УДК 531.3 https://doi.org/10.15407/itm2019.04.059

А. Е. ЗАКРЖЕВСКИЙ

ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СВЕРТЫВАНИЕМ КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗКИ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ИСХОДНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Институт космических исследований
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины
пр. Академика Глушкова 40, корп. 4/1, Киев, Украина; e-mail: alex.e.zakr@gmail.com

Об'єкт цього дослідження – космічні зв'язки двох тіл, з'єднаних пружним безмасовим тросом. Ціль дослідження – поширення нового методу побудови програмного керування режимом розгортання космічних зв'язок у площині їхніх орбіт з вирівнюванням наприкінці режиму уздовж місцевої вертикалі на процес згортання зв'язок зі специфічними термінальними умовами. Це дозволяє побудувати програмне керування довжиною або натягом зв'язки, який забезпечує необхідну зміну кінетичного моменту зв'язки під дією моменту гравітаційного поля сил. Новизна результатів дослідження полягає також в новому підході до побудови керування малоприводними (underactuated) механічними системами, у яких кількість каналів керування менше числа ступенів свободи. Тут пропонується накладати обмеження на рух системи по тангажу, яке, зменшуючи число ступенів свободи системи, дозволяє реалізувати заданий режим руху при керуванні тільки по ступенях свободи, що залишилися. Характер обмеження, що накладається на припустимий закон зміни кута тангажу за часом, визначається вимогами, пропонованими до виконуваного режиму. Тут розглядається режим згортання зв'язки, яка вирівняна уздовж місцевої вертикалі, до заданої довжини. При цьому зв'язка повинна бути знову вирівняна уздовж місцевої вертикалі і її поздовжні коливання повинні бути відсутніми. У результаті урахування всіх вимог, пропонованих до режиму згортання, вдається побудувати припустимий закон зміни кута тангажу за часом, який описується степеневим рядом восьмого порядку. Для зв'язки з обраними значеннями параметрів проведено числове дослідження впливу параметрів режиму, таких як тривалість згортання, форма закону зміни кута тангажу за часом, на довжину згорнутої зв'язки й характер її поведінки в процесі згортання. Для демонстрації простоти застосування пропонованого методу на практиці наведено числовий приклад. Числове моделювання режиму проводиться в рамках інтегрування задачі Коші для рівнянь Hill–Clohessy–Wiltshire. Аналіз результатів супроводжується графіками. На початку статті наведено огляд стану проблеми, що вивчається.

Ключові слова*: тросова система, згортання, керування, зміна довжини, вертикальне положення, деформації, космічна зв'язка.*

Объект этого исследования – космическая связка двух тел, соединенных упругим безмассовым кабелем. Цель исследования – распространение нового метода построения программного управления режимом развертывания космических связок в плоскости их орбит с выравниванием в конце режима вдоль местной вертикали на процесс свертывания связок со специфическими терминальными условиями. Это позволяет построить программное управление длиной или натяжением связки, которое обеспечивает требуемое изменение кинетического момента связки под действием момента гравитационного поля сил. Новизна результатов исследования заключается также в новом подходе к построению управления малоприводными (underactuated) механическими системами, у которых количество каналов управления меньше числа степеней свободы. Здесь предлагается накладывать ограничение на движение системы по тангажу, которое, уменьшая число степеней свободы системы, позволяет реализовать заданный режим движения при управлении только по оставшейся степени свободы. Характер ограничения, накладываемого на допустимый закон изменения угла тангажа по времени, определяется требованиями, предъявляемыми к выполняемому режиму. Здесь рассматривается режим свертывания связки, которая вначале выровнена вдоль местной вертикали, до заданной длины. При этом связка должна быть снова выровнена вдоль местной вертикали и ее продольные колебания должны отсутствовать. В результате учета всех требований, предъявляемых к режиму свертывания, удается построить допустимый закон изменения угла тангажа по времени, который описывается степенным рядом восьмого порядка. Для связки с выбранными значениями параметров проведено численное исследование влияния параметров режима, таких как длительность свертывания, форма закона изменения угла тангажа по времени, на длину свернутой связки и характер ее поведения в процессе свертывания. Для демонстрации простоты применения предлагаемого метода на практике приведен численный пример. Численное моделирование режима проводится в рамках интегрирования задачи Коши для уравнений Hill–Clohessy–Wiltshire. Анализ результатов иллюстрируется графиками. В начале статьи приведен обзор состояния изучаемого вопроса.

Ключевые слова*: тросовая система, свертывание, управление, изменение длины, вертикальное положение, деформации, космическая связка.*

This study is concerned with a space tethered system of two bodies connected with an elastic massless tether. The aim of this study is to extend a new program control construction method for the deployment of space tethered systems in the orbit plane with their alignment along the local vertical at the deployment end to tether retrieval with specific terminal conditions. This allows one to programmatically control the tether length or tension in such a way as to provide the required change of the angular momentum of the tethered system under the action of the gravitational moment. The novelty also lies in a new approach to constructing control of underactuated mechanical systems, in which the number of control channels is less than the number of degrees of freedom. Here, it is proposed to impose a pitch constraint on the motion of the system, which will reduce the number of degrees of freedom, thus allowing one to implement a specified motion regime by controlling the system only in the remaining degrees of freedom. The character of the constraint imposed on the admissible time variation of the pitch angle is governed by the requirements placed upon the motion regime to be executed. This paper considers the retrieval of a tethered system initially aligned along the local vertical to a specified length. The tethered system must be aligned again along the local vertical, and its longitudinal oscillations must be absent. Accounting for all the requirements for the retrieval regime, it is possible to constrict an admissible law of time variation of the pitch angle described by an eighth-order power series. For a tethered system with specified parameter values, a numerical study was conducted into the effect of the retrieval duration and the law of time variation of the pitch angle on the length of the retrieved tethered system and its behavior in the course of the retrieval. To demonstrate the practical simplicity of the proposed approach, a numerical example is given where tether retrieval is simulated numerically by integrating a Cauchy problem for Hill–Clohessy–Wiltshire equations. The analysis of results is illustrated by graphs. At the beginning of the paper, the state of the art in the problem under consideration is overviewed.

Keywords*: tethered system, retrieval, control, length variation, vertical position, deformation, space tethered system.*

Введение. Объем публикаций, посвященных исследованию различных режимов движения космических тросовых систем (КТС), очень большой. Всесторонний анализ потенциальных применений КТС проводится в монографиях [7, 15]. Среди проблем, связанных с динамикой КТС, особое место занимает проблема развертывания и свертывания связки двух космических объектов в заданное состояние. Этой проблеме посвящено большое количество публикаций. Они отличаются принимаемой физической моделью связки и характером управления приведением связки в конечное положение.

Вертикальная конфигурация КТС устойчива в орбитальной системе отсчета в случае постоянной длины троса. Теоретически это справедливо для абсолютно сферической Земли. В пределах технической точности можно предположить, что эта гипотеза выполняется [27]. Конфигурация вдоль локальной вертикали теряет свою устойчивость с изменением длины связки согласно теореме об изменении кинетического момента [16]. Важное эксплуатационное требование, чтобы субспутник остался на локальной вертикали во время развертывания или свертывания, может быть достигнуто только за счет расширения возможностей системы управления.

В моделях реальных связок с невесомой связью, движение которых происходит в плоскости круговой орбиты, используется только один канал управления, связанный с изменением длины связки, а степеней свободы оказывается две. Вторая степень свободы связана с движением связки по углу тангажа. При такой постановке задачи связку можно рассматривать как малоприводную (underactuated) механическую систему, в которой количество степеней свободы больше числа каналов управления. Игнорирование этой особенности механической модели связки с невесомой связью приводило к тому, что, например, задача развертывания связки в вертикальное положение долгое время не имела приемлемого для практики решения.

Рассмотрим известные подходы к развертыванию связки в положение вдоль местной вертикали. Как правило, такое развертывание предполагают проводить в течение двух стадий. Многие авторы рассматривают свободное развертывание на начальной ступени [25]. В этом случае, после начального удаления субспутника от космического корабля, связка развертывается фактически без сопротивления под действием начального импульса, сообщаемого субспутнику системой развертывания. В результате после торможения связки в конце развертывания связка входит в режим либрационных (маятниковых) колебаний в плоскости орбиты относительно радиального равновесного положения. Наконец, привязь успокаивается из-за внутреннего демпфирования в вязкоупругом тросе в положении вдоль местной вертикали. Этот процесс длится очень долго, хотя существуют методы его ускорения. В [3] маятниковые колебания, которые возникают при первичным развертывании связки с вязкоупругим тросом, демпфируются параметрическим подтягиванием троса у точки возврата маятниковых колебаний и развертыванием его снова около местной вертикали: это процесс, обратный параметрическому возбуждению маятника.

Управление натяжением троса на первой стадии развертывания рассматривается в [4]. Описание и анализ различных путей развертывания орбитальных связок с управлением по скорости развертывания приведены в [6, 14, 15, 18].

У всех сценариев развертывания орбитальных связок с управлением по скорости развертывания есть один общий недостаток. С таким управлением невозможно выполнить демпфирование продольных колебаний связки, возникающих из-за ее упругости. Значительные продольные колебания могут привести связку к потере натяжения троса, это в свою очередь приведет к потере управления ее развертыванием/свертыванием.

Известны методы развертывания орбитальных связок, которые обеспечивают развертывание троса с регулированием его силы натяжения. Основное преимущество таких сценариев развертывания – возможность прямого демпфирования продольных колебаний связки во время ее развертывания. Множество различных стратегий управления для таких сценариев развертывания и устройств для их реализации описано в [21, 22, 26]. Проблема оптимального управления по быстродействию решена для простой системы с невесомым тросом в [24]. В результате найден закон релейного управления натяжением троса. Он позволяет перемещать субспутник из положения относительного равновесия вдоль местной вертикали к той же самой конфигурации на существенном расстоянии от космического корабля, без существенного отклонения субспутника от местной вертикали и с постоянно натянутым тросом. Погрешность этого метода связана со сложностью реализации регулирования натяжения троса, когда сила натяжения мала. Недостаток метода состоит также в возможности возбуждения продольных колебаний.

В [4] проведено всестороннее исследование управляемого развертывания на основе сравнения шести различных сценариев. В [23, 24] развиты оптимальные контроллеры для создания управления развертыванием КТС. В [28] предложен контроллер для движения КТС в плоскости орбиты, который демонстрирует высокую вычислительную эффективность. В [30] проведено сравнение различных функций стоимости для оптимального управления КТС в плоскости орбиты. Это исследование было расширено позже на управление либрацией КТС на эллиптических орбитах [29].

Один из наиболее обсуждаемых сценариев развертывания – так называемое "экспоненциальное" развертывание. Такое развертывание рассматривалось многими авторами, начиная с Eades [11, 12]. Как правило, авторы рассматривают экспоненциальное развертывание как дополнительную стадию для начального развертывания. Такое развертывание обсуждено подробно в [6, 20] и многими другими авторами. В [6] такое развертывание определено как развертывание со скоростью, пропорциональной длине развернутой связки. Для круговой орбиты авторы предлагают закон изменения развернутой длины связки L во времени в форме $L = L_0 \exp(-3/4 \mu^{or} t \sin 2g)$, где L_0 – начальная длина связки, t – время, μ^{or} – орбитальная угловая скорость, g – угол тангажа связки. В [20] экспоненциальное развертывание определено как развертывание, для которого развернутая длина – функция, растущая по экспоненте со временем и зависящая от величины L_0, которая не может быть нулем.

Плоское движение гантели с экспоненциальным управлением по длине при свертывании было исследовано в [19]. Там показано, что связка может быть свернута без вращения. При использовании экспоненциального закона скорость развертывания связки достигает максимальной величины в конце развертывания, что приводит к рывку и увеличению силы натяжения. Это может вызвать значительные продольные колебания связки.

Альтернативой методам, обсуждаемым здесь, являются методы, развитые в [1, 2, 9].

Следует отметить, что с практической точки зрения нет необходимости удерживать связку в непосредственной близости от местной вертикали во время развертывания. Достаточно, чтобы управление привело связку к местной вертикали в конце процесса.

В последнее время возрос интерес к исследованию малоприводных механических систем. В работе [12] связка рассматривается как малоприводная механическая система. Там предложен новый контроллер для режимов развертывания и свертывания связки, основанный на использовании формируемого виртуального сигнала. Авторы показали, что углом тангажа, не поддающимся прямому управлению, можно управлять при использовании данных о длине связки. Также в работе проведен краткий анализ исследований динамики связок в рамках теории малоприводных систем.

Трудностей реализации описанных выше сценариев и сложностей законов управления режимами развертывания/свертывания связки в устойчивую вертикальную конфигурацию на круговой орбите можно избежать, если наложить на систему дополнительную связь, уменьшающую число ее степеней свободы. При этом система перестанет быть малоприводной и задача построения программного управления, приводящего связку к местной вертикали в конце развертывания, существенно упрощается. Структура связи должна в полной мере соответствовать параметрам исследуемого режима. Ее построение заключается в определении подходящей зависимости угла тангажа от времени. Как это сделать основываясь на работах [31, 32] будет показано далее.

Математическая модель системы. Можно различать два основных типа связок. Связки, состоящие из космических тел с существенно отличающимися по величине массами, могут быть отнесены к первому типу. Например, исследование маленького зонда, развертываемого с большого космического корабля или с космической станции. Связки двух объектов, имеющих близкие или равные массы, могут быть отнесены ко второму типу.

Без потери общности формулировки проблемы в качестве модели связки можно выбрать две равных точечных массы, связанные упругим невесомым тросом. Пренебрежение размерами концевых тел основано на том, что режимы движения, в которых трос может быть намотан на концевых телах, здесь не рассматриваются. Пренебрежение массой троса по сравнению с массами концевых тел вполне оправдано для связок с неэлектропроводным тросом, сделанным из современных легких материалов. Кроме того, опыт предыдущих исследований, в частности анализ результатов, приведенных в [22], показывает, что управляемое движение континуальных систем с массивным тросом, описываемым уравнениями в частных производных, фактически не отличается от движения связок, масса которых сконцентрирована в концевых телах. Различием в местоположении центра гравитации и центра масс связки можно также пренебречь, поскольку расстояние между этими точками едва ли больше 1 м, когда длина связки, расположенной вдоль местной вертикали, равна 5 км. В результате можно полагать, что центр масс связки движется по круговой орбите вокруг Земли.

Для удобства дальнейшего описания динамики связки введем следующие правые системы координат: инерциальная система $O_E X_A Y_A Z_A$ [5] (ось $O_E X_A$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $O_E Z_A$ проходит через Северный полюс), и орбитальный базис $Cx^{or} y^{or} z^{or}$. В этом координатном базисе ось Cx^{or} направлена от центра Земли вдоль радиус-вектора центра масс связки при ее движении по орбите, ось Cz^{or} нормальна к плоскости орбиты и ось Cy^{or} дополняет ортогональную триаду. Заметим, что оси Cx^{or} и Cy^{or} соответствуют движению в плоскости орбиты, а ось Cz^{or} соответствует движению вне этой плоскости.

В качестве модели поля сил тяготения выберем центральное ньютоново поле сил. Вектор положения центра масс связки $\vec{R}_C$ может быть легко определен в инерциальной системе отсчета, если параметры орбиты и положение центра масс связки известны. Соответственно, радиус-векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ точечных масс относительно точки C могут быть определены их проекциями в орбитальной системе координат: $\vec{r}_1 = \{x_1^{or}, y_1^{or}, z_1^{or}\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2^{or}, y_2^{or}, z_2^{or}\}$. Выберем эти проекции вместе с их производными по времени в орбитальной системе отсчета как фазовые переменные задачи.

Сценарий изменения длины связки. Для демонстрации возможностей предлагаемого подхода к построению программного управления различными режимами движения связки рассмотрим далее задачу изменения длины уже развернутой вдоль местной вертикали упругой связки двух тел с невесомой связью. Потребуем, чтобы после уменьшения длины до заданной величины связка была снова расположена вдоль местной вертикали. Теперь нужно построить выражение для связи, налагаемой на неуправляемую переменную, которой является угол тангажа g. В качестве управления связкой будем рассматривать ее длину, под которой будем понимать расстояние между центрами концевых тел с учетом упругих деформаций. При уменьшении длины в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента связка начнет вращаться в сторону положительных значений g, поскольку ее кинетический момент не будет заметно меняться при малых углах тангажа. Поскольку в начальный момент по условиям задачи связка неподвижна относительно местной вертикали, должны выполняться следующие условия:

$$g(0) = 0\,, g(T_F) = 0\,, \tag{1}$$

$$\dot{g}(0) = 0\,, \dot{g}(T_F) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь T_F – время окончания маневра.

В результате зависимость $\vartheta(t)$ в первом приближении можно представить в виде, показанном на рис. 1.

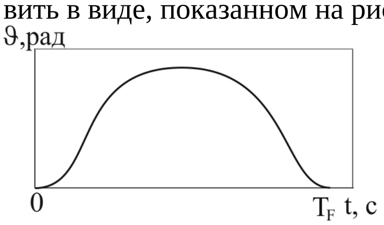

Рис. 1

Однако такая связь не отражает всех требований практики, предъявляемых к связке в рамках рассматриваемого маневра. Следующие условия должны быть удовлетворены при свертывании связки от полной начальной длины L_0 до конечной длины L_F :

$$L(0) = L_0\,, L(T_F) = L_F\,. \tag{3}$$

Первое из этих условий заранее можно считать выполненным, второе условие может быть использовано далее для определения заранее неизвестного времени окончания маневра T_F . Эта величина позволит выбрать подходящее решение задачи из множества решений, полученных для различных значений T_F .

Два дополнительных условия следуют из требования постоянства длины связки в начальный и конечный моменты времени:

$$\dot{L}(0) = 0\,, \dot{L}(T_F) = 0\,. \tag{4}$$

Появление скачков натяжения в тросе недопустимо как в начальный и конечный моменты маневра, так и на протяжении всего маневра, поскольку они могут привести к исчезновению натяжения связи, что сделает принятую механическую модель неадекватной. Отсутствие скачков натяжения в начальный и конечный моменты времени достигается при выполнении следующих условий:

$$\ddot{L}(0) = 0\,, \ddot{L}(T_F) = 0\,.$$

Эти условия следуют непосредственно из уравнения движения связки вдоль связи в сферических координатах [17] (случай движения в плоскости орбиты), которое в принятых здесь обозначениях может быть записано в виде

$$\ddot{L} = L\,[(\dot{\ } + \mu^{or})^2 + 3(\mu^{or})^2 \cos^2 \bar{\ } - (\mu^{or})^2] - 2\frac{T}{m}\,. \tag{5}$$

Здесь m – масса концевого тела, T – сила натяжения троса.

Действительно, при выполнении условий (1), (2)

$$\ddot{L} = L\;3(\mu^{or})^2 - 2\frac{T}{m} = 0\,. \tag{6}$$

Теперь необходимо построить такой закон управления длиной связки $L(t)$, который позволит решить поставленную задачу и свернуть связку "из покоя в покой" до заданной длины. Физическая интерпретация такого управления состоит в следующем: момент количества движения связки в процессе свертывания изменяется под действием гравитационного момента до такой векторной величины, которая соответствует моменту количества движения связки при $t = T_F$.

Для того чтобы получить необходимый закон управления, можно использовать теорему об изменении момента количества движения связки. Более простой путь состоит в том, чтобы использовать уравнение движения связки переменной длины по углу тангажа. Следуя [17], можно написать уравнение углового движения связки в плоскости орбиты в следующей форме:

$$\ddot{\gamma} + 2(\dot{\gamma} + \mu^{or})\dot{L}/L + 3(\mu^{or})^2 \sin\gamma \cos\gamma = 0\,. \quad (7)$$

После элементарных преобразований уравнения (7) можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с соответствующим начальным условием

$$\dot{L} = -L\,\frac{3(\mu^{or})^2 \sin 2\gamma + 2\ddot{\gamma}}{4\left(\mu^{or} + \dot{\gamma}\right)}\,,\ L(0) = L_0\,. \quad (8)$$

При известном законе изменения $\gamma(t)$ его решение имеет следующий вид

$$L(t) = L_0 \exp\left[-\int_0^{T_F}\left(\frac{3(\mu^{or})^2 \sin(2\gamma(\tau)) + 2\ddot{\gamma}(\tau)}{4\left(\mu^{or} + \dot{\gamma}(\tau)\right)}\right)d\tau\right]. \quad (9)$$

Используя условия (8) и уравнение (4) можно получить еще два условия для угла тангажа:

$$\ddot{\gamma}(0) = 0\,, \ddot{\gamma}(T_F) = 0\,. \quad (10)$$

Возвращаясь к рис. 1, видим, что для обеспечения формы закона изменения $\gamma(t)$, соответствующей показанной на рисунке, нужно определить еще хотя бы одну точку на этой кривой. Заметим, что задача выбора такой точки не однозначна. Выберем, например, в качестве таковой точку $\gamma(T_F/2)$ и зададим следующее условие:

$$\gamma(T_F/2) = F_{sr}\,. \quad (11)$$

Здесь F_{sr} – неизвестная заранее величина, которая может быть выбрана в процессе численного исследования решения задачи.

Наконец, после дифференцирования по времени уравнения (8) и используя уже найденные ограничения на $\gamma(t)$, можно получить следующие ограничения из условий (5):

$$\dddot{\gamma}(T_2) = 0\,,\ \dddot{\gamma}(T_F) = 0\,. \quad (12)$$

Таким образом, для построения программного закона изменения $\gamma(t)$ можно использовать условия (1), (2), (10), (11) и (12) – всего 9 условий.

Задавая различную продолжительность маневра T_F можно получить различные законы $L(t)$ изменения длины связки. Тогда может быть выбран один закон из этого множества решений, который соответствует заданной окончательной длине связки, не приводит к потере натяжения троса во время развертывания и отвечает другим описанным требованиям.

Необходимый закон $\gamma(t)$ может быть представлен в форме любого конечного функционального ряда, и его коэффициенты могут быть найдены из выше установленных девяти условий. Например, по аналогии с работой автора [31] представим закон $g(t)$ в виде степенного ряда восьмого порядка

$$g(t) = \sum_{i=0}^{7} c_i \left(\frac{t}{T_F} \right)^i . \qquad (13)$$

Его коэффициенты, найденные из девяти условий (1), (2), (10), (11) и (12), имеют следующий вид:

$$c_0 = 0; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = 0;$$
$$c_4 = 1024\, Fsr / T_F^4; \quad c_5 = -256\, Fsr / T_F^5;$$
$$c_6 = 1536\, Fsr / T_F^6; \quad c_7 = -1024\, Fsr / T_F^7; \quad c_8 = 256\, Fsr / T_F^8.$$

Закон $L(t)$, полученный в соответствии с выражением (13), зависит от закона $g(t)$, который в свою очередь зависит от продолжительности режима свертывания и радиуса орбиты центра тяжести.

Численные исследования. Рассмотрим далее практическую реализацию предложенного метода построения программного управления свертыванием космической связки двух тел, которая в начале и в конце режима ориентирована вдоль местной вертикали. Выберем следующие значения параметров связки:

массы конечных тел идентичны и равны 10 кг,
начальная длина связки составляет 6000 м,
длина свернутой связки – 3 км,
продольная жесткость троса – 5000 N.
радиус орбиты центра тяжести связки – 7000 км.

Покажем далее, как найти закон $L(t)$, который решает поставленную задачу.

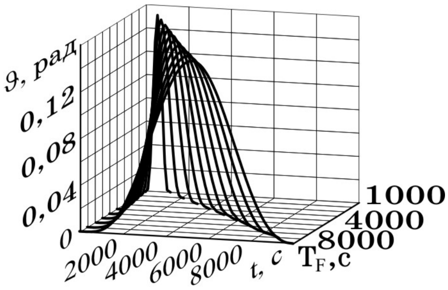

Рис. 2

Зададим значение Fsr равным 0,15 рад и построим кривые $g(t)$ для различных значений длительности режима свертывания T_F в соответствии с формулой (13). Результат показан на рис. 2. Каждая линия на этом рисунке соответствует отдельному значению длительности режима. На рисунке видно, что с изменением T_F форма кривой $g(t)$ меняется незначительно. Чтобы оценить приемлемость того или иного закона программного движения, необходимо построить программный закон изменения во времени длины связки $L(t)$. Этот закон можно получить, решая задачу Коши (8) для группы значений T_F при известных законах $g(t)$. Получаем зависимости, показанные на рис. 3.

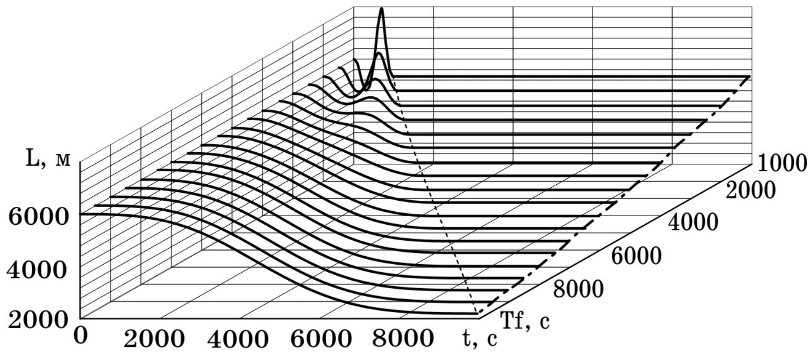

Рис. 3

Основная зависимость, которая прослеживается на этом рисунке, состоит в том, что по мере увеличения длительности режима свертывания длина, до которой можно свернуть связку, уменьшается – при $T_F = 1000$ с связку удается свернуть только до 5345 м, тогда как при $T_F = 10000$ с связка укорачивается до 2256 м. Очевидно, при дальнейшем увеличении T_F свернутая связка станет еще короче. На рис. 3 видно, что форма управляющей функции $L(t)$ становится более гладкой с увеличением T_F. Пунктирная линия на рисунке проходит через точки выхода каждой кривой $L(t)$ на стационарное значение. Штрих-пунктирная кривая показывает зависимость $L(T_F)$. Конечно, эта картина существенно зависит и от величины параметра Fsr.

На рис. 4 показана зависимость длины связки после завершения процесса свертывания от длительности свертывания T_F и параметра Fsr.

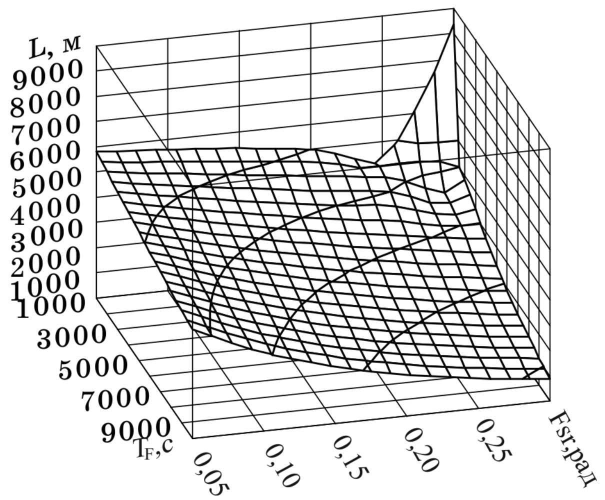

Рис. 4

На графике нанесены изолинии $L(T_F, Fsr) = 1000$, 2000, 3000, 4000, 5000 м. По их формам видно, что до одной и той же длины связку можно свернуть при разных наборах значений T_F и Fsr. Т. е., если нужно свернуть связку за кратчайшее время, рабочую точку следует выбирать в правой верхней точке соответствующей изолинии, а если отклонения концевых тел от местной вертикали должны быть минимально возможными, то рабочую точку следует выбирать в ее левой нижней области. В правой верхней части рисунка аппликаты графика начинают увеличиваться. Для определенных значений T_F , Fsr может оказаться, что после окончания маневра длина связки не только не уменьшается, но может оказаться больше начальной. Иначе говоря, по мере роста значения Fsr малые длительности процесса становятся нереализуемыми. Это объясняется тем фактом, что при таком характере изменения величин T_F и Fsr скорость изменения угла тангажа возрастает, т. е. возрастает угловая скорость движения связки по тангажу, в результате чего ограничение (11) может быть нарушено. Чтобы не превысить допустимую величину $g(t)$, приходится увеличивать длину связки. Это хорошо видно на рис. 3 на кривой $L(t)$, соответствующей значению $T_F = 1000$ с. Если для такой кривой потребовать $T_F < 1000$ с, может оказаться, что связка в результате полученного управления удлинится. Области, подобные показанной в правом верхнем углу рис. 4, непригодны для построения программного управления режимом свертывания связки.

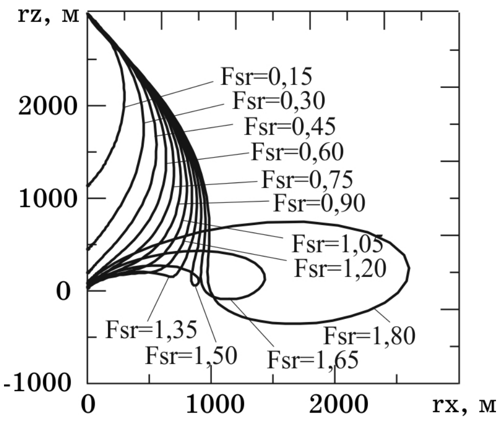

Рис. 5

Поведение траекторий концевого тела связки при $T_F = 10000$ с и при различных значениях параметра Fsr показано на рис. 5. Здесь изображены траектории концевого тела симметричной связки в орбитальном базисе. На графиках хорошо видно, как по мере возрастания значения параметра Fsr изменяется форма траектории концевого тела.

Непременным условием реализуемости рассматриваемого маневра связки является отсутствие провисания троса в течение всего времени ее свертывания. Для известного закона изменения длины связки $L(t)$ зависимость силы натяжения троса от времени может быть найдена из уравнения (5). На рис. 6 показана зависимость силы натяжения троса от времени при $T_F = 10000$ с и различных значениях параметра Fsr . При $t = 0$ сила натяжения троса определяется из условия (6). С началом процесса свертывания натяжение троса вначале увеличивается в результате преодоления сил инерции концевых тел. Естественно, интенсивность этого увеличения определяется значением параметра Fsr – чем больше этот параметр, тем быстрее связка наклоняется, а следовательно, должна быстрее уменьшаться ее длина. Аналогичные процессы происходят в тех областях значений Fsr , где появляются интервалы

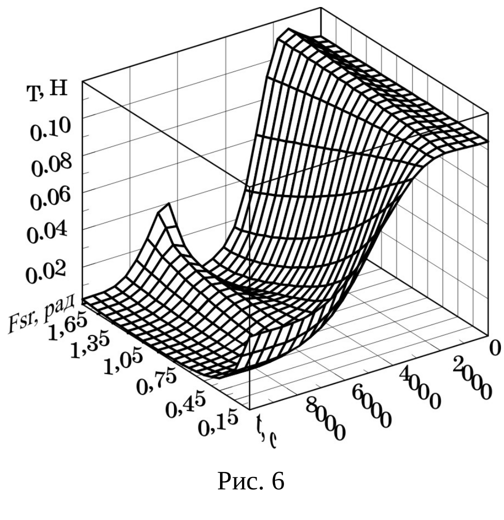

Рис. 6

времени, на которых трос удлиняется. При этом натяжение сначала падает, когда трос выпускается, а затем резко возрастает, когда трос начинает снова укорачивается. Последняя кривая $T(Fsr)$ соответствует силе натяжения троса после завершения процесса свертывания, определяемой из условия $T(Fsr)$, соответствующая $t = T_F$, показывает усилия натяжения в связке в конце режима свертывания, определяемые из (6). Поскольку уменьшение длины связки в рассматриваемой области значения параметров T_F, Fsr минимально при $Fsr = 0{,}15$, здесь натяжение *T* максимально. Естественно, чем больше конечная длина связки, тем выше сила натяжения троса. Именно это и видно на кривых $T(t)$, соответствующих меньшим значениям (Fsr).

Рассмотрим далее поведение связки при ее свертывании до длины 3 км. Для численного моделирования будем использовать уравнения Hill–Clohessy–Wiltshire (HCW) [8] (14), которые описывают движение концевых точечных масс относительно центра масс связки

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i = \{ & 2\mu^{or}\dot{y}_i^{or} + 3(\mu^{or})^2 x_i^{or} - T\, e_{ri}(1)/m_i, \\ & -2\mu^{or}\dot{x}_i^{or} - T\, e_{ri}(2)/m_i, \\ & -(\mu^{or})^2 z_i^{or} - T\, e_{ri}(3)/m_i \}, (i = 1,2), \end{aligned} \tag{14}$$

где $e_{ri}(1)$, $e_{ri}(2)$, $e_{ri}(3)$ – направляющие косинусы радиус-векторов точечных масс в орбитальном базисе. Для замыкания системы двенадцати уравнений первого порядка нужно знать выражение величины силы натяжения троса T в каждый момент времени.

Если в качестве фазовых переменных задачи выбрать координаты концевых тел и их первые производные по времени, в качестве управления можно ввести в модель программную силу натяжения связки Т, которая может быть вычислена на каждом шаге интеграции, используя уравнение (11). Программные значения $L(t)$ можно получить на каждом шаге интегрирования задачи Коши (8). Первые производные $L(t)$ могут быть определены из (5) после подстановки в уравнение (7) выражения для $g(t)$ и его производных по времени. В результате получаем выражение для силы $T(t)$ натяжения, которое может использоваться при численном интегрировании задачи Коши для уравнений HCW с помощью пакета ФОРТРАН, написанного автором.

На рис. 7 можно видеть поведение угла тангажа g – видно, как в процессе свертывания отклоняется продольная ось связки. После завершения программного управления в момент $t = T_F = 7078$ с связка оказывается снова ориентированной вдоль местной вертикали. Расстояние между телами оказывается равным 2999,72 м. Анализ численных значений изменения угла тангажа связки свидетельствует о наличии некоторых либрационных колебаний троса с периодом 3000 с, с амплитудой меньше $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ рад. Поведение угла тангажа $g(t)$ в течение развертывания практически не отличается от программного закона, показанного на рис. 2.

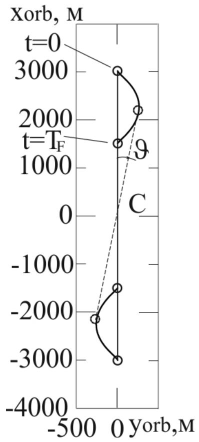

Рис. 7

На рис. 8 показано изменение длины связки L и скорости втягивания троса $\dot{L}$ во времени. Здесь видно, что максимальная скорость свертывания троса не превышает 0,9 м/с.

Программное натяжение троса, которое соответствует движению концевых тел связки по предписанной программной траектории, изображено на рис. 9. Показанные здесь особенности силы натяжения троса полностью соответствуют особенностям, описанным в комментариях к рис. 6

Для того чтобы принять во внимание упругость троса, в вычислительную программу по вычислению силы натяжения было введено уточнение. Действительно, для гибкого троса расстояние от точки С до концевого тела равно $r(t) = r_p(t) + \Delta r(t)$. Здесь, $r_p(t)$ – программный закон изменения $r(t)$. В свою очередь, $\Delta r(t) = T\ r_p / EF$ – удлинение троса в соответствии с законом Гука. Поэтому, учитывая квазистатический характер

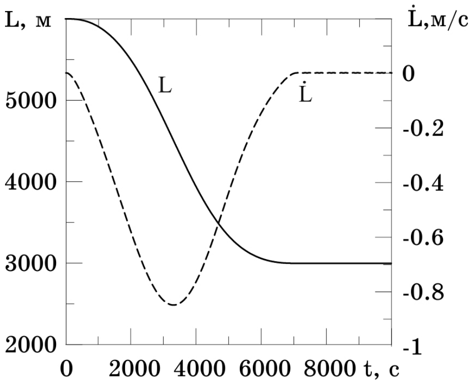

Рис. 8

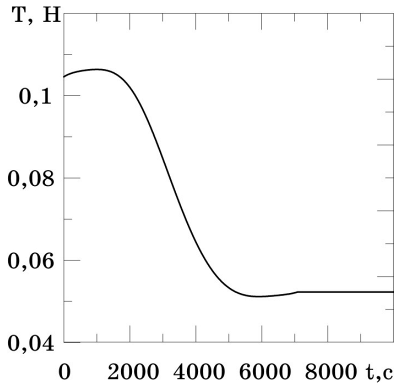

Рис. 9

режима свертывания, при вычислении *T* этот факт был принят во внимание и была введена корректировка в вычисление программного закона $\tilde{r}_p(t) = r_p(t) - \Delta r(t)$. В качестве текущего значения $\Delta r(t)$ использовалось его значение, вычисленное на предыдущем шаге интегрирования, который составлял 0,1 с.

Заключение. Подводя итоги, можно сказать, что здесь развит, теоретически обоснован и численно проверен новый подход к решению проблемы свертывания вертикально ориентированной упругой космической связки двух тел на круговой орбите на заданную длину с ее приведением в конце свертывания к локальной вертикали. Этот подход основан на программном управлении длиной связки с использованием момента гравитационных сил для управления движением связки по углу тангажа. С физической точки зрения предложено целенаправленное изменение кинетического момента связки за счет ее взаимодействия с гравитационным полем, позволяющее удовлетворить многие дополнительные требования к качеству динамических процессов в упругой космической системе. С точки зрения теории управления развит метод формирования программного управления длиной связки, позволяющий развернуть связку двух тел с ее выравниванием по локальной вертикали без возбуждения продольных колебаний, потому что полученный закон управления является очень гладким по времени и не содержит особенностей, которые могут вызвать такие колебания. Отличие предложенного сценария развертывания от "экспоненциального" развертывания состоит в том, что длина связки растет здесь не по экспоненте, а согласно закону, описываемому полиномом восьмого порядка. Коэффициенты этого полинома определены из условий, которые обеспечивают предписанное качество развертывания связки, в частности отсутствие ее продольных колебаний.

Приведенный пример применения изложенного подхода к случаю свертывания конкретной связки демонстрирует простоту использования метода на практике.

1. *Banerjee A. K., Kane T. R.* Tether Deployment Dynamics. Journal of the Astronautical Sciences. 1982. V. 30. Pp. 347–366.
2. *Banerjee A. K., Kane T. R.* Tethered Satellite Retrieval with Thruster Augmented Control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1984. V. 7. Pp. 45–50. https://doi.org/10.2514/3.8543
3. *Barkow B.* Controlled Deployment of a Tethered Satellite System. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2003. V. 2. Pp. 224–225. https://doi.org/10.1002/pamm.200310097
4. *Barkow B., Steindl A., Troger H., Wiedermann G.* Various Methods of Controlling the Deployment of a Tethered Satellite. Journal of Vibration and Control. 2003. V. 9. Pp. 187–208. https://doi.org/10.1177/1077546303009001747
5. *Beletsky V. V.* Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem. 1966. 261 p.
6. *Beletsky V. V., Levin E. M.* Dynamics of space tether systems. Univelt, San Diego. 1993. 509 p.
7. *Cantafio L. J., Chobotov V. A., Wolfe M. G.* Photovoltaic gravitationaly stabilized, solid-state satellite solar power station. Journal of Energy. 1977. V. 1. Pp. 352–363. https://doi.org/ 10.2514/3.62346.
8. *Clohessy W. H., Wiltshire R. S.* Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1960. V. 27. Pp. 653–658. https://doi.org/10.2514/8.8704
9. *Davis W. R., Banerjee A. K.* Yo-Yo Rate Control of a Tethered Satellite Using Angle Measurement. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V.13. Pp. 370–374. https://doi.org/10.2514/3.20559
10. *Djebli A., Pascal M., Elbakkali L.* On deployment dynamics of tethered satellite systems Revue de Mécanique Appliquée et Théorique. 2000. V. 1. Pp. 13–39.
11. *Eades J. B .J.* Analytical Solution for Extensible Tethers. Journal of Spacecraft and Rockets. 1974. V. 11. Pp. 254–255, https://doi.org/10.2514/3.62053
12. *Eades J. B., Jr, Wolf H.* Tethered Body Problems and Relative Motion Orbit Detemiination. Analytical Mechanics Associates Contract NASA-CR-132780, Final Report. 1972. No.72–35. 317p.
13. *Fan Zhanga, Panfeng Huang.* A novel underactuated control scheme for deployment/retrieval of space tethered system. Nonlinear Dynamics. 2019. V.95. Pp. 3465–3476. https://doi.org/10.1007/s11071-019-04767-3
14. *Levin E. M.* On deployment of lengthy tether in orbit. Kosmicheskie issledovanija. 1983. V. 21. Pp. 678–688.
15. *Levin E. M.* Dynamic Analysis of Space Tether Missions. Univelt, San Diego: 2007. 454 p.
16. *Lur'e A.* Analytical Mechanics. Springer: 2002. https://doi.org/doi: 10.1007/978-3-540-45677-3
17. *Menon C., Kruijff M., Vavouliotis A.* Design and testing of a space mechanism for tether deployment. Journal of Spacecraft and Rockets. 2007. V. 44. Pp. 927–939 https://doi: 10.2514/1.23454
18. *Modi V. J., Misra A. K.* Deployment dynamics of tethered satellite systems. AIAA Paper. 1978. No. 1398, Pp. 1–10. https://doi.org/10.2514/6.1978-1398
19. *Padgett D. A., Mazzoleni A. P.* Analysis and design for nospin tethered satellite retrieval. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2007. V.30. Pp. 1516–1519. https://doi: 10.2514/1.25390
20. *Pelaez J.* On The Dynamics Of The Deployment Of A Tether From An Orbiter .2. Exponential Deployment. Acta astronautica 1995. V. 36. Pp. 313–335. https://doi.org/10.1016/0094-5765(95)00117-4
21. *Rupp C. C., Kissel R. R.* Tetherline system for orbiting satellites. U. S. Patent No. 4083520, April II, 1978, Int. Cl. B. 64 G 1/100, US Cl. 244/167; 244/161.
22. *Rupp C. C., Laue J. H.* Shuttle/Tethered Satellite System. Journal of Astronautical Sciences.1978. V.26. Pp. 1–17.
23. *Steindl A., Steiner W., Troger H.* Optimal control of retrieval of a tethered subsatellite. Solid Mechanics and its Applications. 2005. V. 122. Pp. 441–450. https://doi.org/10.1007/1-4020-3268-4_41
24. *Steindl A., Troger H.* Optimal Control of Deployment of a Tethered Subsatellite. Nonlinear Dynamic. 2003. V. 31. Pp. 257–274. https://doi.org/10.1023/A:1022956002484
25 *Steiner W., Steindl A., Troger H.* Center manifold approach to the control of a tethered satellite system. Applied Mathematics and Computation. 1995. V. 70. Pp. 315–327. https://doi.org/10.1023/A:1022956002484
26. *Swet C. J.* Method for deployment and stabilizing orbiting structures. U.S. Patent Office No. 3532298, Oct. 6, 1970, Int. Cl. B 64 G 1/00, U.S. Cl. 244-1.

27. *Wiedermann G., Schagerl M., Steindl A., Troger H.* Computation of Force Controlled Deployment and Retrieval of a Tethered Satellite System by the Finite Element Method. In: Proceedings of ECCM'99, (W.Wunderlich Ed.). Pp. 410–429.
28. *Williams P.* Application of pseudospectral methods for receding horizon control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004. V. 27. Pp. 310–314. https://doi.org/10.2514/1.5118
29. *Williams P.* Libration control of tethered satellites in elliptical orbits. Journal of Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43. Pp. 476–479. https://doi.org/10.2514/1.17499
30. *Williams P., Trivailo P.* On the optimal deployment and retrieval of tethered satellites. Tucson: In: The 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 2005. 10 – 13 July. AIAA Paper 2005-4291 (2005). https://doi.org/10.2514/6.2005-4291
31. *Zakrzhevskii A. E.* Method Of Deployment of a Space Tethered System Aligned to the Local Vertical, J. of Astronaut Sci. 2016. V. 63. Pp. 221–236. https://doi.org/10.1007/s40295-016-0087-z
32. *Zakrzhevskii A. E., Tkachenko Ja. V., Alpatov A. P.* Method of Deployment of a Space Bodies Tether with Alignment to the Local Vertical. Patent of Ukraine UA 99303, u 201413972 from 25.05.15, Bul. “Promyslova vlasnist” 2015. No.10. Pp. 1-4.

Получено 30.10.2019,
в окончательном варианте 22.11.2019