появлению и развитию колебаний различной природы в широком диапазоне частот [2]. Значительное возрастание их амплитуд, которое происходит при потере устойчивости, может привести к поломке деталей агрегатов, обрыву трубопроводов, сбоям в работе отдельных систем ЖРД, выдаче ложной команды на выключение двигателя и другим аварийным ситуациям [1 – 3]. Для разработки эффективных мер по устранению неустойчивости необходимо определить причины возникновения этих колебаний и их параметры. Экспериментальная отработка мощных ЖРД требует значительных затрат, при этом выявление и диагностирование возможной неустойчивости требует дополнительных исследований и может оказаться весьма сложной задачей [2, 4]. При ограниченном объеме экспериментальных исследований легко упустить режимы неустойчивой работы ЖРД, что впоследствии может привести к аварийным ситуациям. В связи с этим исследование устойчивости ЖРД методами математического моделирования является актуальной задачей.

При исследовании устойчивости рабочих процессов в ЖРД обычно выделяют низкочастотные общедвигательные колебания (с частотами от 1 до 50 Гц), высокочастотные акустические колебания в камере сгорания и газогенераторе (с частотами выше 400 Гц) и колебания в агрегатах ЖРД в области промежуточных частот [2, 3]. Подходы к математическому моделированию динамических процессов в ЖРД в разных частотных диапазонах основаны на использовании разных принципов и методов.

В низкочастотном диапазоне динамика большинства элементов ЖРД описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [5 – 7]. Исключение составляют газовые тракты двигателя – камера сгорания (КС), газогенератор (ГГ) и газоводы (ГВ). Рабочий процесс в КС и ГГ представляет собой последовательность сложных взаимосвязанных физико-химических процессов (впрыск, распыление, дробление, образование капель, испарение, перемешивание, воспламенение, горение), в результате которых происходит преобразование топлива в конечные продукты сгорания. Из-за их сложности и взаимосвязи до настоящего времени не создана общая теория рабочего процесса в камере ЖРД, а количественные исследования позволяют лишь выделить основные явления и построить упрощенную модель процессов [3]. Реальный процесс горения жидких компонентов топлива трудно описать аналитически, а его основная характеристика – кривая выгорания топлива – зависит от множества факторов и может иметь сложный вид. М. С. Натанзон предложил при решении задачи о низкочастотной устойчивости ЖРД заменять реальную кривую выгорания ступенчатой функцией, то есть чистым запаздыванием [2]. Несмотря на то, что эта модель является весьма приближенной, она широко используется до настоящего времени (напр., [5 – 8]). Транспортным запаздыванием аппроксимируется также кривая переноса температуры турбулентными потоками массы в элементах газового тракта [3, 6]. Поскольку в диапазоне изменения частот от 25 до 50 Гц на точность моделирования существенно влияет учет фактической формы кривых выгорания, для аппроксимации реальных законов выгорания топлива наряду с транспортным запаздыванием используются и более сложные зависимости (напр., инерционное запаздывание [6]). Таким образом, в низкочастотной области динамика ЖРД описывается системой дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Низкочастотные колебания ЖРД (с частотами до 50 Гц) могут быть обусловлены кавитационными явлениями в насосах ЖРД, неустойчивостью контуров “двигатель – регулятор” и “турбонасосный агрегат (ТНА) – ГГ”, а на активном участке полета РН – неустойчивостью контура “жидкостная ракетная двигательная установка (ЖРДУ) – корпус РН” (продольной неустойчивостью РН) [2, 4, 5, 9 – 12]. Таким образом, для определения низкочастотной устойчивости ЖРД на активном участке полета РН необходимо исследовать многоконтурные динамические системы “питающие магистрали – ЖРД”, “ЖРДУ – корпус РН” с потенциально неустойчивыми подсистемами. Эффективным методом определения устойчивости таких систем в линейной постановке является расчет спектра собственных значений матрицы – оператора линейной системы ОДУ. При этом анализ устойчивости системы выполняется на основе ее линейной (линеаризованной) математической модели, а устойчивость трактуется как устойчивость по Ляпунову [7, 10 – 12]. Однако область применения указанного метода ограничивается классом динамических систем, которые описываются ОДУ. Для применения этого метода при решении задачи об устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД необходимо перейти в математической модели динамики газовых трактов от уравнений с запаздываниями к ОДУ. Отметим, что предложенные в [5, 8] варианты замены, построенной на разложении соответствующих членов уравнения с запаздываниями в ряд Тейлора 1-го порядка, обеспечивают приемлемую точность лишь при очень малых запаздываниях.

Цель настоящей работы – разработка эффективного метода приближенной замены уравнений с запаздываниями в математической модели низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД обыкновенными дифференциальными уравнениями. Под эффективностью метода подразумевается следующее: метод должен обеспечивать возможность выполнения анализа устойчивости низкочастотных процессов в ЖРДУ на основе расчета спектра матрицы линейной динамической системы “питающие магистрали – ЖРД” с учетом запаздываний в ее математической модели и иметь приемлемую точность расчета динамических характеристик ЖРДУ; усложнение математической модели низкочастотной динамики ЖРД, неизбежное при замене уравнений с запаздываниями системой ОДУ, должно быть обоснованным и по возможности минимальным; реализация такой замены должна быть простой и не требующей создания специальных поддерживающих ее программ.

1. Линейная математическая модель низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД. Движение газа в газовых трактах ЖРД происходит в условиях подвода тепла, выделяющегося при сгорании топлива, и в общем случае описывается дифференциальными уравнениями, выражающими закон сохранения массы, количества движения и энергии, и уравнением состояния газа. При построении математической модели низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД обычно принимаются следующие упрощения [3, 4, 5]. КС, ГГ и ГВ рассматриваются как элементы с сосредоточенными параметрами, так как в низкочастотном диапазоне их линейные размеры существенно меньше длины акустической волны. Процессы, протекающие в газовых трактах ЖРД, полагаются адиабатическими, что согласуется с результатами расчетов и экспериментов для частот, не превышающих 400 Гц. При описании динамических процессов в КС и ГГ используется простейшая модель горения, основанная на аппроксимации кривой выгорания и кривой переноса температур транспортным запаздыванием – единичными ступенчатыми функциями $\varphi_{выг}(t) = 1(t-\tau)$ и $\varphi_п(t) = 1(t-\tau')$, где τ – время преобразования жидких компонентов топлива в продукты сгорания, τ' – время пребывания газа на участке тракта (обычно для КС и ГГ $\tau = 10^{-3}…10^{-2}$ с; значения τ' как минимум на порядок больше). С учетом принятых упрощений нестационарное неизотермическое адиабатическое движение газа в элементах газового тракта ЖРД в диапазоне частот до 50 Гц может быть описано дифференциально-алгебраической системой уравнений с запаздываниями. Структура этих уравнений одинакова для КС, ГГ и ГВ. Ниже приведена линейная система уравнений в отклонениях, которая описывает низкочастотную динамику газогенератора ЖРД, выполненного по схеме с дожиганием окислительного генераторного газа. Эта система включает в себя уравнения для определения давления в газовом тракте ГГ, работоспособности продуктов сгорания и весового секундного расхода газа на выходе из газогенератора:

$$\frac{d(\delta p_{гг})}{dt} = \frac{\kappa_{гг} RT_{гг}}{V_{гг}} [\delta G_{гго}(t-\tau_{гг}) + \delta G_{ггг}(t-\tau_{гг}) - \delta G_m], \qquad (1)$$

$$\delta(RT)_{гг1} - \frac{\partial(RT_{гг})}{\partial k^*_{гг}} \cdot \left[\frac{1}{\overline{G}_{ггг}} \delta G_{гго}(t-\tau_{гг}) - \frac{\overline{G}_{гго}}{\overline{G}^2_{ггг}} \delta G_{ггг}(t-\tau_{гг}) \right] = 0, \qquad (2)$$

$$\delta G_T + a_{m1}\, \delta(RT)_{гг1}(t-\tau'_{гг}) + a_{m2}\, \delta p_{гг} + a_{m3}\, \delta p_{гв} = 0, \qquad (3)$$

где $p_{гг}$, $p_{гв}$ – давление в ГГ и ГВ; $G_{гго}$, $G_{гго}$ – весовой секундный расход окислителя и горючего на входе в ГГ; G_m – весовой секундный расход газа на выходе из ГГ; $\kappa_{гг}$ – показатель адиабаты в ГГ; $V_{гг}$ – объем ГГ; $(RT_{гг})(k^*_{гг})$ – зависимость работоспособности продуктов сгорания топлива в ГГ от соотношения компонентов топлива $k^*_{гг}$; $RT_{гг1}$ – работоспособность продуктов сгорания на входе в газовый тракт ГГ; $\tau_{гг}$ – время преобразования жидких компонентов топлива в продукты сгорания в ГГ; $\tau'_{гг}$ – время пребывания газа в ГГ; a_{m1}, a_{m2}, a_{m3} – коэффициенты, полученные в результате линеаризации уравнения для определения расхода газа на выходе из ГГ.

Линейная математическая модель, описывающая низкочастотные процессы в ЖРД с учетом запаздываний в уравнениях динамики его газовых трактов, может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[d_{ij}\frac{d(\delta x_j)}{dt} + b_{ij}\delta x_j + c_{ij}\delta x_j(t-\tau_{ij}) \right] = 0, \quad i=1,\ldots,n, \tag{4}$$

где δx_j – отклонения переменных x_j от установившихся значений; d_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – коэффициенты системы ($c_{ij} \neq 0$ только в уравнениях динамики газовых трактов); τ_{ij} –запаздывания (обычно $\tau_{ij} = 0{,}001\,\text{с} \ldots 0{,}04\,\text{с}$).

Анализ устойчивости низкочастотных процессов в системе с малыми запаздываниями можно свести к исследованию аппроксимирующей ее системы ОДУ. Характеристическое уравнение системы с запаздываниями является трансцендентным и имеет на комплексной плоскости бесконечное число корней $\lambda_i = -\alpha_i \pm j\omega_i$, но для анализа низкочастотной устойчивости достаточно определить корни, расположенные в ограниченной области $0 \le \omega_i \le 2\pi f_{\max}$. Переход от системы (4) к системе ОДУ можно считать корректным, если в частотном диапазоне $(0,\ f_{\max})$ обеспечивается приемлемая точность вычисления динамических характеристик ЖРДУ, а устойчивому состоянию системы (4) соответствует устойчивое состояние аппроксимирующей системы.

Для формализации процесса перехода от системы с запаздываниями к системе ОДУ выделим из системы (4) элементы с запаздываниями:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[d_{ij}\frac{d(\delta x_j)}{dt} + b_{ij}\delta x_j + c_{ij}\delta y_j \right] = 0, \quad i=1,\ldots,N, \tag{5}$$

$$\delta y_j = \delta x_j(t-\tau_{ij}), \quad i, j=1,\ldots,N. \tag{6}$$

Тогда переход от системы с запаздываниями к системе ОДУ сводится к приближенной замене уравнений звеньев запаздывания (6) ОДУ.

2. Схема выполнения приближенной замены уравнения звена запаздывания обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для перехода от уравнения звена запаздывания

$$y(t) = x(t-\tau) \tag{7}$$

к ОДУ предлагается использовать подход, основанный на аппроксимации передаточной функции звена запаздывания $W_e(p\tau) = \exp(-p\tau)$ в области малого параметра $p\tau$ дробно-рациональной функцией [13 – 17]:

$$F_{m,n}(p\tau) = \frac{B_m(p\tau)}{A_n(p\tau)} = \frac{b_0 + b_1 p\tau + \ldots + b_m p^m \tau^m}{a_0 + a_1 p\tau + \ldots + a_n p^n \tau^n}, \tag{8}$$

где p – комплексная переменная преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях; $B_m(p\tau)$, $A_n(p\tau)$ – полиномы m-го и n-го порядка с действительными коэффициентами ($m \le n$).

В области изображений уравнению (7) соответствует трансцендентное уравнение $y = W_e(p\tau)x$. Поскольку $W_e(p\tau) \approx F_{m,n}(p\tau)$, уравнение (7) можно приближенно заменить алгебраическим уравнением

$$y \approx F_{m,n}(p\tau)\, x = \frac{b_0 + b_1 p\tau + \ldots + b_m p^m \tau^m}{a_0 + a_1 p\tau + \ldots + a_n p^n \tau^n}\, x\,. \tag{9}$$

Передаточной функции $F_{m,n}(p\tau)$ соответствует ОДУ n-го порядка [18]:

$$a_0\, y + a_1 \tau \frac{dy}{dt} + \ldots + a_n \tau^n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0\, x + b_1 \tau \frac{dx}{dt} + \ldots + b_m \tau^m \frac{d^m x}{dt^m}\ . \tag{10}$$

Вводя другие пространства состояний, передаточной функции $F_{m,n}(p\tau)$ можно поставить в соответствие другие описания в классе ОДУ [14, 19], но все они будут эквивалентными в смысле совпадения передаточной функции y/x. Так, если ввести переменную $z = x/(a_0 + a_1 p\tau + \ldots + a_n p^n \tau^n)$, то $y = (b_0 + b_1 p\tau + \ldots + b_m p^m \tau^m)\, z$, а уравнению (10) соответствует система ОДУ:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \tau \frac{dz(t)}{dt} + \ldots + a_n \tau^n \frac{d^{(n)} z(t)}{dt^{(n)}} - x(t) = 0,\\ &b_0 + b_1 \tau \frac{dz(t)}{dt} + \ldots + b_m \tau^m \frac{d^{(m)} z(t)}{dt^{(m)}} - y(t) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

которая легко сводится к системе $(n+1)$ ОДУ 1-го порядка.

Располагая удовлетворительным приближением функции $W_e(p\tau)$ дробно-рациональной функцией (8), с помощью описанной схемы легко перейти от уравнений с запаздываниями к ОДУ (11). Такой переход приводит к повышению порядка исследуемой системы, при этом в спектре оператора аппроксимирующей системы ОДУ появляются «дополнительные» собственные значения, соответствующие полюсам и нулям функции $F_{m,n}$. Эти собственные значения являются паразитными (в том смысле, что они не определяют параметров реальных физических процессов), поэтому при анализе устойчивости их следует исключать из рассмотрения. Выявление таких собственных значений требует дополнительных численных исследований.

Для выявления «паразитных» собственных значений предлагается следующая методика:

– определяется спектр матрицы системы без учета запаздываний;

– в систему последовательно вводятся запаздывания, начиная с меньших, и после введения каждого нового запаздывания выполняется расчет спектра матрицы и сравнительный анализ полученного спектра с предыдущим;

– в результате сравнительного анализа выделяются собственные значения, соответствующие полюсам аппроксимирующей функции.

Выявить паразитные собственные значения можно также в результате сравнительного анализа спектров матрицы, рассчитанных для нескольких вариантов выбора аппроксимирующей функции $F_{m,n}(p\tau)$ или нескольких различных значений времени запаздывания каждого звена запаздывания.

В качестве функции $F_{m,n}(p\tau)$ рассматривались аппроксиманты $T_{0,n}(p\tau)$, $T_{n,n}(p\tau)$ и $P_{n,n}(p\tau)$, полученные с использованием рядов Тейлора и Паде [14 – 16, 20]. Кроме того, на основе представления экспоненты бесконечными произведениями Пэйнтера [21, 22]

$$\exp(z) = ch(z) + sh(z) = \prod_{i_c=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(2z)^2}{(2i_c - 1)^2\pi^2}\right] + z\prod_{i_s=1}^{\infty}\left[1 + \frac{z^2}{i_s{}^2\pi^2}\right], \quad (12)$$

были построены дробно-рациональные функции $\Pi_{0,n}(p\tau)$, $\Pi_{n,n}(p\tau)$.

При построении аппроксимантов $T_{0,n}(p\tau)$, $\Pi_{0,n}(p\tau)$, $T_{n,n}(p\tau)$, $\Pi_{n,n}(p\tau)$ использовалось представление функции $W_e(p\tau) = \exp(-p\tau)$ в виде дроби $W_e(p\tau) = 1/\exp(p\tau)$ и $W_e(p\tau) = \dfrac{\exp(-p\tau/2)}{\exp(p\tau/2)}$. В результате разложения функций $\exp(p\tau)$, $\exp(p\tau/2)$, $\exp(-p\tau/2)$ в ряд Тейлора с конечным количеством n членов, получаются дробные аппроксиманты Тейлора

$$T_{0,n}(p\tau) = 1\big/(1 + p\tau + p^2\tau^2/2! + ... + p^n\tau^n/n!), \quad (13)$$

$$T_{n,n}(p\tau) = \frac{1 - p\tau/2 + p^2\tau^2/8 + ... + (-1)^n p^n\tau^n/(2^n \cdot n!)}{1 + p\tau/2 + p^2\tau^2/8 + ... + p^n\tau^n/(2^n \cdot n!)}. \quad (14)$$

Аппроксиманты Паде I-го рода строятся с использованием разложения функции в ряд Тейлора [20]. Коэффициенты аппроксимантов Паде функции $\exp(-p\tau)$ можно определить с помощью формулы [14]

$$P_{m,n}(p\tau) = \frac{1 - \dfrac{m\cdot p\tau}{(n+m)} + \cdots + \dfrac{(-1)^k m(m-1)\cdots(m-k+1)\cdot(p\tau)^k}{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-k+1)\cdot k!} + ...}{1 + \dfrac{n\cdot p\tau}{(n+m)\cdot 1!} + \cdots + \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(p\tau)^k}{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-k+1)\cdot k!} + ...}. \quad (15)$$

Аппроксиманты Пэйнтера строились следующим образом: в выражениии (12) ограничивалось количество сомножителей ($i_c = 1,\ldots,k_c$, $i_s = 1,\ldots,k_s$) и определялось произведение. Сумма этих произведений является полиномом n-го порядка ($n = 2k_c$ при $k_c > k_s$, и $n = 2k_s + 1$ при $k_c \le k_s$). Разложение функций $\exp(p\tau)$, $\exp(p\tau/2)$, $\exp(-p\tau/2)$ в ряды Пэйнтера (13) с конечным числом сомножителей позволило получить дробно-рациональные функции, аппроксимирующие функцию $W_e(p\tau) = \exp(-p\tau)$:

$$\Pi_{0,n}(p\tau) = 1/(a_0 + a_1 p\tau + ... + a_n p^n\tau^n), \quad (16)$$

$$\Pi_{n,n}(p\tau) = \frac{a_0 - a_1 p\tau/2 + ... + (-1)^n a_n p^n\tau^n/2^n}{a_0 + a_1 p\tau/2 + ... + a_n p^n\tau^n/2^n}. \quad (17)$$

Аппроксиманты Пэйнтера и Паде порядка $n \le 4$ приведены в табл. 1, 2.

Сравнивая их с выражениями (14), (15), легко заметить, что $\Pi_{0,1}(p\tau) = T_{0,1}(p\tau)$, $P_{1,1}(p\tau) = \Pi_{1,1}(p\tau) = T_{1,1}(p\tau)$.

Таблица 1

n	Аппроксиманты Пэйнтера $\Pi_{0,n}(z)$
4	$1 \big/ [(16/9\pi^4)\cdot z^4 + (1/\pi^2)\cdot z^3 + (40/9\pi^2)\cdot z^2 + z + 1]$
3	$1 \big/ [(1/\pi^2)\cdot z^3 + (4/\pi^2)\cdot z^2 + z + 1]$
2	$1 \,/\, [(4/\pi^2)\cdot z^2 + z + 1)]$
1	$1 \big/ (z+1)$

Таблица 2

n	Аппроксиманты Паде $P_{n,n}(z)$	Аппроксиманты Пэйнтера $\Pi_{n,n}(z)$
4	$\dfrac{z^4 - 20z^3 + 180z^2 - 840z + 1680}{z^4 + 20z^3 + 180z^2 + 840z + 1680}$	$\dfrac{z^4 - 1{,}125\pi^2 z^3 + 10\pi^2 z^2 - 4{,}5\pi^4 z + 9\pi^4}{z^4 + 1{,}125\pi^2 z^3 + 10\pi^2 z^2 + 4{,}5\pi^4 z + 9\pi^4}$
3	$\dfrac{-z^3 + 12z^3 - 60z^2 + 120}{z^3 + 12z^3 + 60z^2 + 120}$	$\dfrac{-z^3 + 8z^2 - 4\pi^2 z + 8\pi^2}{z^3 + 8z^2 + 4\pi^2 z + 8\pi^2}$
2	$\dfrac{z^2 - 6z + 12}{z^2 + 6z + 12}$	$\dfrac{z^2 - 0{,}5\pi^2 z + \pi^2}{z^2 + 0{,}5\pi^2 z + \pi^2}$
1	$\dfrac{-0{,}5z + 1}{0{,}5z + 1}$	$\dfrac{-0{,}5z + 1}{0{,}5z + 1}$

Другой подход к приближенной замене уравнения звена запаздывания системой ОДУ основан на представлении элемента запаздывания $x(t-\tau)$ цепочкой из n элементов с запаздываниями τ/n [23]. Входной функцией 1-го элемента цепочки является входная функция элемента запаздывания. Выходные функции элементов цепочки $y_i(t)$ определяются равенствами:

$$\begin{array}{l} y_1(t) = x(t-\tau/n), \\ y_2(t) = y_1(t-\tau/n) = x(t-2\tau/n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t) = y_{n-1}(t-\tau/n) = x(t-\tau). \end{array} \qquad (18)$$

Затем цепочка звеньев запаздывания (18) заменяется цепочкой последовательно соединенных апериодических звеньев, т. е. системой ОДУ

$$\begin{cases} (\tau/n)\dot{z}_1(t) + z_1(t) = x(t), \\ (\tau/n)\dot{z}_2(t) + z_2(t) = z_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\tau/n)\dot{z}_n(t) + z_n(t) = z_{n-1}(t), \end{cases} \qquad (19)$$

с начальными условиями $z_i(t_0) = y_i(t_0) = x(t_0 - i\tau/n)$, $i = 1,\ldots,n$.

Если входная функция $x(t)$ непрерывна, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = y(t)$, а устойчивость тривиального решения системы при переходе от (18) к (19) сохраняется [23]. Таким образом, при достаточно большой длине цепочки $z_n(t) \cong y(t)$, то есть система ОДУ (19) с удовлетворительной точностью аппроксимирует уравнение звена запаздывания, $y(t) = x(t-\tau)$.

Замена элементов цепочки (18) апериодическими звеньями эквивалентна замене их передаточных функций $W_e(p\tau/n)=\exp(-p\tau/n)$ аппроксимантами $T_{0,1}(p\tau/n)=1/(1+p\tau/n)$. Передаточная функция звена запаздывания $W_e(p\tau)$ заменяется при этом аппроксимантом порядка $(0,n)$

$$R_{n(T01)}(p\tau)=[T_{0,1}(p\tau/n)]^{n}=\left(1+p\tau/n\right)^{-n}. \qquad (20)$$

Для замены элементов цепочки (18) системой ОДУ можно применить более точные аппроксиманты – например, $T_{0,2}$ и $P_{1,1}$. Соответствующие аппроксиманты функции $W_e(p\tau)$ будут иметь порядок $(0,2n)$ и (n,n):

$$R_{n(T02)}(p\tau)=[T_{0,2}(p\tau/n)]^{n}=1/(1+p\tau/n+0{,}5p^2\tau^2/n^2)^n, \qquad (21)$$

$$R_{n(P11)}(p\tau)=[P_{1,1}(p\tau/n)]^{n}=\left(1-p\tau/2n\right)^n/\left(1+p\tau/2n\right)^n. \qquad (22)$$

Используя следствие из второго замечательного предела [22] $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q/n)^n=e^q$, легко можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n(P11)}(p\tau)=e^{-p\tau}$.

Схема замены уравнения звена запаздывания цепочкой из n аппроксимантов Паде 1-го порядка $P_{1,1}(p\tau/n)$ приведена на рис. 1, а), б).

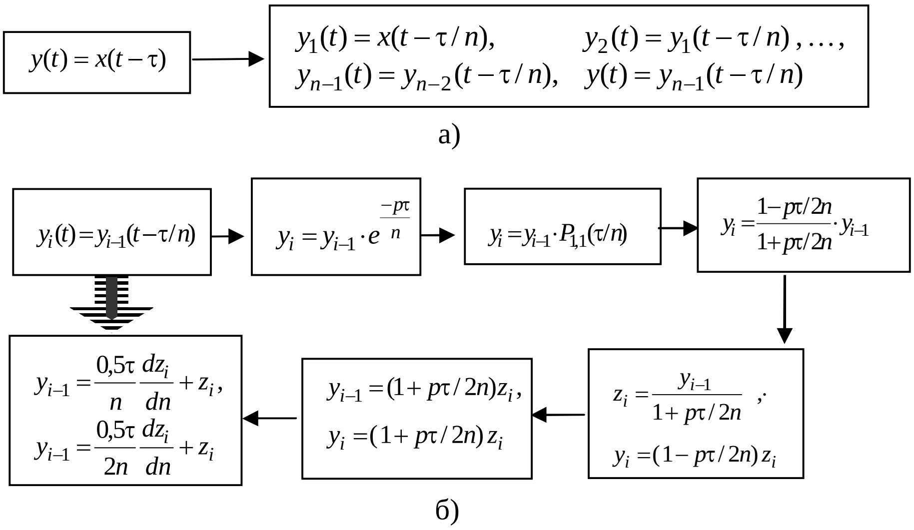

Рис. 1

3. Сравнительный анализ аппроксимирующих функций. Математическая модель низкочастотной динамики ЖРД включает в себя уравнения с запаздываниями. Переход от системы с запаздываниями к системе ОДУ по описанной выше схеме приводит к значительному увеличению количества уравнений в модели, а выявление “паразитных” собственных значений может оказаться весьма трудоемкой задачей. В этой связи при выборе аппроксимирующей функции возникает необходимость компромисса между порядком аппроксиманта $F_{m,n}$ и его точностью. Наилучшим будем считать такой аппроксимант, который при наименьшем порядке n обеспечивает приемлемую точность определения АЧХ и ФЧХ звена запаздывания $A(\omega\tau)$ и $\varphi(\omega\tau)$ в частотном диапазоне модели $0 \le f \le f_{\max}$, то есть при $0 \le \omega\tau \le (\omega\tau)_{\max}$.

Аппроксиманты $P_{n,n}(p\tau)$, $T_{n,n}(p\tau)$, $\Pi_{n,n}(p\tau)$ и $R_{n(P11)}(p\tau)$ при $p = j\omega$ позволяют точно вычислить АЧХ звена запаздывания: модули этих функций равны единице, поскольку коэффициенты полиномов в их числителях и знаменателях отличаются только знаками. Расчеты ФЧХ звена запаздывания показали, что наилучшими по точности являются аппроксиманты Паде и Пэйнтера; далее следуют цепочки рядов Паде 1-го порядка – аппроксиманты $R_{n(P11)}(p\tau)$, за ними – аппроксиманты Тейлора. Погрешности определения ФЧХ звена запаздывания $\Delta\varphi(\omega\tau)$ при использовании аппроксимантов $P_{n,n}(p\tau)$, $\Pi_{n,n}(p\tau)$ и $R_{n(P11)}(p\tau)$, $n = 1,\ldots,4$ показаны на рис. 2, 3.

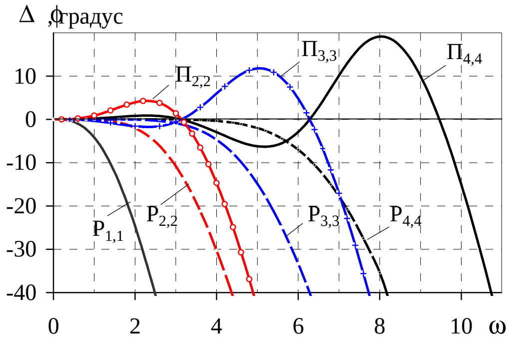

Рис. 2

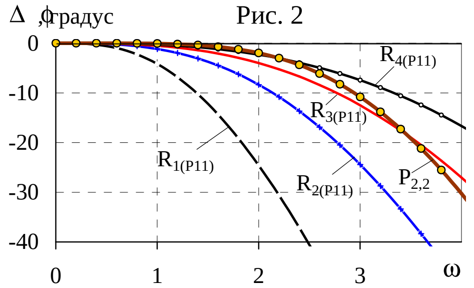

Рис. 3

Используя полученные зависимости $\Delta\phi(\omega\tau)$, можно для каждого звена запаздывания выбрать подходящий аппроксимант, который обеспечит приемлемую точность определения ФЧХ этого звена в низкочастотном диапазоне.

Заметим, что при анализе устойчивости системы по спектру матрицы имеется возможность дискриминации отдельных элементов спектра, поэтому “паразитные” собственные значения, соответствующие полюсам аппроксиманта, можно просто исключить из рассмотрения – независимо от того, как они расположены на комплексной плоскости. Однако из решения системы ОДУ, полученного в результате численного интегрирования, «вырезать» отдельные составляющие не представляется возможным, поэтому наличие у аппроксиманта полюсов в правой полуплоскости может привести к ошибке в прогнозе устойчивости исследуемой системы. В этом случае при выборе функции $F_{m,n}(p\tau)$ возникает вопрос об устойчивости составляющих ее полиномов $B_m(p\tau)$, $A_n(p\tau)$.

Расчеты показали, что при $n \le 5$ аппроксиманты Паде, Тейлора, Пэйнтера и функций (20) – (22) не имеют полюсов в правой полуплоскости, но только функции $T_{0,n}$, $\Pi_{0,n}$, $R_{n(T01)}$ и $R_{n(T02)}$ не имеют в ней также нулей.

Результаты расчета АЧХ и ФЧХ звена запаздывания с использованием аппроксимирующих цепочек различной длины n представлены на рис. 4, 5: на рис. 4 – для цепочек апериодических звеньев (аппроксимантов $R_{n(T01)}$), на рис. 5 – для цепочек колебательных звеньев (аппроксимантов $R_{n(T02)}$). Для сравнения здесь же показаны результаты использования аппроксимантов Паде. Из рис. 4, а) и 5, а) видно, что аппроксимация функциями $R_{n(T01)}$ и $R_{n(T02)}$ вносит большие погрешности в АЧХ звена запаздывания, причем с увеличением n точность аппроксимации увеличивается очень медленно.

Аппроксиманты $T_{0,n}(p\tau)$, $П_{0,n}(p\tau)$ имеют более высокую точность, чем $R_{n(T01)}\,(p\tau)$ (рис. 6). При этом, как и в предыдущем случае, при выборе этих аппроксимантов определяющим фактором является погрешность определения АЧХ звена запаздывания $\Delta A(\omega\tau)$.

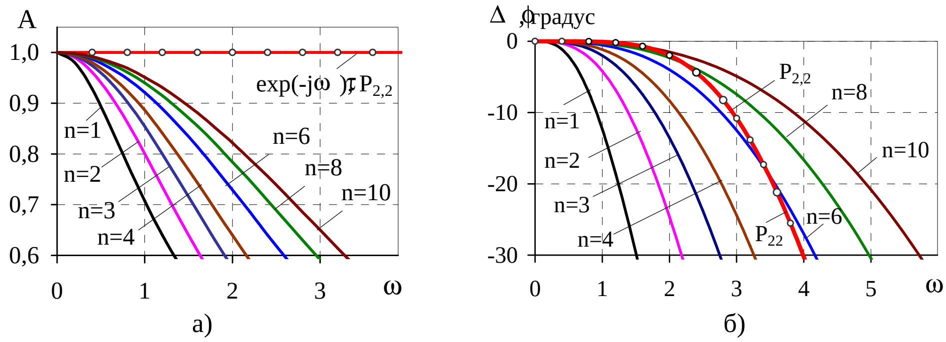

Рис. 4

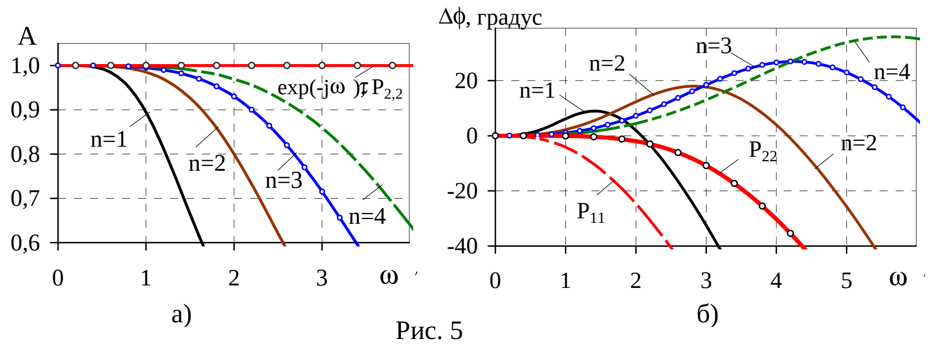

Рис. 5

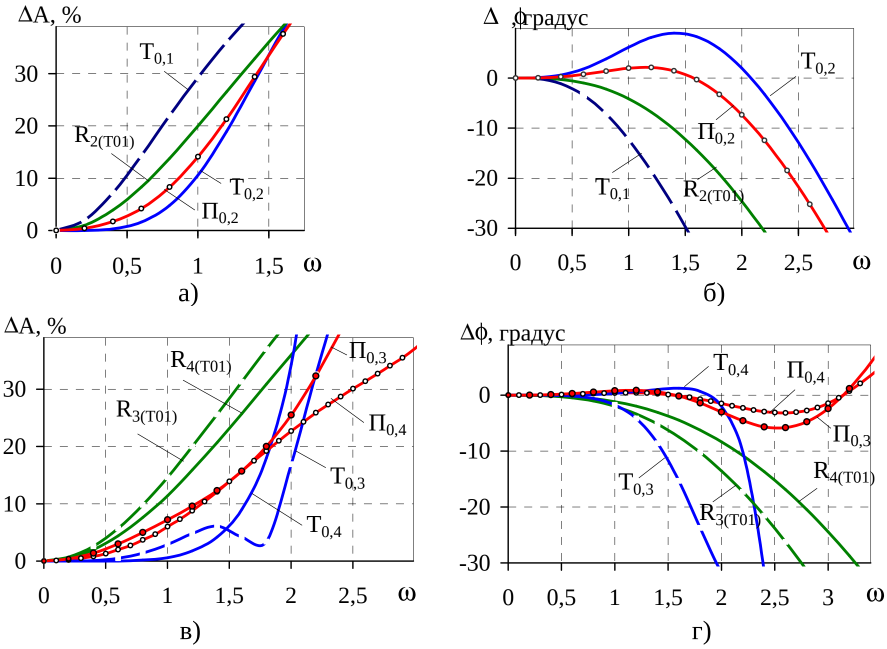

Рис. 6

4. Выбор аппроксимантов для замены уравнений с запаздываниями в математической модели низкочастотной динамики ЖРД обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предварительный выбор аппроксиманта для перехода от уравнения $\delta y_j = \delta x_j \, (t - \tau_{i\,j})$ к ОДУ может быть сделан на основе представленных выше результатов. Для этого следует определить значение $(\omega\tau)_{\max} = 2\pi f_{\max} \tau_{i\,j}$, задать допустимые погрешности вычисления АЧХ и ФЧХ звена запаздывания (ΔA и $\Delta\varphi$) и воспользоваться графиками, приведенными на рис. 2 – 6. Однако такой выбор может привести к неоправданно большому повышению порядка исследуемой системы, поскольку он не зависит от того, влияет ли запаздывание τ_{ij} на динамические характеристики двигателя и насколько велико это влияние.

Таким образом, прежде чем приступать к выбору аппроксимирующих функций, следует обосновать необходимость учета каждого из запаздываний в математической модели низкочастотной динамики ЖРД.

Степень влияния запаздываний на устойчивость ЖРД иногда связывают с их величиной. Так, согласно [7], при моделировании низкочастотных процессов в газовом тракте ЖРД запаздываниями можно пренебречь, если суммарное время запаздываний в тракте (задержки газообразования τ и времени пребывания продуктов сгорания в газовом тракте τ') не превышает 10 % периода колебаний на частоте $f_{\max}$: $\tau + \tau' < 0{,}1 / f_{\max}$.

Для ЖРД без дожигания генераторного газа это условие обычно выполняется, и результаты расчетов подтверждают, что при анализе устойчивости таких ЖРД и продольной устойчивости РН запаздывания в уравнениях динамики ГГ и КС можно не учитывать. Однако для ЖРД с дожиганием генераторного газа величина запаздывания является не единственным фактором, определяющим степень его влияния на устойчивость ЖРД. Так, время пребывания газа в газогенераторе, имея в 2 – 3 раза меньшее значение, чем время пребывания газа в газоводе, может оказывать гораздо большее влияние на устойчивость низкочастотных процессов в ЖРД [10, 12, 13]. Таким образом, вопрос об учете запаздываний при моделировании низкочастотной динамики и анализе устойчивости ЖРД с дожиганием генераторного газа требует отдельного рассмотрения в каждом конкретном случае.

Необходимость учета запаздывания τ_{ij} в математической модели низкочастотной динамики ЖРДУ (4) может быть обоснована его влиянием на комплексные коэффициенты усиления двигателя по каналу давления

$$W_{\text{Д}}(j\omega) = \delta P_K(j\omega) / \delta P_{1O}(j\omega)\,, \quad W_{\text{ДГ}}(j\omega) = \delta P_K(j\omega) / \delta P_{1\Gamma}(j\omega)\,,$$

где $\delta P_K(j\omega)$, $\delta P_{1O}(j\omega)$, $\delta P_{1\Gamma}(j\omega)$ – комплексные амплитуды колебаний давления в камере сгорания, на входе в насос окислителя и насос горючего.

Если в частотном диапазоне $(0,\, f_{\max})$ влияние τ_{ij} мало, то при анализе устойчивости ЖРД это запаздывание в уравнениях (4), (6) можно не учитывать. В противном случае его необходимо учитывать, и для этого нужно выбрать подходящий аппроксимант, а затем по соответствующей схеме перейти от уравнения $\delta y_j = \delta x_j \, (t - \tau_{i\,j})$ к ОДУ.

Выбор аппроксиманта целесообразно проводить на основе результатов расчетов комплексных коэффициентов усиления ЖРД с использованием различных аппроксимирующих функций. Наилучшим будем считать аппроксимант наименьшего порядка, обеспечивающий удовлетворительную точность определения коэффициента усиления в частотном диапазоне $(0,\ f_{\max})$. Такой подход рациональнее и позволит подобрать аппроксимант меньшего порядка, чем дает предварительный выбор. Продемонстрируем его применение при моделировании низкочастотной динамики газовых трактов маршевого ЖРД с дожиганием генераторного газа [12].

Уравнения динамики газовых трактов ЖРД включали пять запаздываний: $\tau'_{гг}=0{,}0049$ с, $\tau_{гг}=0{,}011$ с, $\tau_{гв}=0{,}032$ с, $\tau'_{кс}=0{,}0019$ с, $\tau_{кс}=0{,}0023$ с. Влияние этих запаздываний на модуль расчетного коэффициента усиления ЖРД по линии окислителя иллюстрируют кривые 1, 2 на рис. 7 (кривая 1 – расчет с учетом всех запаздываний; кривая 2 – без учета запаздываний).

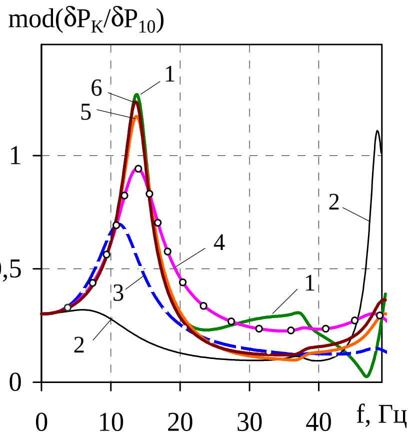

Рис. 7

Предварительный выбор аппроксимирующих функций дал следующие результаты: при $f_{\max}=50$ Гц и $\Delta\varphi\approx 10-15^{\circ}$ для указанных запаздываний следует использовать аппроксиманты $P_{1,1}$ (или $T_{0,2}$), $P_{3,3}$ (или $П_{2,2}$), $П_{4,4}$, $T_{0,1}$, $T_{0,1}$ соответственно. Однако результаты расчетов коэффициента усиления ЖРД показали, что запаздывания в уравнениях динамики КС можно не учитывать, а для уравнений с запаздываниями $\tau'_{гг}$, $\tau_{гг}$ и $\tau_{гв}$ использовать аппроксиманты $T_{0,1}$, $P_{2,2}$, $P_{2,2}$ (вар. № 1) или $T_{0,1}$, $П_{2,2}$, $П_{2,2}$ (вар. № 2). Эти варианты выбора аппроксимантов обеспечивают удовлетворительную точность вычисления модуля коэффициента усиления ЖРД (кривые 5, 6), причем в области его резонансного возрастания погрешность не превышает 5 % и 2 %.

Аппроксиманты 1-го порядка дают значительно худшие результаты. Если для всех уравнений с запаздываниями использовать аппроксиманты Паде $P_{1,1}$ (кривая 4) или Тейлора $T_{0,1}$ (кривая 3), погрешность определения модуля коэффициента усиления ЖРД в резонансной области достигает 30 % и 45 %.

При анализе устойчивости системы «питающие магистрали–ЖРД» по спектру матрицы собственные значения $\lambda_i=\alpha_i+j\omega_i$ матрицы представлялись в виде $\lambda_i=-\delta_i f_i+j\cdot 2\pi f_i$, где f_i, δ_i – i-я собственная частота и соответствующий ей декремент колебаний системы. Рассматривались только собственные значения, расположенные в ограниченной области комплексной плоскости ($0\le\omega_i\le 2\pi f_{\max}$). На рис. 8, 9 результаты расчетов собственных значений показаны в плоскости параметров «$\delta-f$». Расчеты проводились с учетом запаздываний и без учета всех или отдельных запаздываний (рис. 8), а также с учетом запаздываний по разным схемам (рис. 9).

Результаты расчетов показали, что запаздывания практически не влияют на параметры колебаний ЖРДУ, обусловленных динамическими процессами в регуляторе расхода (точки 6) и системе питания ЖРД окислителем (точки 1, 4) и горючим (точки 2, 5). Однако учет запаздываний и, прежде всего, запаздываний в уравнениях динамики ГГ, привел к существенному изменению параметров колебаний (f_3, δ_3) и (f_7, δ_7), связанных с контуром «ТНА – ГГ», при этом собственные частоты f_3 и f_7 увеличились с 8 до 14 Гц и с 45 до 50 Гц, а декременты колебаний δ_3 δ_7 уменьшились с 5 до 0,9 и с 7 до 2,7 (т. е. более чем в 5 раз и в 2,5 раза).

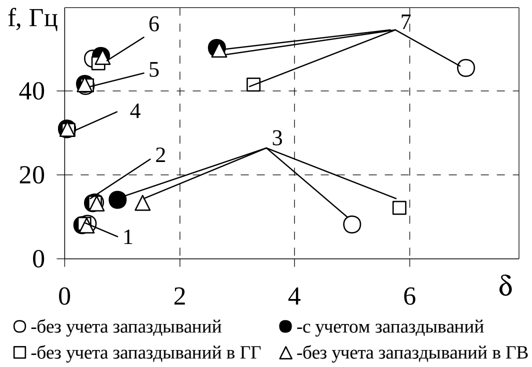

Рис. 8

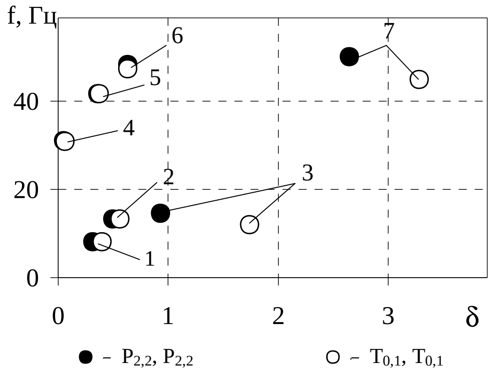

Рис. 9

Существенное влияние на параметры колебаний (f_3, δ_3) и (f_7, δ_7) оказывает точность аппроксимантов, используемых для учета времени пребывания газа в ГГ и ГВ ($\tau_{гг}$ и $\tau_{гв}$). Так, если при переходе от уравнений с запаздываниями к ОДУ для $\tau_{гг}$ и $\tau_{гв}$ вместо аппроксиманта Тейлора $T_{0,1}(p\tau) = 1/(p\tau)$ использовать более точные аппроксиманты Паде $P_{2,2}(p\tau)$, то частота f_3 увеличится с 12 до 14,5 Гц, а декремент колебаний δ_3 уменьшится с 1,7 до 0,9 (рис. 9).

Выводы. Предложен эффективный метод приближенной замены уравнений с запаздываниями в математической модели низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД обыкновенными дифференциальными уравнениями. Метод обеспечивает возможность выполнения анализа устойчивости многоконтурной динамической системы “питающие магистрали – ЖРД”, включающей в себя потенциально неустойчивые подсистемы и многочисленные запаздывания, по спектру матрицы.

Построены схемы приближенной замены уравнения звена запаздывания обыкновенными дифференциальными уравнениями, основанной на аппроксимации передаточной функции звена запаздывания в области малого параметра дробно-рациональными функциями и цепочками дробно-рациональных функций. Предложены различные аппроксиманты передаточной функции звена запаздывания и проведен их сравнительный анализ.

Показана необходимость учета запаздываний в уравнениях динамики газовых трактов при анализе устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД с дожиганием генераторного газа. Предложен рациональный подход к учету запаздываний в уравнениях динамики газовых трактов ЖРД, который позволяет минимизировать усложнение математической модели, неизбежное при замене уравнений с запаздываниями системой ОДУ, и разработаны методические рекомендации по их учету.

Эффективность предложенного метода показана на примере анализа устойчивости перспективного маршевого ЖРД с дожиганием генераторного газа.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании низкочастотной динамики газовых трактов и анализе устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД.

1. *Солнцев В. Л., Радугин И. С., Задеба В. А.* Основные требования к маршевым двигателям перспективных ракет-носителей сверхтяжелого класса с жидкостными ракетными двигателями. Космическая техника и технологии. 2015. № 2(9). С. 25–38.
2. *Гликман Б. Ф.* Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 396 с.
3. *Алемасовв В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П.* Теория ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1980. 533 с.
4. *Натанзон М. С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
5. *Шевяков А. А., Калнин В. М., Науменкова М. В., Дятлов В. Г.* Теория автоматического управления ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978. 288 с.
6. *Беляев Е. Н., Черваков В. В.* Математическое моделирование ЖРД. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. 280 с.
7. *Oppenheim B. W., Rubin S.* Advanced Pogo Stability Analysis for Liquid Rockets. Journal of Spacecraft and Rockets. 1993. Vol. 30, No. 3. P. 360–383.
8. *Liu Wei, Chen Liping, Xie Gang, Ding Ji, Zhang Haiming, Yang Hao* Modeling and Simulation of Liquid Propellant Rocket Engine Transient Performance Using Modelica Proceedings of the 11th International Modelica Conference September 21–23, 2015, Versailles. France. P. 485–490. URL: www.ep.liu.se/ecp/118/052/ecp15118485.pdf от 13.07.2017
9. *Пилипенко В. В.* Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение, 1977. 352 с.
10 *Хоряк Н. В., Николаев А. Д.* Декомпозиция и анализ устойчивости динамической системы “питающие магистрали – маршевый ЖРД с окислительной схемой дожигания генераторного газа”. Техническая механика. 2007. № 1. С. 28–42.
11. *Хоряк Н. В.* Анализ устойчивости многоконтурной динамической системы “ЖРД – корпус РН” по спектру матрицы: методические основы и приложение. Авиационно-космическая техника и технология. 2007. № 9(45). С. 87–91.
12. *Пилипенко О. В., Прокопчук А. А., Долгополов С. И., Хоряк Н. В., Николаев А. Д., Писаренко В. Ю., Коваленко В. Н.* Математическое моделирование и анализ устойчивости низкочастотных процессов в маршевом ЖРД с дожиганием генераторного газа. Вестник двигателестроения. 2017. № 2. С. 34–42.
13. *Хоряк Н. В., Чернявский О. Е.* К оценке устойчивости систем с запаздываниями по спектру матрицы. Динамика гидросистем энергетических установок летательных аппаратов. К.: Наукова думка, 1991. С. 16–23.
14. *Титов Н. И., Успенский В. К.* Моделирование систем с запаздыванием. Л.: Энергия, 1969. 97 с.
15. *Takahashi S., Yamanaka K., Yamada M.* Detection of dominant poles of systems with time delay by using Pade approximation. Int.J.Control. 1987. Vol. 45. № 1. P. 251–254.
16. *Jang Ching You, Chen Chao-Kuang.* Analysis and parameter identification of time-delay system via Taylor series. Int. J. Systems Sci. 1987. Vol. 18. № 7. P. 1347–1353.
17. *Balchen J. G.* Rational transfer function approximations to transport delay. Modelling, Identification and Control. 1990. Vol. 11. № 3. P. 127–140.
18. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
19. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
20. *Апресян Л. А.* Аппроксиманты Паде (обзор). Известия вузов (ИВУЗ). Радиофизика. 1979. Т. XXII, № 6. С. 653–674.
21. *Хоряк Н. В.* Аппроксимация экспоненты модифицированным методом Пэйнтера. Прикладные задачи гидрогазодинамики и тепломассообмена в энергетических установках. К.: Наукова думка, 1989. С. 120–125.
22. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
23. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами. Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 2. С. 229–235.

Получено 29.09.2017,
в окончательном варианте 04.10.2017