УДК 621.455(075.8)

В. С. СЕНЬКИН

К ВОПРОСУ О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА ТВЁРДОМ ТОПЛИВЕ

Сформулирована задача оптимизации проектных параметров ракетного двигателя на твёрдом топливе (РДТТ) как задача нелинейного математического программирования с ограничениями типа равенств и неравенств. Приведены элементы математической модели РДТТ и алгоритм, позволяющие на начальном этапе проектирования определять конфигурацию и габаритные размеры заряда с щелевыми проточками в области переднего днища камеры сгорания. В состав оптимизируемых параметров РДТТ включены геометрические параметры, характеризующие начальную конфигурацию заряда, что позволит в результате решения задачи выбрать такую конфигурацию, которая в процессе работы РДТТ обеспечит требуемую программу изменения во времени тяговых характеристик двигателя.

Сформульована задача оптимізації проектних параметрів ракетного двигуна на твердому паливі (РДТП) як задача нелінійного математичного програмування з обмеженнями типу рівностей і нерівностей. Приведені елементи математичної моделі РДТП і алгоритм, що дозволяють визначити на початковому етапі проектування конфігурацію й габаритні розміри заряду із щілинними проточками в області переднього днища камери згоряння. До складу параметрів РДТП, які оптимізуються, включені геометричні параметри, що характеризують початкову конфігурацію заряду, і це дозволить у результаті розв'язання задачі вибрати таку конфігурацію, яка у процесі роботи РДТП забезпечить необхідну програму зміни в часі тягових характеристик двигуна.

The problem of the optimization the design parameters of the solid rocket motor as a nonlinear mathematical programming problem with equality/inequality constraints is formulated. The elements of a mathematical model of the solid rocket motor and an algorithm for the determination of the configuration and overall dimensions of the charge with the slotted ductules in the front bottom of the combustion chamber at the initial design stage are presented. The structure of the optimized parameters of the solid rocket motor includes geometric parameters characterizing the initial charge configuration resulting in the selection of such a configuration, which will provide a required program of variations in time of a thrust performance of the motor during the solid rocket motor operation.

Ключевые слова: *Ракетный двигатель на твёрдом топливе, проектные параметры, оптимизация*

Введение Из всех типов ракетных двигателей, применяемых в качестве двигательных установок (ДУ) объектов ракетно-космической техники (РКТ) различного назначения, ракетные двигатели твёрдого топлива (РДТТ) являются, наряду с жидкостными ракетными двигателями, одними из наиболее распространенных. Это подтверждается широким применением РДТТ в качестве маршевых ДУ в объектах РКТ от оперативно-тактических ракет до ракет-носителей (РН) различных классов, использованием РДТТ для торможения отработавших ступеней РН, а также для дополнительного разгона космических аппаратов при переходах с переходных орбит на требуемые конечные орбиты. Кроме того, ДУ на основе РДТТ нашли широкое применение в качестве ускорителей с целью повышения энергетических возможностей РН и расширения круга решаемых ими целевых задач. Вышесказанное определяет актуальность исследований, которые связаны с разработкой современного методического обеспечения, включающего постановку задач, создание математических моделей, алгоритмов и программ для решения задач начального этапа проектирования объектов РКТ и, в частности, ракетных двигателей на твёрдом топливе.

В статье, применительно к начальному этапу проектирования, сформулирована задача оптимизации проектных параметров и основных характеристик маршевых РДТТ в составе твёрдотопливной ракеты-носителя (ТРН), а также приведены отдельные элементы математической модели РДТТ, необ-

© В. С. Сенькин, 2014

ходимые для решения рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Одной из проблем, решаемых на начальном этапе проектирования ТРН, является определение рациональных значений проектных параметров и основных характеристик маршевых РДТТ. Следует отметить [1, 2], что задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления ТРН существенно отличается от аналогичной задачи [3] для жидкостных РН. Основное отличие заключается в том, что для жидкостных РН требуемые программы изменения тяг маршевых двигателей в полёте могут быть обеспечены соответствующей регулировкой секундного расхода продуктов сгорания ракетного топлива [4]. Регулировка же тяг маршевых РДТТ технически трудно реализуема, а изменение тяг во времени в этом случае определяется начальными конфигурациям и зарядов и характеристиками твердых ракетных топлив (ТРТ). Это приводит к необходимости осуществлять оптимизацию проектных параметров ТРН и программ управления движением совместно с проектными параметрами маршевых РДТТ. При этом в состав оптимизируемых параметров должны быть включены геометрические параметры, характеризующие начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ [1, 2].

Включение в состав основных проектных параметров ТРН параметров, определяющих основные характеристики маршевых РДТТ, приводит, особенно для многоступенчатых ТРН, к существенному увеличению количества оптимизируемых параметров. Этот фактор значительно осложняет решение комплексной задачи оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ТРН.

Одним из возможных путей решения указанной проблемы является декомпозиция комплексной задачи на две более простые задачи с меньшим количеством оптимизируемых параметров. Так, в первой задаче (далее задача 1) в качестве целевого функционала выбрана масса полезного груза $m_{пг}$, выводимая на заданную орбиту, а результат решения – совместная оптимизация основных проектных параметров ТРН, программ управления движением и части параметров, характеризующих маршевые РДТТ [2]. Во второй задаче (далее задача 2) в качестве целевой функции выбран квадрат среднеинтегрального отклонения расчётной программы изменения тяги маршевого РДТТ от требуемой программы, полученной в результате решения задачи 1, а результат решения – оптимизация геометрических параметров, характеризующих начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ. При этом следует отметить, что задача 2, при сформированных в задаче 1 значениях оптимизируемых параметров и требуемой программы изменения тяги маршевого РДТТ, может быть решена отдельно для каждого маршевого РДТТ i-й ступени ТРН.

Комплексная задача совместной оптимизации основных проектных параметров ТРН, программ управления движением и проектных параметров маршевых РДТТ (задача 1) сформулирована в [2], где предложен метод её решения, а также приведены элементы математической модели, позволяющие сформировать в зависимости от основных проектных параметров программы управления движением ТРН, включающие программу изменения во времени угла тангажа и программы изменения тяг маршевых РДТТ i-х ступеней ТРН.

Далее рассматривается постановка задачи оптимизации геометрических параметров зарядов маршевых РДТТ (задача 2) для случая, когда известны или сформированы основные проектные параметры ТРН и оптимизируемые совместно с ними параметры, характеризующие маршевые РДТТ, а также определены требуемые программы изменения во времени тяг маршевых двигателей.

Задача сформулирована как задача нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. В качестве целевой функции $I = I\left(\overline{p}_{PH}, \overline{p}_{ДУ_i}, \overline{x}\right)$, как уже отмечалось ранее, рассматривается квадрат среднеинтегрального отклонения программы изменения тяги маршевого РДТТ на основном режиме работы от требуемой программы, определяемой в зависимости от основных проектных параметров конкретной ступени ТРН

$$I\left(\overline{p}_{PH}, \overline{p}_{ДУ_i}, \overline{x}\right) = \int\limits_0^{t_{oci}} \left[P\left(\overline{p}_{PH}, \overline{p}_{ДУ_i}, \overline{x}, t\right) - P_{mp\,i}\left(\overline{p}_{PH}, \overline{x}, t\right)\right]^2 \cdot dt \to \min_{\overline{p}_{ДУ_i}}, \qquad (1)$$

где $\overline{p}_{PH} = \left(p_{PH_j}\right), j = \overline{1,n}$ – вектор основных проектных параметров ТРН, который предполагается заданным либо сформирован модулем, реализующим используемый метод оптимизации при выборе основных проектных параметров ТРН; $\overline{p}_{ДУ_i} = \left(p_{ДУ_j}\right), \ j = \overline{1,m}, \ i = \overline{1, N_{cm}}$ – вектор оптимизируемых параметров маршевого РДТТ i-й ступени ТРН; N_{cm} – количество ступеней ТРН; $\overline{x} = \left(x_j\right), j = \overline{1,r}$ – вектор исходных данных; t_{oci} – продолжительность основного режима работы маршевого РДТТ i-й ступени ТРН; $P\left(P_{PH}, P_{ДУ}, \overline{x}, t\right), P_{mp\,i}\left(\overline{p}_{PH}, \overline{x}, t\right)$ – расчётная и требуемая программы изменения тяги маршевого РДТТ i-й ступени ТРН на основном режиме работы.

Зависимость целевой функции (1) от вектора основных проектных параметров ТРН $\overline{p}_{PH}$ и векторов проектных параметров маршевых РДТТ i-х ступеней $\overline{p}_{ДУ_i}$ дает возможность в конечном итоге решить комплексную задачу совместной оптимизации основных проектных параметров ТРН и проектных параметров маршевых двигателей.

В качестве основных проектных параметров ТРН [1, 2] и оптимизируемых совместно с ними параметров маршевых РДТТ рассматриваются: коэффициенты начальных тяговооруженностей i-х ступеней ТРН в пустоте $\nu_{n\,i}, i = \overline{1, N_{cm}}$; коэффициенты ζ_i, определяющие зависимость требуемых значений тяг маршевых РДТТ от времени; относительные конечные массы i-х ступеней ТРН $\mu_{k\,i}$; давления в камерах сгорания маршевых РДТТ $p_{k\,i}$; диаметры срезов сопел $D_{a\,i}$.

Коэффициенты начальных тяговооруженностей $\nu_{n\,i}$ и относительные конечные массы $\mu_{k\,i}$ i-х ступеней ТРН определяется известными соотношениями [1, 2]:

$$\nu_{n\,i} = \frac{g_0 \cdot m_{0\,i}}{P^{н}_{осн\,i}}; \quad \mu_{k\,i} = \frac{m_{k\,i}}{m_{0\,i}}, \tag{2}$$

где g_0 – ускорение силы тяжести у поверхности Земли; $m_{0\,i}$, $m_{k\,i}$ – стартовая и конечная массы i-й ступени ТРН; $P^{н}_{осн\,i}$ – тяга в пустоте маршевого РДТТ i-й ступени ТРН в начале основного режима работы.

При формировании программ изменения тяг маршевых РДТТ i-х ступеней ТРН на основном режиме работы предполагается линейная зависимость тяг от времени [1, 2], которая характеризуется проектным параметром ТРН – коэффициентом ζ_i, определяемым по формуле

$$\zeta_i = \frac{P^{н}_{осн\,i}}{P^{к}_{осн\,i}}, \tag{3}$$

где $P^{к}_{осн\,i}$ – пустотная тяга маршевого РДТТ i-й ступени ТРН в конце основного режима работы.

С учётом соотношений (2) требуемая программа изменения тяги маршевого РДТТ i-й ступени ТРН во времени на основном режиме работы двигателя может быть определена соотношением

$$P_{тр\,i}\left(\overline{p}_{PH}, \overline{x}, t\right) = P^{н}_{осн\,i} \cdot \left[1 + \frac{1-\zeta_i}{\zeta_i \cdot t_{ос\,i}} \cdot t\right]. \tag{4}$$

Введение в состав основных проектных параметров ТРН части оптимизируемых параметров маршевых РДТТ, таких как давления в камерах сгорания, диаметры срезов сопел, вызвано тем фактом, что эти параметры в конечном итоге влияют на величину целевого функционала $m_{пг}$ задачи 1, а также на внешнебаллистические, энергетические, габаритно-массовые характеристики ТРН, что собственно и вызывает необходимость их совместной оптимизации одновременно с основными проектными параметрами ТРН.

При дальнейшем изложении материала, связанного с постановкой задачи оптимизации проектных параметров маршевого РДТТ i-й ступени ТРН, в соотношениях и формулах индекс "i" будет опущен, поскольку задача формализуется для маршевого РДТТ конкретной ступени ТРН.

Оптимизируемые параметры двигателя в формулируемой задаче целесообразно разделить на две группы $\overline{p}_{ДУ} = \{\overline{c}, \overline{s}\}$ [1, 2]. К первой группе [вектор $\overline{c} = (c_j), j = \overline{1,m}$] отнесены структурные параметры, изменяющиеся дискретно и определяющие облик, структуру, состав и конструктивно-компоновочную схему двигателя. Ко второй группе отнесены основные проектные параметры двигателя [вектор $\overline{s} = (s_j), j = \overline{1,l}$], изменяющиеся непрерывно, которые позволяют определять: начальную конфигурацию заряда ТРТ, а также, с использованием известных математических моделей [1, 2, 5 – 9 и др.], энергетические, тяговые, расходные, прочностные и габаритно-массовые характеристики РДТТ. Поскольку часть параметров, характеризующих маршевый РДТТ, оптимизируется совместно с основными проектными параметрами

ТРН, то фактически в качестве основных проектных параметров двигателя в предлагаемой постановке выступают параметры, характеризующие начальную конфигурацию заряда ТРТ. С использованием этих параметров могут быть определены значение целевой функции (1), характеризующей качество проектирования, а также основные характеристики РДТТ.

С учетом вышеизложенного, задача оптимизации проектных параметров маршевого РДТТ в составе ТРН формулируется следующим образом. Необходимо определить оптимальные значения геометрических параметров заряда РДТТ (вектор $\bar{s}^*$), обеспечивающие при заданных значениях основных проектных параметров ТРН (вектор $\bar{p}_{PH}$), проектных параметров РДТТ, оптимизируемых совместно с параметрами ТРН, и вектора $\bar{c}$ минимальное значение следующей целевой функции

$$I\left(\bar{c},\bar{s},\bar{x}\right)=\int_{0}^{t_{oc}}\left[P\left(\bar{p}_{PH},\bar{c},\bar{s},\bar{x},t\right)-P_{mp}\left(\bar{p}_{PH},\bar{x},t\right)\right]^2\cdot dt\rightarrow\min_{\bar{s}} \qquad (5)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
&\bar{c}\in\tilde{C}^m,\ \tilde{C}^m\subset C^m,\\
&\bar{s}\in\tilde{S}^l,\tilde{S}^l\subset S^l,\\
&\bar{x}\in\tilde{X}^r,\tilde{X}^r\subset X^r,\\
&\bar{p}_{PH}\in\tilde{P}^n_{PH},\ \tilde{P}^n_{PH}\subset P^n_{PH},\\
&v_k\le V_{nop},\\
&F=R(Z),\ Z=\tilde{C}^m\times\tilde{S}^l\times\tilde{X}^r\times\tilde{P}^n_{PH},
\end{aligned} \qquad (6)$$

где $\tilde{C}^m$ – замкнутая область в дискретном векторном пространстве C^m, в которой может принимать значения вектор $\bar{c}$; $\tilde{S}^l$, $\tilde{X}^r$, $\tilde{P}^n_{PH}$ – замкнутые области в действительных векторных пространствах S^l, X^r, P^n_{PH}, в которых могут принимать значения векторы $\bar{s},\bar{x},\bar{p}_{PH}$, соответственно; v_k – расчётная скорость газового потока на выходе из канала заряда; V_{nop} – значение пороговой скорости газового потока, при которой возникает эрозионное горение ТРТ; $F=R(Z)$ – оператор с областью определения на множестве $Z=\bar{C}^m\times\tilde{S}^l\times\tilde{X}^r\times\tilde{P}^n_{PH}$ и областью значений на множестве F, сопоставляющий каждому элементу множества $z(\bar{c},\bar{s},\bar{x},\bar{p}_{PH})\in Z$ множество выходных характеристик РДТТ $\tilde{F}\subset F$.

Наличие в ограничениях (6) неравенства $v_l\le V_{nop}$ даёт возможность в результате оптимизации целевой функции (5) получить такую начальную конфигурацию заряда РДТТ, при которой обеспечивается максимально допустимое по условиям неэрозионного горения заполнение камеры сгорания РДТТ топливом. При дальнейшем изложении материала указанное неравенство заменяется равенством $f_v\cdot v_l=V_{nop}$, в котором коэффициент безопасности по скорости движения продуктов сгорания $f_v>1$.

Входящая в целевую функцию (5) требуемая программа изменения тяги маршевого РДТТ $P_{mp}(\overline{p}_{PH},\overline{x},t)$ в зависимости от основных проектных параметров ТРН определяется по соотношению (4).

Рабочий запас топлива $m^{p}_{m\,i}(\overline{p}_{PH})$, расходуемый на основном режиме работы двигателя, верхний предел интегрирования $t_{oc\,i}$ в целевой функции (5), равный продолжительности работы маршевого РДТТ на основном режиме $t_{oc\,i}(\overline{p}_{PH})$ i-й ступени ТРН в предположении, что удельная тяга двигателя в пустоте $P^{пуст}_{уд\,i}$ на основном режиме работы постоянна, могут быть определены в зависимости от основных проектных параметров ТРН по соотношениям:

$$m^{p}_{m\,i}(\overline{p}_{PH}) = m_{0\,i}\cdot\left(1-\mu_{k\,i}\right), \tag{7}$$

$$t_{oc\,i}(\overline{p}_{PH}) = \frac{2\cdot m^{p}_{m\,i}\cdot P^{пуст}_{уд\,i}\cdot\zeta_i}{P^{н}_{осн\,i}\cdot(1+\zeta_i)}\;. \tag{8}$$

Предварительный анализ целевой функции (5), а также наличие ограничения на скорость движения продуктов сгорания ТРТ v_l на выходе из канала заряда, где она принимает максимальное значение, делают целесообразным разделение вектора геометрических параметров заряда на четыре группы: $\overline{s}=\{\overline{s}_1,\overline{s}_2,\overline{s}_3,\overline{s}_4\}$.

Первая группа (вектор $\overline{s}_1$) включает параметры, которые оказывают наиболее существенное влияние на изменение поверхности горения заряда ТРТ во времени и, соответственно, тяги и расхода продуктов сгорания в процессе работы двигателя. Эта группа параметров определяется из условия минимума целевой функции (5). Вторая группа (вектор $\overline{s}_2$) включает параметры, значения которых не оказывают существенного влияния на характер изменения поверхности горения и габаритные размеры заряда. Эта группа параметров обычно задаётся по статистике или определяется из технологических соображений с использованием информации по прототипам ранее разработанных зарядов ТРТ. Третья группа (вектор $\overline{s}_3$) включает параметры заряда, определяемые в зависимости от основных проектных параметров ТРН и геометрических параметров заряда первой и второй групп. Четвертая группа (вектор $\overline{s}_4$) включает параметры, выбор которых осуществляется из условия обеспечения неэрозионного горения в камере сгорания в начальный период работы двигателя.

Элементы математической модели РДТТ. Далее для одной из типовых форм заряда [5, 8] с четырьмя щелевыми проточками в области переднего днища, приведенной на рис. 1, рассматривается определение всех компонентов вектора $\overline{s}=\{\overline{s}_1,\overline{s}_2,\overline{s}_3,\overline{s}_4\}$, характеризующего начальную конфигурацию заряда.

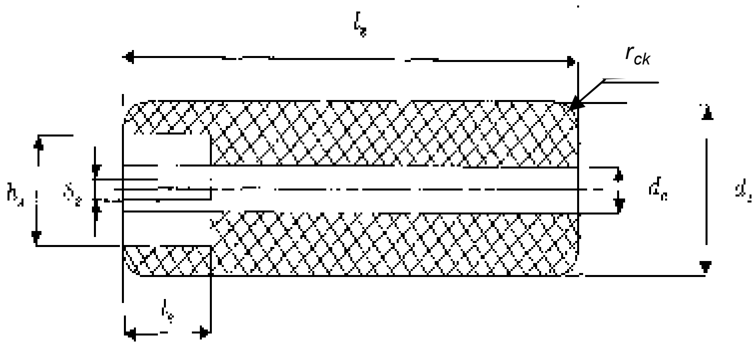

Рис. 1

В первую группу (вектор $\bar{s}_1$) включены параметры h_s и l_s, определяющие геометрическую конфигурацию щелевой протоки, которые формируются методом оптимизации в процессе минимизации целевой функции (5). Ко второй группе (вектор $\bar{s}_2$) отнесены параметр δ_s, задающий ширину щелевой проточки, а также радиус r_{ck} окружности, формирующей при вращении её вокруг продольной оси заряда z часть поверхности горения в передней и задней торцевых частях заряда ТРТ. Как указывалось ранее, эти параметры задаются либо по статистике, либо определяются из технологических соображений. К третьей группе (вектор $\bar{s}_3$) отнесены длина l_z и наружный диаметр заряда d_z. К четвертой группе (вектор $\bar{s}_4$) отнесён диаметр d_k канала заряда, определяемый из условия неэрозионного горения ТРТ в камере сгорания РДТТ.

Таким образом, для определения начальной конфигурации заряда ТРТ при сформированных значениях геометрических параметров, отнесённых к первой $\bar{s}_1$ и второй $\bar{s}_2$ группам, необходимо определить параметры третьей $\bar{s}_3$ и четвёртой $\bar{s}_4$ групп.

Уменьшение площади проходного сечения канала заряда, диктуемое требованием максимального заполнения двигателя твёрдым ракетным топливом, приводит к увеличению скорости движения продуктов сгорания, которая принимает максимальное значение на выходе из канала заряда. При достижении скоростью порогового значения $v_k = V_{пор}$ возникает эрозионное горение ТРТ, основными причинами возникновения которого являются резкое возрастание теплоподвода к поверхности горения, активизирующего химические реакции, а также сдувание жидких и пенообразных частиц с поверхности горения высокоскоростным газовым потоком [8, 9]. Указанные факторы вызывают резкое возрастание давления в камере сгорания РДТТ и в конечном итоге могут привести к аварийной ситуации на начальном этапе функционирования РДТТ. В связи с этим минимальное значение диаметра канала заряда d_k должно определяться с учётом перечисленных выше факторов, а именно, из условия обеспечения неэрозионного горения в камере сгорания РДТТ. По мере разгорания заряда ТРТ и увеличения за счёт этого площади проходного сечения канала скорость обдува поверхности горения уменьшается и эрозионное горение прекращается [8].

Течение продуктов сгорания в канале заряда может быть описано системой уравнений газовой динамики в частных производных [8]. Однако её использование на начальном этапе проектирования ТРН наталкивается на значительные трудности, связанные с формулировкой граничных условий, необходимостью решения краевой задачи для этой системы, а также отсутствием необходимых исходных данных. В большинстве практически важных случаев система уравнений газовой динамики может быть упрощена на основе гипотезы квазистационарности, т. е. предположения о том, что неоднородности, обусловленные неустановившимся течением продуктов сгорания ТРТ, пренебрежимо малы [6, 8, 10]. Использование этой гипотезы позволяет определить изменение газодинамических параметров потока в канале заряда в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8]. Однако и в этом случае возникают трудности, связанные с многократным решением краевой задачи в процессе оптимизации геометрических параметров заряда ТРТ.

С учётом вышеизложенного практический интерес представляет предлагаемый далее подход, позволяющий в первом приближении для начального этапа проектирования ТРН определить минимально допустимую площадь проходного сечения канала и начальную конфигурацию заряда, при которой в камере сгорания РДТТ не возникает эрозионного горения ТРТ в начальный период работы двигателя.

В предположении, что в канале заряда отсутствует эрозионное горение ТРТ, суммарный секундный газоприход m_{np} с поверхности горения заряда в начале основного режима работы двигателя может быть определён по соотношению

$$m_{np} = \frac{P_{осн}^{н}}{P_{уд}^{пуст}} = \rho_{kan} \cdot v_k \cdot \frac{\pi \cdot d_k^2}{4} + \rho_m \cdot u_1 \cdot (p)^{\nu} \cdot S_k \,, \tag{9}$$

где ρ_{kan} , v_k – плотность и скорость продуктов сгорания на выходе из канала заряда; ρ_m – плотность ТРТ; u_1 , ν – параметры закона горения ТРТ, p – давление в предсопловом объёме камеры сгорания РДТТ.

Для начального этапа проектирования РДТТ в первом приближении давление в предсопловом объёме может быть принято равным давлению торможения $p^* \approx p_k$, где p_k – давление в камере сгорания, оптимизируемое совместно с основными проектными параметрами ТРН.

Входящая в соотношение (9) суммарная площадь поверхности горения торцевой части заряда, обращённой к сопловому блоку S_k , предполагается состоящей из двух частей, одна из которых – S_m формируется вращением четверти окружности

$$(z)^2 + [y - (r_z - r_{ck})]^2 = r_{ck}^2 \tag{10}$$

вокруг продольной оси заряда z , а вторая часть поверхности горения S_{kl} представляет собой площадь кольца, внешний диаметр которого равен $d_{zk} = d_z - 2 \cdot r_{ck}$, а внутренний – диаметру канала заряда d_k

$$S_k = S_m + S_{kl} \,. \tag{11}$$

Входящая в соотношение (11) площадь кольца S_{kl} определяется по следующей зависимости

$$S_{kl} = \pi \cdot \left[(r_z - r_{ck})^2 - r_k^2 \right], \tag{12}$$

где r_z – наружный радиус заряда ТРТ; r_k – радиус канала заряда.

Часть площади торовой поверхности, образующей поверхность горения в торцевой части заряда, определяется как площадь поверхности вращения по соотношению

$$S_m = 2 \cdot \pi \cdot r_{ck} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot r_z + r_{ck} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \tag{13}$$

Наружный радиус заряда ТРТ r_z, входящий в формулы (10) – (13), определяется зависимостью

$$r_z = r_k + e_{\max}. \tag{14}$$

Максимальная толщина сгорающего за период полного времени работы РДТТ свода заряда $e_{\max}$ может быть определена следующим образом.

В случае если начальная конфигурация заряда ТРТ выбирается из условия обеспечения близкого к постоянному давления в камере сгорания в процессе работы двигателя $p_k(t) \approx \mathrm{const}$, то максимальная толщина сгоревшего свода определяется формулой

$$e_{\max} = u_1 \cdot (p_k)^{\nu} \cdot t_{oc}. \tag{15}$$

Если начальная конфигурация заряда ТРТ выбирается из условия обеспечения близкого к линейному изменения давления в камере сгорания во времени $p_k(t) = K \cdot t + p_{k\,n}$, то максимальная толщина сгоревшего свода $e_{\max}$ определится соотношением

$$e_{\max} = \int_0^{t_{oc}} u_1 \cdot p_k^{\nu}(t) \cdot dt = \frac{u_1 \cdot \left[(p_{k\,n} + K \cdot t_{oc})^{\nu+1} - (p_{k\,n})^{\nu+1} \right]}{K \cdot (\nu + 1)}, \tag{16}$$

где верхний предел интегрирования t_{oc} определяется в зависимости от основных проектных параметров ТРН по формулам (7), (8).

Давление в камере сгорания $p_{k\,n}$ при заданной величине тяги в начале основного режима работы РДТТ определяется по соотношению [6, 9]

$$p_{k\,n} = \frac{P_{осн}^{н} \cdot \sqrt{\chi \cdot R \cdot T_г}}{P_{уд}^{пуст} \cdot A_n \cdot F_{kr}}, \tag{17}$$

где χ – коэффициент теплопотерь в камере сгорания РДТТ, задаваемый на начальном этапе проектирования в исходных данных; R – газовая постоянная продуктов сгорания ТРТ; $T_г$ – температура горения ТРТ: F_{kr} – площадь критического сечения сопла.

Коэффициент истечения A_n в соотношении (17) дается зависимостью

$$A_n = \sqrt{k \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}, \tag{18}$$

где k – показатель изоэнтропы продуктов сгорания.

Входящий в соотношение (16) параметр K определяется по формуле

$$K = \frac{p_{k\,n} \cdot (1-\zeta)}{\zeta \cdot t_{oc}}. \qquad (19)$$

Параметры газового потока на выходе из канала заряда – плотность ρ_{kan} и статическое давление p_{kan} – могут быть определены с помощью известного из газовой динамики интеграла Лагранжа–Бернулли [8, 9] и газодинамических функций [10]:

$$p_{kan} = p_{k\,n} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2\right)^{k/(k-1)},$$

$$\rho_{kan} = \frac{\dfrac{k}{k-1} \cdot p_{kan}}{\dfrac{k}{k-1} \cdot \chi \cdot R \cdot T_г - \dfrac{v_k^2}{2}}, \qquad (20)$$

$$\lambda = \frac{v_k}{\sqrt{\dfrac{2 \cdot k}{k+1} \cdot \chi \cdot R \cdot T_г}}.$$

Скорость продуктов сгорания на выходе из канала заряда в формулах (20) принимается равной $v_k = \dfrac{V_{пор}}{f_v}$, при которой на выходе из канала заряда не возникает эрозионного горения ТРТ.

С использованием соотношений (9) – (20) могут быть определены радиус канала r_k и наружный радиус заряда r_z.

Полная длина заряда l_z при сформированных значениях основных проектных параметров ТРН, параметров первой $\vec{s}_1$ и второй $\vec{s}_2$ групп и радиусов r_k и r_z определяется далее из условия размещения рабочего запаса топлива в камере сгорания РДТТ. Для этого необходимо определить свободный (не занятый ТРТ) объём V_{cv} в области щелевых проточек

$$V_{cv} = \left(2 \cdot h_s \cdot \delta_s - \delta_s^2\right) \cdot l_s + 4 \cdot \left[F_k - \frac{\delta_s}{2} \cdot (b-a)\right] \cdot l_s, \qquad (21)$$

где первое слагаемое определяет свободный объём в области щелевых проточек, а второе слагаемое – остальной объём, создаваемый каналом заряда.

Входящие в соотношение (21) величины a и b определяются соотношениями

$$a = \frac{\delta_s}{2}, \quad b = r_k \cdot \cos\alpha, \quad \alpha = \arcsin\frac{\delta_s}{2 \cdot r_k}. \qquad (22)$$

Одна четвёртая часть площади проходного сечения F_k, которая находится под дугой окружности $y = \sqrt{r_k^2 - x^2}$, определяется по зависимости

$$F_k = \int_a^b \sqrt{r_k^2 - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{r_k^2 - x^2} + r_k^2 \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{r_k^2 - x^2}} \right) \right]\Bigg|_a^b, \quad (23)$$

в которой пределы интегрирования a и b задаются соотношениями (22).

Объём V_m и масса топлива $m_{m\,sh}$, располагаемого в области расположения щелевых проточек, определяются по следующим зависимостям:

$$V_m = V_{ckr} + V_{cil} - V_{cv}, \quad (24)$$

$$m_{m\,sh} = V_m \cdot \rho_m, \quad (25)$$

где V_{ckr} – объём тела вращения, создаваемый вращением верхней части окружности, определяемой формулой (10), вокруг продольной оси заряда z; V_{cil} – объём цилиндрической части заряда в области щелевых проточек.

Объёмы V_{ckr} и V_{cil} определяются соотношениями

$$V_{ckr} = \pi \cdot \int_0^{r_{ck}} \left(b + \sqrt{r_{ck}^2 - x^2} \right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \left(b^2 \cdot r_{ck} + \frac{\pi}{2} \cdot b \cdot r_{ck}^2 + \frac{2}{3} \cdot r_{ck}^3 \right), \quad (26)$$

$$V_{cil} = \pi \cdot r_z^2 \cdot \left(l_s - r_{ck} \right), \quad (27)$$

$$b = r_z - r_{ck}. \quad (28)$$

Объём $V_{m\,z}$ и масса $m_{m\,z}$ топлива, располагаемого в скруглённой части заряда, обращённой к сопловому блоку, вычисляются по формулам:

$$V_{m\,z} = V_{ckr} - \pi \cdot r_k^2 \cdot r_{ckr}, \qquad m_{m\,z} = V_{m\,z} \cdot \rho_m. \quad (29)$$

Объём $V_{m\,cil}$ и масса $m_{m\,cil}$ топлива, располагаемого в цилиндрической части заряда, определяются аналогичными зависимостями

$$V_{m\,cil} = \pi \cdot \left(r_z^2 - r_k^2 \right) \cdot l_{cil}, \qquad m_{m\,cil} = V_{m\,cil} \cdot \rho_m. \quad (30)$$

С учётом соотношений (29), (30) могут быть в конечном итоге определены длина цилиндрической части l_{cil} и полная длина заряда l_z

$$l_{cil} = \frac{m_m^p - m_{m\,sh} - m_{m\,z}}{\pi \cdot \rho_m \cdot \left(r_z^2 - r_k^2 \right)}, \qquad l_z = l_s + l_{cil} + r_{sk}. \quad (31)$$

Рабочий запас топлива m_m^p в соотношении (31) в зависимости от основных проектных параметров i-й ступени ТРН определяется по соотношению (7).

С использованием приведенных элементов математической модели РДТТ на начальном этапе проектирования ТРН может быть полностью определена начальная конфигурация заряда с четырьмя щелевыми проточками в области переднего днища, обеспечивающая максимальное по условиям неэрозионного горения заполнение маршевого РДТТ твёрдым ракетным топливом.

Алгоритм определения начальной конфигурации заряда РДТТ. Обобщённый алгоритм определения начальной конфигурации заряда ТРТ с щелевыми проточками в области переднего днища можно представить в следующем виде.

1. Формируются исходные данные, при этом задаются:

– основные характеристики $m_{0\,i}, P_{уд\,i}^{пуст}, F_{kr}, \chi$ и проектные параметры i-й ступени ТРН $\nu_{n\,i}, \mu_{k\,i}, p_{k\,i}, \zeta_i$;

– характеристики ТРТ ρ_m, u_1, ν и продуктов сгорания $R, T_г, k$, а также величина пороговой скорости $V_{пор}$, при которой возникает эрозионное горение ТРТ;

– коэффициент безопасности по скорости движения продуктов сгорания на выходе из канала заряда $f_v > 1$;

– значения параметров первой h_s, l_s и второй δ_s, r_{ck} групп, характеризующие начальную конфигурацию заряда;

– требуемая точность ε решения трансцендентного уравнения (9);

2. Определяется с использованием соотношений (2), (17), (18) давление в камере сгорания $p_{k\,n}$ и тяга в пустоте маршевого РДТТ i-й ступени $P_{осн\,i}^{н}$ ТРН в начале основного режима работы РДТТ.

3. По соотношениям (20) при $v_k = \dfrac{V_{пор}}{f_v}$ определяются газодинамические параметры потока продуктов сгорания на выходе из канала заряда p_{kan}, ρ_{kan}.

4. По соотношению (8) определяется продолжительность работы маршевого РДТТ t_{oc} на основном режиме.

5. Производится сравнение параметра ζ_i с 1. Если $\zeta_i = 1$, то максимальная толщина сгоревшего свода $e_{\max}$ определится соотношением (15), в противном случае – соотношением (16).

6. Задаются начальное значение радиуса канала заряда r_{k1} и величина приращения радиуса канала заряда Δr_k.

7. По соотношениям (11) – (14) определяются площадь поверхности горения торцевой части заряда, обращённой к сопловому блоку S_k, и наружный радиус заряда ТРТ r_z.

8. С использованием соотношения (9) определяется при $r_k = r_{k1}$ невязка δ_1 по зависимости

$$\delta_1 = \rho_{kan} \cdot v_k \cdot \pi \cdot r_k^2 + \rho_m \cdot u_1 \cdot \left(p_{k\,i}\right)^{\nu} \cdot S_k - \frac{P_{осн}^{н}}{P_{уд}^{пуст}}. \qquad (32)$$

9. Определяется радиус r_{k2} по формуле $r_{k2} = r_{k1} + \Delta r_k$.

10. С использованием соотношения (32) определяется при $r_k = r_{k2}$ невязка δ_2.

11. Определяется знак произведения $(\delta_1 \cdot \delta_2)$. Если $(\delta_1 \cdot \delta_2) > 0$, то осуществляется переход на п. 12, в противном случае – на п. 13.

12. Производится сравнение величин $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$.

Если $|\delta_1| > |\delta_2|$, то параметру δ_1 присваивается значение δ_2, параметру r_{k1} – значение r_{k2} и осуществляется переход на п. 9.

Если $|\delta_1| < |\delta_2|$, то параметру Δr_k присваивается значение $(-\Delta r_k)$ и осуществляется переход на п. 9.

13. Определяется параметр r_{kr} по формуле

$$r_{kr} = r_{k1} - \delta_1 \cdot \frac{r_{k2} - r_{k1}}{\delta_2 - \delta_1}.$$

14. По соотношению (32) при $r_k = r_{kr}$ определяется невязка δ_r.

15. Производится сравнение величин $|\delta_r|$ и ε.

Если $|\delta_r| > \varepsilon$, то параметру δ_1 присваивается значение δ_2, параметру r_{k1} – значение r_{k2}, параметру δ_2 присваивается значение δ_r, параметру r_{k2} – значение r_{kr} и осуществляется переход на п.13.

Если $|\delta_r| < \varepsilon$, то радиус канала r_k принимается равным значению r_{kr} и осуществляется переход на п.16.

16. По соотношениям (22) определяются параметры a и b.

17. По соотношению (23) определяется одна четвёртая часть площади проходного сечения F_k.

18. По соотношению (21) определяется свободный (не занятый ТРТ) объём V_{cv} в области щелевых проточек.

19. По соотношениям (26) – (28) определяются объёмы V_{ckr} и V_{cil}.

20. По соотношениям (24) – (25) определяются объём V_m и масса $m_{m\,sh}$ топлива, располагаемого в области расположения щелевых проточек.

21. По соотношениям (29) определяются объём $V_{m\,z}$ и масса $m_{m\,z}$ топлива, располагаемого в скруглённой части заряда, обращённой к сопловому блоку.

22. По соотношениям (30) определяются объём $V_{m\,cil}$ и масса $m_{m\,cil}$ топлива, располагаемого в цилиндрической части заряда.

23. По соотношениям (31) определяются длина цилиндрической части l_{cil} и полная длина заряда l_z.

Разработанный алгоритм позволяет с точностью, необходимой для начального этапа проектирования, определить начальную конфигурацию заряда ТРТ с щелевыми проточками в области переднего днища маршевого РДТТ i-й ступени ТРН.

Выводы. Сформулированная задача оптимизации проектных параметров маршевого РДТТ i-й ступени ТРН, разработанные элементы математической модели и алгоритм определения начальной конфигурации заряда РДТТ с щелевыми проточками в области переднего днища камеры сгорания могут быть использованы на начальном этапе проектирования при оптимизации основных проектных параметров и программ управления твердотопливных ракет различного назначения, предназначенных для решения широкого круга целевых задач.

1 *Алпатов А. П.* Методическое обеспечение для выбора облика, оптимизации проектных параметров и программ управления полётом ракеты-носителя / *А. П. Алпатов, В. С. Сенькин //* Техническая механика. – 2013. – № 4. – С. 146 – 161.
2. *Сенькин В. С.* Комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракеты-носителя сверхлегкого класса / *В. С. Сенькин* // Техническая механика. – 2012. – № 2. – С. 106 – 121.
3. *Алпатов А. П.* Комплексная задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ракет космического назначения / *А. П. Алпатов, В. С. Сенькин //* Техническая механика. – 2011. – № 4. – С. 98 – 113.
4 *Сенькин В. С.* Оптимизация программ управления полетом и оптимизация тяги маршевой двигательной установки управляемого ракетного объекта / *В. С. Сенькин* //Техническая механика. – 2000. – № 1. – С.46 – 50.
5 *Орлов Б. В.* Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе / *Б. В. Орлов, Г. Ю. Мазинг*. – М. : Машиностроение, 1968. – 535 с.
6. *Абугов Д. И.* Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива / *Д. И. Абугов, В. М. Бобылев*. – М. : Машиностроение, 1987. – 272 с.
7. *Разумеев В. Ф.* Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе / *В. Ф. Разумеев, Б. К. Ковалев*. – М. : Машиностроение, 1976. – 356 с.
8. *Ерохин Б. Т.* Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ / *Б. Т. Ерохин, А. М. Липанов*. – М. : Машиностроение, 1977. – 200 с.
9. *Ерохин Б. Т.* Теоретические основы проектирования РДТТ / *Б. Т. Ерохин*. – М. : Машиностроение, 1982. – 206 с.
10. *Шишков А. А.* Газодинамика пороховых ракетных двигателей / *А. А. Шишков.* – М. : Машиностроение, 1974. – 156 с.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 31.10.14,
в окончательном варианте 10.11.14