УДК 533.697:621.51

С. В. МЕЛАШИЧ

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ ПЛОСКИХ КОМПРЕССОРНЫХ РЕШЕТОК НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В настоящей работе представлена методика решения обратных задач газодинамики плоских компрессорных решеток на основе численного моделирования турбулентных течений. Данная методика основана на применении метода поиска квазирешений к решению обратной задачи. В этом случае решение обратной задачи сводится к решению задачи поиска глобального экстремума некоторой целевой функции. Параметрическое описание формы профилей решеток выполнено с использованием оригинального способа, основанного на применении кривых Безье и системы гладких выпуклых функций Хикса–Хенне. Применение данного способа позволяет варьировать геометрические параметры решетки в широком диапазоне с использованием сравнительно малого числа варьируемых параметров и сохранением физически реализуемого контура профиля. Расчет целевой функции выполняется путем моделирования течения на основе численного интегрирования системы осредненных уравнений Навье–Стокса, замкнутых с помощью однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса. Для поиска экстремума целевой функции применяется гибридный генетический алгоритм. Разработанная методика позволяет определять геометрические параметры по заданному распределению давления по обводу искомого профиля, а также по заданным интегральным аэродинамическим характеристикам решетки. Она также может быть использована для решения задач аэродинамической оптимизации компрессорных решеток. Кроме того, данная методика может быть легко адаптирована к решению аналогичных задач в трехмерной постановке.

У даній роботі представлено методику розв'язання обернених задач газодинаміки плоских компресорних решіток на основі чисельного моделювання турбулентних течій. Дана методика ґрунтується на застосуванні методу пошуку квазірозв'язку до розв'язання оберненої задачі. В результаті розв'язання оберненої задачі зводиться до розв'язання задачі пошуку глобального екстремуму деякої цільової функції. Параметричний опис форми профілів решіток виконано з використанням оригінального способу, заснованого на застосуванні кривих Без'є і системи гладких опуклих функцій Хікса–Хенне. Застосування даного способу дозволяє варіювати геометричні параметри решітки в широкому діапазоні з використанням порівняно малого числа варійованих параметрів і збереженням фізично реалізованого контуру профілю. Розрахунок цільової функції виконується шляхом моделювання течії на основі чисельного інтегрування системи осереднених рівнянь Нав'є–Стокса, замкнутих за допомогою однопараметричної моделі турбулентності Спаларта–Аллмараса. Для пошуку екстремуму цільової функції застосовується гібридний генетичний алгоритм. Розроблена методика дозволяє визначати геометричні параметри за заданим розподілом тиску по обводу шуканого профілю, а також за заданими інтегральними аеродинамічними характеристиками решітки. Вона також може бути використана для розв'язання задач аеродинамічної оптимізації компресорних решіток. Крім того, дана методика може бути легко адаптована до розв'язання аналогічних задач в тривимірній постановці.

This paper presents a technique for solving inverse problems in gas dynamics of flat compressor cascades, based on a numerical simulation of turbulent flows. This technique is based on the application of quasi-solutions searching method to the solution of inverse problems. In this case the solution of the inverse problem is reduced to solving the problem of finding the global extreme of some target function. A parametric description of the shape of cascade profiles is made using an original method, based on the Bezier curves and the system of Hicks – Henne smooth convex functions. The application of this method makes it possible to vary the geometric parameters of the cascade in wide ranges by means of a relatively small number of variable parameters and the preservation of the physically feasible profile path. The calculation of the target function is performed by simulating the flow on the basis of the numerical integration of the averaged Navier–Stokes equations which are closed by means of the Spalart–Allmaras one-parameter turbulence model. A hybrid genetic algorithm is used to find the extreme of the target function. The technique proposed allows the determination of the geometrical parameters of the cascade for a given pressure distribution on the contour of the desired profile as well as from given integral aerodynamic characteristics of the cascade. It can also be used to solve problems of aerodynamic optimization of compressor cascades. In addition, this technique can be easily adapted to the solution of similar problems in the three-dimensional formulation.

Ключевые слова: *Компрессорная решетка, обратная задача газодинамики, аэродинамические характеристики, геометрические параметры решетки, распределение давления, уравнения Навье–Стокса, генетический алгоритм.*

Введение. Совершенствование компрессоров авиационных газотурбинных двигателей делает актуальной разработку эффективных методов и методик аэродинамического проектирования лопаточных венцов компрессоров. Аэродинамическое проектирование лопаточных венцов представляет собой сложный многоэтапный процесс, одним из основных этапов которого является решение обратной задачи газодинамики компрессорных венцов в двумерной постановке [1]. Под ее решением понимается определение геометрических параметров решетки профилей, течение в которой удовлетворяет заданным параметрам потока. Учитывая режимы работы современных компрессоров, в настоящей работе рассматривается возможность решения обратной задачи для различных режимов течения.

Разработка научно-методического обеспечения для решения данной задачи требует применения методов численного моделирования трансзвуковых газовых течений, параметрического описания поверхностей межлопаточных каналов компрессорных венцов, а также эффективной стратегии, управляющей ходом решения обратной задачи. Следует отметить, что решение обратной задачи, как правило, связано с большими вычислительными затратами, что совместно с высокими требованиями к энергетическим характеристиками современных компрессоров приводит к высоким требованиям к эффективности применяемых методов и моделей.

Несмотря на то, что на сегодняшний день существует значительное число публикаций, посвященных решению обратных задач, в соответствующих методиках используются либо упрощенные модели течения (например, модели идеального газа [2, 3]), либо таковые методики представляют собой определенные «ноу-хау» и полностью компаниями-разработчиками не раскрываются [4, 5]. В связи с этим представляется целесообразной разработка собственных эффективных методик решения обратных задач, основанных на моделях течения высокого уровня (например, системе уравнений Навье–Стокса) и современных подходах к их реализации. Таким образом, целью настоящей работы является разработка методики решения обратных задач газодинамики плоских компрессорных решеток на основе численного моделирования турбулентных течений.

Постановка классической обратной задачи газодинамики компрессорных решеток. Пусть Q, F – метрические пространства. Оператор A отражает F на Q и представляет собой решение прямой задачи. Постановка обратной задачи в общем виде выглядит как задача решения уравнения [6]

$$Az = q \tag{1}$$

относительно z, где $q \in Q$, $z \in F$.

Один из возможных вариантов постановки обратной задачи газодинамики компрессорных решеток подразумевает следующий вид правой части (1)

$$q = \left(M_1, \quad \beta_1, \quad \sigma, \quad p(s)/p_1^*\right)^T, \tag{2}$$

где M_1 – число Маха на входе в решетку; β_1 – угол входа потока в решетку; σ – густота решетки; $p(s)/p_1^*$ – распределение давления, отнесенное к полному давлению на входе в решетку.

Искомое решение задачи (1) представляет собой набор геометрических параметров решетки, течение в которой удовлетворяет условиям (2).

Для решения поставленной задачи удобно воспользоваться методом подбора квазирешения [6], который состоит в следующем. Для элементов z некоторого наперед заданного подкласса возможных решений M ($M \subset F$) вычисляется Az, т. е. решается прямая задача. В качестве приближенного решения выбирается такой элемент z_0 из множества M, на котором невязка $\rho_Q(Az, q)$ достигает минимума.

Применение данного подхода подразумевает необходимость решения следующих подзадач:

- определение подкласса возможных решений M;
- решение прямой задачи;
- организация процесса поиска приближенного решения.

Определение подкласса возможных решений. Подкласс возможных решений можно определить введением определенного способа параметрического описания формы компрессорной решетки. В рамках настоящей работы для параметрического описания решеток будем применять способ [7]. Его суть состоит в представлении профиля решетки в виде совокупности средней линии и толщины. При этом средняя линия профиля представляется в виде кривой Безье n-го порядка [8]:

$$\mathrm{X}(l) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(l) \mathrm{P}_i \,, \qquad (3)$$

где $\mathrm{X}(l)$ – вектор-функция координат средней линии профиля; $B_{i,n}(l) = \dfrac{n!}{i!(n-i)!} l^i (1-l)^{n-i}$ – многочлены Бернштейна; P_i – контрольные точки кривой Безье в системе координат, связанной с профилем, причем P_0, P_n представляют собой центры кривизны передней и задней кромок профиля; $l \in [0,1]$ – параметр кривой Безье.

Толщина профиля описывается с использованием гладких выпуклых функций Хикса–Хенне [9] и может быть представлена в виде:

$$\tilde{R}(l) = r_{LE} l + r_{TE}(1-l) + \sum_{k=1}^{m} H_k \sin\left[\pi l^{\ln(0,5)/\ln(l_k)}\right], \qquad (4)$$

где r_{LE}, r_{TE} – радиусы кривизны передней и задней кромок соответственно; H_k – весовые коэффициенты; l_k – положение максимальной амплитуды.

С целью сокращения числа варьируемых параметров введем дополнительные конструктивные ограничения вида

$$\begin{aligned} r_{LE} &= \alpha R_{\max} \\ r_{TE} &= \beta R_{\max} \end{aligned}, \qquad (5)$$

где α, β – константы, задаваемые из конструктивных соображений; $R_{\max} = \max\limits_{l}[R(l)]$ – максимальная толщина профиля.

Основное преимущество данного способа параметрического описания заключается в том, что варьирование средней линии и толщины профиля может осуществляться независимо друг от друга и при этом обеспечивается построение физически реализуемого контура профиля.

Решения прямой задачи. Вычисление выражения Az в настоящей работе выполняется с помощью метода численного моделирования течения на основе численного интегрирования системы осредненных уравнений Навье–Стокса [10] и однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса [11], записанных в системе обобщенных криволинейных координат ξ, η с якобианом J

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \eta} + \tilde{H}\,, \tag{6}$$

где $\tilde{U} = \frac{1}{J}U$; $\tilde{H} = \frac{1}{J}H$; $\tilde{E} = \frac{1}{J}\left(E\xi_x + F\xi_y\right)$; $\tilde{F} = \frac{1}{J}\left(E\eta_x + F\eta_y\right)$;

$$\tilde{E}_v = \frac{1}{J}\left(E_v\xi_x + F_v\xi_y\right); \quad \tilde{F}_v = \frac{1}{J}\left(E_v\eta_x + F_v\eta_y\right);$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \\ \rho\tilde{\nu} \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \\ \rho u\tilde{\nu} \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \\ \rho v\tilde{\nu} \end{pmatrix};$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \\ \mu_{eff}\tilde{\nu}_x \end{pmatrix};\ F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \\ \mu_{eff}\tilde{\nu}_y \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{turb} \end{pmatrix};$$

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tau_{xx}^T; \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_{xy}^T;$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tau_{yy}^T; \qquad q_x = -\lambda_T\frac{\partial T}{\partial x};\ q_y = -\lambda_T\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Производные $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ рассчитываются по правилу дифференцирования сложной функции.

В уравнениях приняты следующие обозначения: u, v – декартовы составляющие вектора скорости; ρ, p, e, T – плотность, давление, полная энергия и температура газа соответственно; μ – коэффициент динамической вязкости; λ_T – коэффициент теплопроводности, учитывающий влияние турбулентного переноса; $\tau_{i,j}^T$ – тензоры рейнольдсовых напряжений; $\tilde{\nu}$ – турбулентная псевдовязкость; μ_{eff} – диффузионный коэффициент модели турбулентности; H_{turb} – источниковый член модели турбулентности, содержащий члены генерации, диссипации, диффузии и т. д.

Численное интегрирование системы (6) реализовано с применением открытого программного кода OpenFOAM [12].

Организация процесса поиска приближенного решения. Применение метода поиска квазирешений к решению обратных задач подразумевает отыскание глобального экстремума. В связи с этим представляется целесообразным применить к решению задачи (1) – (2) стохастические алгоритмы поиска экстремумов функций.

В рамках настоящей работы применяется разработанный автором гибридный алгоритм поиска экстремума функций многих переменных. Он представляет собой генетический алгоритм [13] и симплекс-метод прямого поиска Нелдера–Мида [14], объединенные по параллельной схеме гибридизации, которая в процессе работы алгоритма постепенно превращается в двухфазную схему.

Определение геометрических параметров решетки по заданному распределению давления. Рассмотрим решение задачи (1) – (2). Учитывая, что параметры M_1 и β_1 можно задать в качестве граничных условий, а σ – как параметр расчетной области, задачу минимизации невязки $\rho_Q(Az,q)$ можно свести к задаче минимизации функционала следующего вида

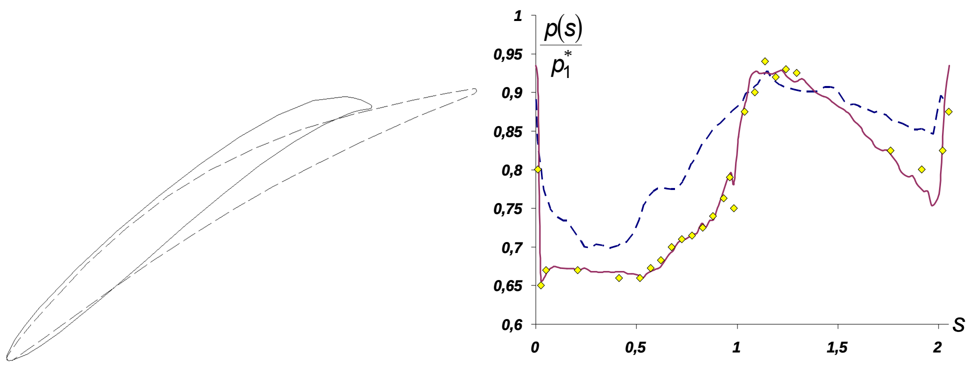
$$\rho_Q(Az,q) = \int_s \left| p(s) - p_z(s) \right| ds, \tag{7}$$

где $p(s)$ – исходно заданное распределение давления по обводу профиля; $p_z(s)$ – распределение давления, полученное в результате численного моделирования для возможного решения z.

Таким образом, результатом работы алгоритма поиска экстремума является набор геометрических параметров, обеспечивающих минимум целевой функции (7).

Выберем в качестве заданного распределение давления из работы [15], полученное в результате решения прямой задачи. Также из [15] можно определить, что густота решетки σ составляет 1,24, а число Маха на входе в решетку M_1 приближенно равняется 0,63. Угол входа потока β_1 равен 45°.

На рис. 1, а представлено сравнение профиля одной из решеток, выбранной в качестве начального приближения (показан пунктиром), с профилем решетки, полученной в результате решения обратной задачи (показан сплошной линией). Аналогично на рис. 1, б представлены соответствующие распределения давления по ободу профиля. Маркерами на рис. 1, б показано распределение давления из работы [15].



а) б)

Рис. 1

Визуальное сравнение формы профиля решетки, полученной в результате решения обратной задачи с использованием настоящей методики, с профилем решетки, представленным в работе [15], а также согласование соответствующих распределений давления по обводу профиля позволяет сделать вывод о работоспособности разработанной методики решения обратных задач газодинамики компрессорных венцов. Возможные незначительные отличия полученного профиля и профиля работы [15] могут быть объяснены использованием значительно более грубой расчетной сетки.

Построение решетки профилей по заданному углу поворота потока. Построение решетки профилей по заданному распределению давления на профиле относится, в некотором смысле, к классической обратной задаче газодинамики решеток профилей. Тем не менее, задание распределения давления основывается на опыте проектировщика и зачастую представляет собой нетривиальную задачу, особенно в случае трансзвуковых режимов течения в решетках. При этом на практике, как правило, требуется строить решетки профилей, обеспечивающие заданный поворот потока. В этом случае правую часть уравнения (1) можно записать в виде

$$q = \left(M_1,\quad \beta_1,\quad \sigma,\quad \Delta\beta\right)^T, \qquad (8)$$

где $\Delta\beta$ – угол поворота потока в решетке.

Применение к решению поставленной задачи (1), (8) метода поиска квазирешений с учетом приведенных выше рассуждений приводит к решению задачи поиска глобального экстремума функционала

$$\rho_Q\left(Az, q\right) = \left|\Delta\beta - \Delta\beta_z\right|, \qquad (9)$$

где $\Delta\beta_z$ – угол поворота в решетке, полученный в результате численного моделирования.

Легко видеть, что задача (1), (8) имеет неединственное решение. Так, например, очевидно, что при любых M_1 и σ вектору $q = \left(M_1,\quad 0°,\quad \sigma,\quad 0°\right)^T$ соответствует бесконечное множество решеток с симметричными профилями под нулевым углом установки. И, таким образом, поставленную задачу (1) – (8) можно отнести к существенно некорректным. Разрешение указанной проблемы может быть достигнуто за счет введения в выражение (9) стабилизирующего функционала, построенного с привлечением эмпирической информации об искомом решении [6]. Учитывая тот факт, что в компрессорных решетках разворот потока требуется выполнить с минимальными потерями полного давления, в качестве регуляризирующего функционала удобно выбрать $\zeta(z)$, где ζ – коэффициент потерь полного давления в решетке. В результате задача (1), (8) сводится к нахождению глобального экстремума функционала

$$M_C(z, q) = \left|\Delta\beta - \Delta\beta_z\right| + C\zeta(z), \qquad (10)$$

где C – параметр регуляризации.

Таким образом, результатом работы поиска экстремума является набор геометрических параметров, обеспечивающих минимум целевой функции (10).

Зададимся следующим набором входных параметров: $M_1 = 0{,}6$, $\beta_1 = 36°$, $\sigma = 1$, $\Delta\beta = 36°$. Таким образом, решетка должна обеспечивать направление выходящего потока вдоль оси решетки. Эти параметры соответствуют задаче построения выходного направляющего аппарата работы [16] и представляют собой нетривиальную задачу проектирования, что связано с достаточно большим требуемым углом поворота потока.

На рис. 2 представлены два профиля решеток, сгенерированных в качестве начальных приближений решения задачи, вместе с линиями тока. Из рис. 2 видно, что данные профили не обеспечивают заданный поворот потока (линии тока на выходе из решетки не направлены строго горизонтально). Кроме того, значительная толщина профилей, а также отрыв потока вследствие чрезмерного изгиба приводит к высоким потерям полного давления в потоке.

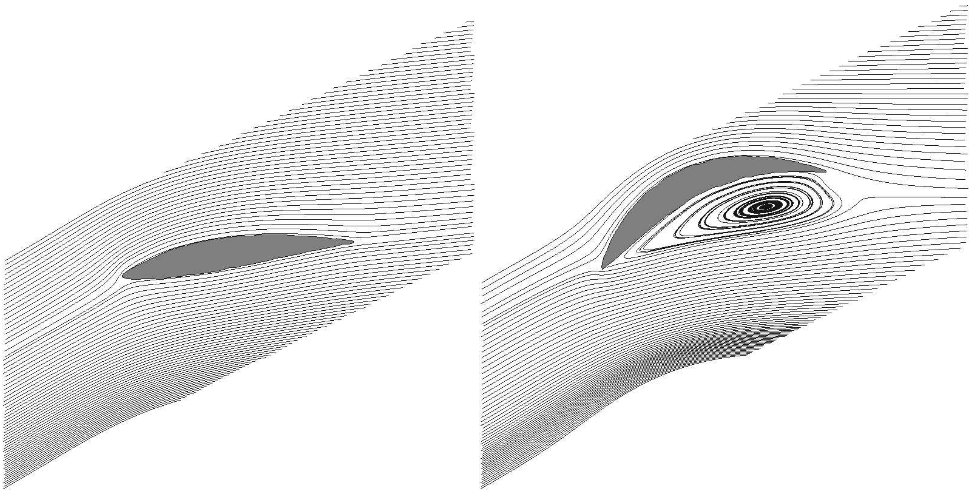


Рис. 2

На рис. 3 представлен профиль решетки, полученной в результате решения обратной задачи. Изолинии течения, также представленные на рис. 3, позволяют сделать вывод, что профиль обеспечивает заданный поворот потока.

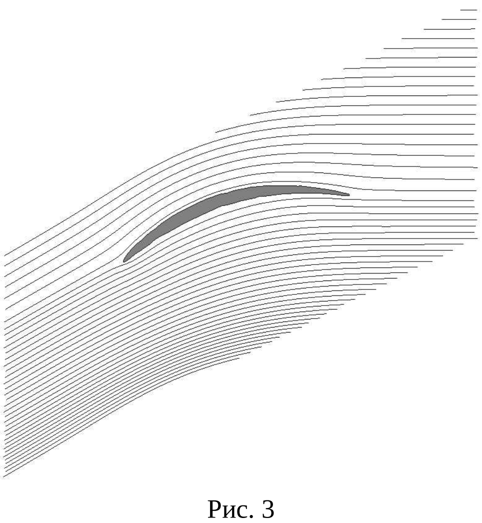


Рис. 3

Выводы. Представлена методика решения обратных задач газодинамики плоских компрессорных решеток на основе численного моделирования турбулентных течений. Методика основана на применении метода поиска квазирешений к решению обратной задачи. В результате решение обратной задачи сводится к решению задачи поиска глобального экстремума некоторой целевой функции.

Параметрическое описание формы профилей решеток выполнено с использованием оригинального способа, основанного на применении кривых Безье и системы гладких выпуклых функций Хикса–Хенне. Применение данного способа позволяет варьировать геометрические параметры решетки в широком диапазоне с использованием сравнительно малого числа варьируемых параметров и сохранением физически реализуемого контура профиля.

Расчет целевой функции выполняется путем моделирования течения на основе численного интегрирования системы осредненных уравнений Навье–Стокса, замкнутых с помощью однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса. Для поиска экстремума целевой функции применяется гибридный генетический алгоритм.

Разработанная методика позволяет определять геометрические параметры по заданному распределению давления по обводу искомого профиля, а также по заданным интегральным аэродинамическим характеристикам решетки. Она также может быть использована для решения задач аэродинамической оптимизации компрессорных решеток. Кроме того, данная методика может быть легко адаптирована к решению аналогичных задач в трехмерной постановке.

1. *Иноземцев А. А.* Газотурбинные двигатели / *А. А. Иноземцев, В. Л. Сандрацкий.* – Пермь : ОАО «Авиадвигатель», 2006. – 1202 с.
2. *Елизаров А. М.* Обратные краевые задачи аэродинамики. Теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей / *А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев.* – Магадан, 2006. – 436 с.
3. *Аульченко С. М.* Оптимизация решеток профилей вариационно-градиентным методом / *С. М. Аульченко* // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Том 12, № 3. – С. 357 – 363.
4. *Sanz J. M.* Lewis Inverse Design Code (LINDES) / *J. M. Sanz* // Nasa Technical Paper. – 1987. – N 2676. – 67 p.
5. *Tiow W. T.* Application of a three-dimensional viscous transonic inverse method to NASA rotor 67 / *W. T. Tiow, M. Zangenesh* // Proc. Instn. Mech. Engrs : J. Power and Energy. – 2002. – Vol. 216. – P. 243 – 255.
6. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.* – М. : Наука, 1979. – 285 с.
7. *Мелашич С. В.* Способ параметрического описания профилей компрессорных решеток / *С. В. Мелашич* // Техническая механика. – 2012. – № 2. – С. 77 – 82.
8. *Piegl L.* The NURBS Book / *L. Piegl, W. Tiller.* – Berlin : Springer, 1996. – 327 p.
9. *Hicks R.* Wing Design by Numerical Optimization / *R. Hicks, P. Henne* // Journal of Aircraft. – 1978. – Vol. 15, N. 7. – P. 407 – 413.
10. *Tannehill J. C.* Computational fluid dynamics and heat transfer (Second edition) / *J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher.* – New York : Taylor & Francis, 1997. – 785 p.
11. *Spalart P. R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow / *P. R. Spalart, S. R. Allmaras* // AIAA Paper. – 1992. – Vol. 12, No 1. – P. 439 – 478.
12. URL: http://www.openfoam.com/
13. *Poli R.* A Field Guide to Genetic Programming [Електронный ресурс] / *R. Poli, W. B. Langdon, N. F. McPhee.* – Published via http://lulu.com, 2008. – 250 p. – Режим доступа к книге: http://www.lulu.com/items/volume_63/2167000/2167025/2/print/book.pdf
14. *Nelder J. A.* A Simplex Method for Function Minimization / *J. A. Nelder, R. Mead* // The Computer Journal. – 1965. – Vol. 7, N 4. – P. 308 – 313.
15. *Prasad B. V. S. S. S.* CFD for Turbomachinery / *B. V. S. S. S. Prasad, Y. V. S. S. Sanyasiraju* // E-Learning courses from the IITs & IISc. – Режим доступа: http://nptel.ac.in/courses/112106061/1
16. *Мелашич С. В.* Проектирование направляющего аппарата последней ступени осевого компрессора на основе решения обратной и прямой задачи газодинамики / *С. В. Мелашич, Ю. Г. Калинкина, В. И. Письменный* // Авиационно-космическая техника и технология. – 2009. – № 7 (64). – С. 56 – 60.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 19.02.15,
в окончательном варианте 05.03.15