УДК 519.2 https://doi.org/10.15407/itm2023.03.068

Е. Г. ГЛАДКИЙ, В. І. ПЕРЛИК

УНІВЕРСАЛЬНИЙ СПЛАЙН-ПЕРТУРБАЦІЙНИЙ РОЗПОДІЛ

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К.Янгеля»;
вул. Криворізька,3, м. Дніпро, Україна; e-mail: edgladky@gmail.com

Розглянуто задачу побудови ймовірнісного розподілу випадкової величини за відомими числовими характеристиками. Задача є актуальною при визначенні параметричної надійності технічних систем, коли за допомогою аналітичних методів визначаються числові характеристики (зокрема, характеристики скошеності та ексцесу) вихідного параметру (змінної стану) і потрібно відновити його розподіл. Це можливо зробити з використанням чотирипараметричного універсального розподілу, що дозволяє однією аналітичною формою охопити певні (бажано якнайбільші) області значень коефіцієнту скошеності та ексцесу. Найвідомішим універсальним розподілом є розподіл Грама–Шарльє, який являє деформацію нормального розподілу, отриману за допомогою розкладання за ортогональними поліномами Чебишова–Ерміта. Проте в загальному випадку функція розподілу Грама–Шарльє не є монотонно-зростаючою. Для певних комбінацій значень коефіцієнтів скошення та ексцесу у кривої густини можуть з'являтися виходи до від'ємних областей та кілька мод. Отже, пошук інших універсальних розподілів з метою охоплення більших областей значень коефіцієнтів скошення та ексцесу є актуальним.

Аналізується спосіб побудови універсального імовірнісного розподілу шляхом множення нормальної густини на пертурбаційний многочлен у вигляді сплайна (названо сплайн-пертурбаційним розподілом). Ідею такого розподілу було запропоновано раніше з метою врахувати відмінний від нуля коефіцієнт скошення. Сплайн будується на основі інтерполяційних багаточленів Ерміта третього порядку із двома вузлами, що містить мінімальну кількість параметрів і має властивість локальності. Базовий розподіл побудовано для сплайна з чотирма вузлами склейки.

Показано розвиток і узагальнення такого сплайн-пертурбаційного розподілу на випадок, коли відмінними від нуля є коефіцієнти скошення та ексцесу. Перший варіант представляє композицію двох сплайнів, що мають чотири і п'ять вузлів відповідно. Перший з них дозволяє врахувати скошення, другий – ексцес. Отримано інтегральні рівняння для визначення значень у вузлових точках обох сплайнів і побудови розподілу. Другий варіант є більш загальним і використовує лише один Ермітів сплайн з п'ятьма вузлами. Показано спосіб побудови такого узагальненого сплайн-пертурбаційного розподілу з метою виключення у густини виходів до від'ємної області та утворення кількох мод. Підгонка (вибір вузлових точок) передбачає використання методу перебору. Визначено умови відсутності у такого розподілу виходів до від'ємних областей та утворення кількох мод.

Ключові слова: *універсальний чотирипараметричний розподіл, коефіцієнт скошення, коефіцієнт ексцесу, розподіл Грама–Шарльє, Ермітів сплайн.*

This paper considers the problem of probability distribution construction for a random variable from known numerical characteristics. The problem is of importance in determining the parametric reliability of engineering systems when the numerical characteristics (in particular, the bias and the kurtosis) of an output parameter (state variable) are determined by analytical methods and its distribution must be recovered. This may be done using a four-parameter universal distribution, which allows one to cover certain ranges (preferably, as wide as possible) of the bias and kurtosis coefficients using a single analytical form. The most familiar universal distribution is Gram–Charlier's, which is a deformation of the normal distribution obtained using a Chebyshev–Hermite orthogonal polynomial expansion. However, in the general case, Gram–Charlier's distribution function is not a steadily increasing one. For some combinations of the bias and kurtosis coefficients, the density curve may exhibit negative values and multiple modes. Because of this, a search for other universal distributions to cover wider ranges of the bias and kurtosis coefficients is of current importance.

The paper analyzes a method of universal probability distribution construction by multiplying the normal density by a perturbing polynomial in the form of a spline (referred to as the spline-perturbed distribution). The idea of a distribution of this type was proposed earlier to account for a nonzero bias coefficient. The spline is constructed based on Hermite's interpolating polynomials of the third degree with two knots, which have a minimum of parameters and possess a locality property The basic distribution is constructed for a four-knot spline.

The paper further develops and generalizes the spline-perturbed distribution to nonzero bias and kurtosis coefficients. Two cases are considered. The first case is a composition of two splines that have four and five knots, respectively. The former and the latter allow one to account for the bias and the kurtosis, respectively. Integral equations are obtained to find the values at the knots of both splines and construct the distribution. The second case is more general and uses one five-knot Hermite spline. The paper shows a way to construct a generalized spline-perturbed distribution without any negative density values or any multiple modes. The knot points are chosen using an enumerative technique. Conditions for the absence of negative density values and multiple nodes are identified.

Keywords: *universal four-parameter distribution, bias coefficient, kurtosis coefficient, Gram-Charlier' distribution, Hermite spline.*

У багатьох практичних задачах дослідники стикаються з необхідністю побудови ймовірнісного розподілу, що описує випадкову величину лише за відомими числовими характеристиками. Така задача, наприклад, є характерною при визначенні параметричної надійності за методом функцій працездатності [7]. У відповідності до нього нормальне функціонування технічної системи (розглянемо одновимірний випадок, до якого може бути зведено більшість практичних задач) може бути описано нерівністю

$$Z = \text{¨}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > 0\,,$$

що відображає відсутність відмови (наприклад, відсутність втрати міцності або стійкості конструкції, герметичності, тощо), де $\text{¨}(\bullet)$ – формалізована умова відсутності відмови; Z – вихідний параметр (змінна стану); $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – вектор первинних (вхідних) параметрів. Як імовірність безвідмовної роботи використовують ймовірність виконання нерівності

$$P = \Pr\left\{Z = \text{¨}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > 0\right\},$$

яка визначається таким чином

$$P = \Pr\left\{Z > 0\right\} = \int_0^{\infty} g(z)dz,$$

де $g(z)$ – густина розподілу змінної стану Z, яку потрібно відновити.

Отже маємо задачу побудови густини $g(z)$, що описує функцію кількох випадкових величин. Отримати розподіл такої функції, виходячи із класичних інтегральних перетворень (за винятком відносно простих $\text{¨}(\bullet)$) досить складно, а інколи і не можливо. Проте за допомогою відомих процедур, в основі яких розкладання в ряд Тейлора [1, 7, 10], можна визначити числові характеристики досліджуваної функції випадкових величин. В цьому випадку єдиною інформацією щодо вихідного параметра (змінної стану) є числові характеристики, за якими потрібно відновити розподіл.

Треба зауважити, що у класичній задачі підгонки розподілу за статистичними даними розповсюдженим є прийом, коли дослідник визначає оцінки числових характеристик і, виходячи з отриманих значень, обирає та будує необхідну функцію густини. Це підгонка статистичних даних розподілом за методом моментів.

Досить часто, вирішуючи практичні задачі відновлення розподілу за числовими характеристиками, дослідники не здійснюють підбір необхідної функції густини, а використовують певні універсальні форми. Такий підхід дозволяє забезпечити високий ступінь узагальнення розрахункових алгоритмів. Наприклад, розповсюдженим є використання нормального розподілу, при цьому апріорно припускається, що досліджувана випадкова величина має нормальні властивості у відповідності до центральної граничної теореми. В цьому випадку математичне сподівання та дисперсію вихідного параметра Z визначають за методом лінеаризації [1].

Проте у більшості випадків потрібно враховувати відмінні від нуля коефіцієнти скошення та ексцесу, адже як з’ясували автори на прикладі ракетно-космічних систем, багатьом параметрам і характеристикам технічних систем притаманні відмінні від нормального випадку властивості. У такій ситуації доцільним слід вважати використання для апроксимації випадкових величин класу чотирипараметричних розподілів, тобто універсальних одновимірних розподілів, які охоплюють досить широку область можливих значень коефіцієнтів скошення та ексцесу (в ідеалі всю область), зберігаючи при цьому сталість математичної форми кривої. Насамперед до таких універсальних відносять розподіл Грама–Шарльє (представляє розкладання невідомої густини за ортогональними поліномами Чебишова–Ерміта), що для нормованої випадкової величини має вигляд [4, 5]

$$f_{HC}(x) = \left\{1 + \frac{\gamma_1}{3!}(x^3 - 3x) + \frac{\gamma_2}{4!}(x^4 - 6x^2 + 3)\right\} N(x)\,, \qquad (1)$$

де $N(x)$ – функція густини стандартного нормального розподілу; γ_1, γ_2 – коефіцієнти скошеності та ексцесу відповідно ($\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$, $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$).

Розподіл Грама–Шарльє будується безпосередньо за відомими числовими характеристиками випадкової величини, і його вважають фактично класичним на рівні із нормальним. До таких універсальних чотирипараметричних розподілів також належать розподіл Якобі [2] та узагальнений лямбда-розподіл [12]. Проте вони є більш складними у використанні.

У всіх згаданих універсальних розподілів є певні обмеження, що зменшують можливості їх використання на практиці. Насамперед це виходи кривої густини до від'ємних областей (називатимемо такі виходи «від'ємними хвостами») та утворення кількох мод. Останнє теж не є бажаним, адже, як показали дослідження авторів, більшості реальних параметрів технічних систем характерні розподіли, що мають одну моду (унімодальні).

Отже, пошук універсальних (чотирипараметричних) імовірнісних розподілів, які, насамперед, можуть скласти альтернативу розподілу Грама–Шарльє, є досить актуальною задачею.

У багатьох випадках для отримання універсальних розподілів розглядають певні деформації нормальної густини. Наприклад, з цією метою використовується множення останньої на деяку підходящу функцію. Зокрема, таким чином будується так званий скошений нормальний розподіл (*skew-normal distribution*) [11, 13]. Він являє собою узагальнення нормального розподілу, який дозволяє врахувати скошеність, та визначається таким чином

$$f_{SN}(x) = 2N(x)\Phi(\lambda x)\,,$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа; λ – параметр, який визначає скошеність.

Розподіл Грама–Шарльє (1) також може розглядатися як певна деформація нормального закону, в якому нормальна густина помножена на деякий багаточлен.

У роботі [8] для опису випадкових величин з відмінними від нуля значеннями коефіцієнта асиметрії (за нульового ексцесу) авторами було запропоновано розподіл, який являє собою добуток нормальної густини та пертурбаційної функції у вигляді сплайна. На жаль, такий спосіб побудови розподілів не отримав подальшого розвитку, хоча він надає певні можливості для отримання універсальних розподілів й у загальному випадку, коли відмінними від нуля є коефіцієнти скошення та ексцесу. У зв'язку з цим, насамперед, дамо стислий огляд отриманого в [8] розподілу та запропонуємо його розвиток та узагальнення. Наближення функції густини розподілу нормованої випадкової величини X з ненульовою асиметрією в зазначеній роботі було запропоновано розшукувати серед функцій виду

$$f_S(x) = \left(1 + \quad {}_1 S(x)\right) N(x)\,, \tag{2}$$

де $S(x)$ – деякий сплайн.

Розподіли отримані таким способом називатимемо сплайн-пертурбаційними розподілами (СПР), на відміну від традиційного сплайн-розподілу, який являє собою «склейку» кількох густин (дивись, наприклад [3, 6]).

Сплайн $S(x)$, що використовується у (2), визначається для точок x_i ($i = \overline{1,4}$) таких, що $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ і $x_1 = -x_4$; $x_2 = -x_3$. Крім того, він має задовольняти наступним вимогам:

- $S(x) = S(x_1)$ для $x < x_1$ і $S(x) = S(x_4)$ для $x > x_4$;
- на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 2, 3, 4$) $S(x)$ є кубічна парабола;
- $S(x)$ є функція, що безперервно диференціюється на всій осі, до того ж $S'(x_i) = 0$.

Вказаним вимогам на відрізку $[x_1, x_4]$ задовольняє Ермітів сплайн, який на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ являє інтерполяційний багаточлен Ерміта третього порядку із двома вузлами. Загальний вираз для інтерполяційного багаточлена Ерміта непарного степеня має вигляд [9]

$$P_{2q+1}(x) = \sum_{p=0}^{q} \sum_{s=0}^{q-p} \frac{(q+1+s)!}{s!\,p!(q+1)!} \left\{ P_{2q+1}^{p}(x_{i-1}) \frac{(x - x_{i-1})^{p+s}(x - x_i)^{q+1}}{(x_{i-1} - x_i)^{q+1+s}} + \right.$$
$$\left. + P_{2q+1}^{(p)}(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^{q+1}(x - x_i)^{p+s}}{(x_i - x_{i-1})^{q+1+s}} \right\},$$

де $P_{2q+1}^{p}(\bullet)$ – значення похідної порядку p у відповідному вузлі.

Перевага Ермітового сплайна полягає в тому, що для своєї побудови він вимагає мінімальної кількості параметрів і має властивість локальності, адже його поведінка та побудова на будь-якому з інтервалів $[x_{i-1}, x_i]$ не залежить від поведінки та побудови на інших відрізках.

Відповідно до висунутих вимог на кожному з інтервалів $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 2, 3, 4$) сплайн $S(x)$ матиме вигляд

$$S(x) = S(x_i) P\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + S(x_{i-1}) P\left(\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}\right), \tag{3}$$

де $P(x) = -2x^3 + 3x^2$; $S(x_{i-1})$, $S(x_i)$ – значення сплайна у вузлах x_{i-1} і x_i відповідно.

Звідси, зокрема, випливає, що сплайн $S(x)$ однозначно визначається значеннями у вузлах склейки. На рис. 1 показано графік функції $S(x)$. Для порівняння пунктиром показано графік полінома Ерміта $H_3(x)$, який на відміну від (3) у разі $x \to \pm\infty$ прагне до нескінченності.

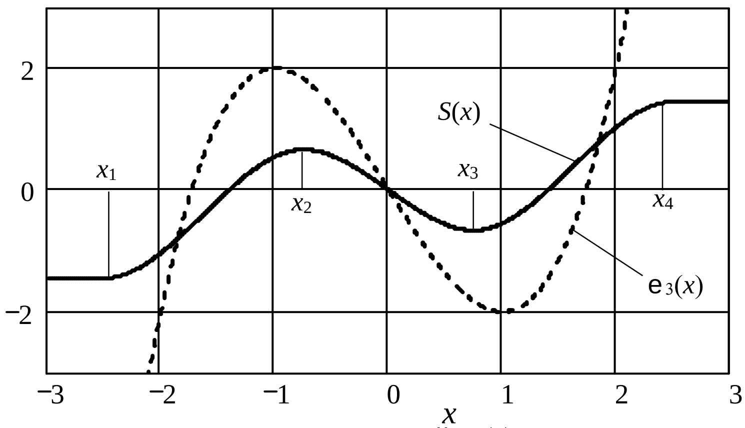

Рис. 1 – Сплайн $S(x)$

На функцію густини (2) треба накласти такі умови у вигляді інтегральних рівнянь

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f_S(x)dx = «_k \text{ для } k = \overline{0,3}\,, \tag{4}$$

де $«_0 = 1$; $«_1 = 0$; $«_2 = 1$; $«_3 = \;1$.

Виходячи із (4), випливає, що сплайн $S(x)$ у виразі густини (2) повинен задовольняти таким співвідношенням:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i N(x)S(x)dx = 0 \quad (i = 0, 1, 2); \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 N(x)S(x)dx = 1\,. \tag{6}$$

Сукупність співвідношень (5), (6), в яких позначимо $S(x_i) = a_i$ ($i = \overline{1,4}$), є системою лінійних відносно a_i рівнянь, яка має єдиний розв'язок. Зі співвідношення $S(–x) = –S(x)$ випливає, що сплайн $S(x)$ є непарним, тобто $a_1 = –a_4$, $a_2 = –a_3$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2i} N(x)S(x)dx = 0\,,$$

і відповідно рівняння (5) для $i = 0, 2$ задовольняються тотожно. Крім того, $f_S(x)$ має нормальний ексцес.

Таким чином, задача зводиться до пошуку непарного сплайна $S(x)$, для якого виконуються умови (5) для $i = 1$ і (6). Для них з урахуванням симетричності підінтегральних функцій маємо

$$\left[\int_0^{x_3} x^{2i-1}N(x)\left[P\left(\frac{x_3+x}{2x_3}\right)-P\left(\frac{x_3-x}{2x_3}\right)\right]dx+\int_{x_3}^{x_4} x^{2i-1}N(x)P\left(\frac{x_4-x}{\Delta}\right)dx\right]a_3+$$

$$+\left[\int_{x_3}^{x_4} x^{2i-1}N(x)P\left(\frac{x-x_3}{\Delta}\right)dx+\int_{x_4}^{\infty} x^{2i-1}N(x)dx\right]a_4=\begin{cases}0, & i=1\\ \frac{1}{2}, & i=2\end{cases},$$

де $\Delta = x_4 - x_3$.

Останній вираз визначає систему рівнянь, за допомогою якої визначаються значення сплайна a_3, a_4 у вузлах. Розв'язання системи отримуємо у термінах функцій

$$¢_k(a,b)=\int_a^b x^k N(x)dx,$$

яка визначається за допомогою такої рекурентної формули

$$¢_k(a,b)=(k-1)¢_{k-2}(a,b)+a^{k-1}N(a)-b^{k-1}N(b),\ k=2,3,\ \ldots$$

Ця рекурентна формула випливає з інтегралу

$$\delta_k(t)=\int_{-\infty}^{t} x^k N(x)dx,$$

для якого $¢_0(t)=\Phi(t)$, $¢_1(t)=-N(t)$ і $¢_k(t)=-t^{k\text{-}1}N(t)+(k-1)¢_{k-2}(t)$ у випадку k = 2, 3,...

Авторами [8] доведено низку теорем, що визначають застосовність побудованого СПР. Так, якщо $S(x)$ – Ермітів сплайн, тоді з його властивостей випливає, що

$$\max_{-\infty<x<\infty}\left|S(x)\right|=\max_{1\le i\le 4}\left|S(x_i)\right|. \quad (7)$$

Оскільки $S(x)$ непарна функція, то для всіх x у разі виконання умови

$$\left|\beta_1\right|\le\frac{1}{\max\left(\left|a_1\right|,\left|a_2\right|\right)} \quad (8)$$

справедливою є нерівність $1+\ \ _1S(x)\ge 0$. Відповідно, для значень $_1$, що задовольняють нерівності (8), функція $f_S(x)$ всюди додатна.

Область значень $_1$, для яких $f_S(x)$ унімодальна, визначається виходячи із умови, що рівняння $f'_S(x)=0$ повинно мати один корінь.

Варіюючи положенням вузлів сплайна $S(x)$, можна домогтися, щоб область значень $_1$, для яких $f_S(x)$ додатна та унімодальна, була найбільшою. Наприклад, було визначено, що у випадку $x_1 = -x_4 = -2{,}5$, $x_2 = -x_3 = -0{,}75$ область використання розподілу (2) максимальна і становить для $_1$ [0; 0,65]. При цьому $-a_1 = a_4 = 1{,}44740$; $-a_2 = a_3 = -0{,}66285$.

Тепер побудуємо сплайн-пертурбаційний розподіл для загального випадку, коли відмінними від нуля є коефіцієнти скошення та ексцесу. Для цього при побудові розподілу разом із $S(x)$ необхідно використати сплайн $S_4(x)$, визначений для п'яти вузлів (рис. 2), таких що $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ і $x_1 = -x_5$;

$x_3 = 0$; $x_2 = -x_4$. При цьому вищезазначені властивості для такого Ермітового сплайна зберігаються (вочевидь з урахуванням п'яти вузлів, а також $S_4(x) = S_4(x_1)$ для $x < x_1$ і $S_4(x) = S_4(x_5)$ для $x > x_5$). Густину розподілу нормованої випадкової величини тепер запишемо у вигляді

$$f_S(x) = \left(1 + \ _1S(x) + \ _2S_4(x)\right)N(x). \quad (9)$$

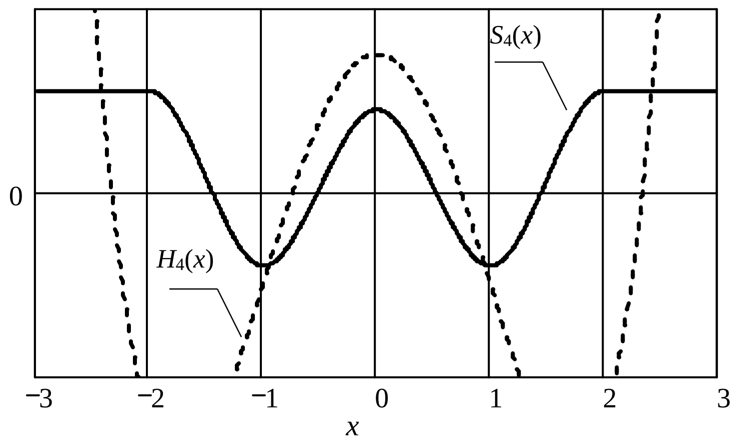

Рис. 2 – Сплайн $S_4(x)$

Неважко помітити, що (2) є окремим випадком (9) у разі $\ _2 = 0$.

Розподіл (9) має задовольняти таким інтегральним співвідношенням

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i \left[\ _1S(x) + \ _2S_4(x)\right]N(x)dx = 0 \text{ для } i = \overline{0,2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \left[\ _1S(x) + \ _2S_4(x)\right]N(x)dx = \ _1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \left[\ _1S(x) + \ _2S_4(x)\right]N(x)dx = \ _2.$$

Враховуючи те, що кожен з цих інтегралів може бути поданий у вигляді суми двох інтегралів, зрозуміло, що задача побудови $f_S(x)$ у формі (9) поділяється на дві окремі задачі: побудови сплайнів $S(x)$ та $S_4(x)$. При цьому для побудови $S(x)$ використовуються вже отримані раніше співвідношення. Для побудови $S_4(x)$ і відповідно розподілу (9) необхідно виконання таких інтегральних співвідношень

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i S_4(x)N(x)dx = 0 \text{ для } i = \overline{0,3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 S_4(x)N(x)dx = 1.$$

Сплайн $S_4(x)$ є парним $S(-x) = S(x)$, відповідно $a_1 = a_5$, $a_2 = a_4$, а отже інтегральні співвідношення для $i = 1, 3$ виконуються автоматично. Інші співвідношення використовуємо для побудови системи рівнянь, за допомогою яких визначаються a_3, a_4, a_5. Система рівнянь з урахуванням симетричності підінтегральних функцій набуває вигляду

$$a_3\int_0^{x_4} x^i P\left(\frac{x_4-x}{x_4}\right)N(x)dx + a_4\left[\int_0^{x_4} x^i P\left(\frac{x}{x_4}\right)N(x)dx + \int_{x_4}^{x_5} x^i P\left(\frac{x_5-x}{x_5-x_4}\right)N(x)dx\right] +$$

$$+a_5\left[\int_{x_4}^{x_5} x^i P\left(\frac{x-x_4}{x_5-x_4}\right)N(x)dx + \int_{x_5}^{\infty} x^i N(x)dx\right] = \begin{cases} 0, \text{ для } i=0,2 \\ \frac{1}{2}, \text{ для } i=4 \end{cases}. \qquad (10)$$

Розв’язавши систему (10), отримуємо значення сплайна у вузлах a_3, a_4, a_5.

При побудові розподілу (9) ми стикаємося із тією ж проблемою «від’ємних хвостів» і полімодальності. Для її розв’язку необхідно спільне варіювання положенням вузлів обох сплайнів $S(x)$ і $S_4(x)$. Подібна задача є більш складною у порівнянні з пошуком вузлів лише одного сплайна $S(x)$. Так, наприклад, задачу спільного варіювання вузлів $S(x)$ і $S_4(x)$ було розв’язано для таких числових характеристик $_1$ = 0,5, $_2$ = –0,2, при цьому використовувалися вже визначені вузли для сплайна $S(x)$. Вузлові точки сплайна $S_4(x)$, які забезпечили відсутність «від’ємних хвостів» і полімодальності розподілу (9), дорівнюють

$$x_1 = -4{,}0,\ x_2 = -2{,}0,\ x_3 = 0;\ x_4 = 2{,}0;\ x_5 = 4{,}0$$

і для них шляхом розв’язання системи (10) значення сплайна у вузлових точках

$$a_1 = 3{,}84182;\ a_2 = -0{,}31079;\ a_3 = 0{,}13801;\ a_4 = -0{,}31079;\ a_5 = 3{,}84182.$$

Найбільш загальним варіантом одновимірного сплайн-пертурбаційного розподілу є така форма

$$f_S(x) = \left[1 + S_{3(5)}(x)\right]N(x), \qquad (11)$$

де $S_{3(5)}(x)$ – Ермітів сплайн третього порядку, визначений для п’яти вузлів x_i $\left(i=\overline{1,5}\right)$.

Для того, щоб моменти розподілу (11) відповідно дорівнювали «$_0$ = 1; «$_1$ = 0; «$_2$ = 1; «$_3$ = $_1$; «$_4$ = $_2$+3 на сплайн $S_{3(5)}(x)$ необхідно накласти такі умови, виражені у вигляді інтегральних рівнянь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^i S_{3(5)}(x)N(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ для } i=\overline{0,2}; \\ {}_1, \text{ для } i=3; \\ {}_2, \text{ для } i=4. \end{cases} \qquad (12)$$

Якщо задатися значеннями вузлів x_i, зрозуміло, що як і у попередніх випадках побудова сплайна $S_{3(5)}(x)$ полягає у відшуканні його значень у вузлових точках $a_i = S_{3(5)}(x_i)$ $\left(i=\overline{1,5}\right)$. Останні можуть бути знайдено шляхом розв’язку системи лінійних рівнянь, що випливають із (12)

$$\sum_{j=1}^{5} a_j J_j^{(i)} = \begin{cases} 0, \text{ для } i=\overline{0,2} \\ {}_1, \text{ для } i=3 \\ {}_2, \text{ для } i=4 \end{cases}, \qquad (13)$$

де коефіцієнти при невідомих $J_j^{(i)}$ визначаються таким чином:

$$J_1^{(i)} = \text{¢}^{(i)}(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} x^i P\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) N(x)dx\,;$$

$$J_j^{(i)} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^i P\left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right) N(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^i P\left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}\right) N(x)dx \ \ (j = \overline{2,4});$$

$$J_5^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} x^i P\left(\frac{x - x_4}{x_5 - x_4}\right) N(x)dx + \left(\text{«}_i - \text{¢}^{(i)}(x_5)\right).$$

Отже, розв’язуючи систему (13) відносно a_i ($i = \overline{1,5}$), ми тим самим однозначно визначаємо сплайн $S_{3(5)}(x)$ та на його основі розподіл (11).

Вузлові точки x_i при побудові СПР (11) можуть бути обрані довільно, виходячи з міркувань відсутності у нього «від’ємних хвостів» і полімодальності. При цьому не обов’язково задаватися обмеженнями типу $x_1 = –x_5$, $x_2 = –x_4$, які дозволяють зменшити розмірність розв’язуваної задачі.

Враховуючи властивість Ермітового сплайна (7), можна запропонувати просте правило для забезпечення відсутності у розподілу (11) «від’ємних хвостів». Для цього достатньо одночасного виконання нерівностей

$$a_i = S_{3(5)}(x_i) > -1 \ \text{для} \ i = \overline{1,5}\,.$$

Пошук функції густини, що має одну моду, на практиці може виконуватися таким чином, виходячи із загального співвідношення $f_S'(x) = 0$. Для цього необхідно, щоб на інтервалах (x_{i-1}, x_i) (i = 2, 3, 4) рівняння

$$S_{3(5)}'(x) - x(1 + S_{3(5)}(x)) = 0$$

у сумі мало лише один дійсний корінь. Неважко зрозуміти, що на кожному із зазначених інтервалів функція $S_{3(5)}'(x) - x(1 + S_{3(5)}(x))$ являтиме поліном четвертого степіня.

Проте, навіть незважаючи на зазначені рекомендації, визначення вузлових точок $S_{3(5)}(x)$ все одно являє досить складну задачу перебору, оскільки потрібно варіювати відразу п’ятьма параметрами. Очевидно, задачу вибору вузлових точок сплайна доведеться розв’язувати для кожної конкретної пари значень $_1$ *і* $_2$. Як приклад, для числових характеристик $_1$ = 0,7 і $_2$ = 0,5 (значення не дозволяють використати розподіл Грама–Шарльє) шляхом перебору було знайдено такі значення вузлових точок сплайна $S_{3(5)}(x)$:

$$x_1 = –4{,}0;\ x_2 = –2{,}7;\ x_3 = –0{,}5;\ x_4 = 1{,}0;\ x_5 = 3{,}7;$$

і шляхом розв’язку системи (13) значення сплайна у цих вузлових точках:

$$a_1 = –0{,}73484;\ a_2 = –0{,}81211;\ a_3 = 0{,}34438;\ a_4 = –0{,}45903;\ a_5 = 2{,}75024.$$

Вигляд сплайна $S_{3(5)}(x)$ і отриманої функції густини розподілу (11) для розглянутого прикладу показано на рис. 3 і рис. 4.

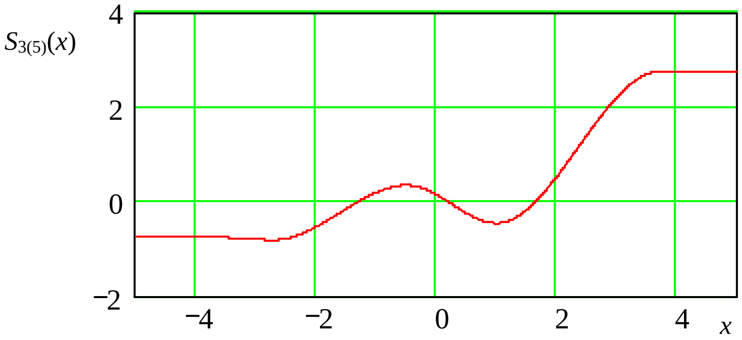

Рис. 3 – Сплайн $S_{3(5)}(x)$

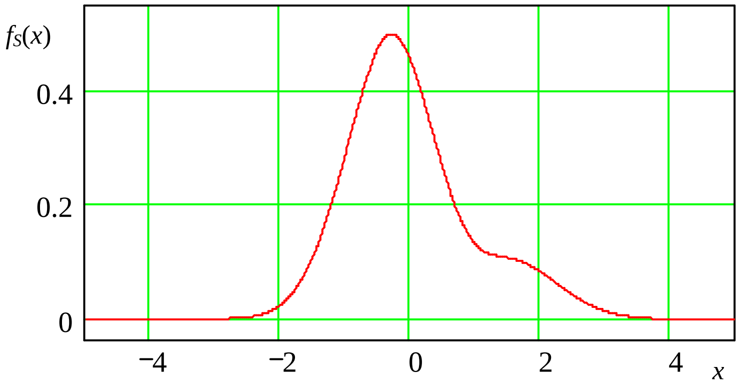

Рис. 4 – Функція густини СПР (11)

На завершення надамо вираз для функції розподілу (11)

$$F_S(t) = \int_{-\infty}^{t} f_s(x)dx = \Phi(t) + R'(t),$$

де $R'(t) = \int_{-\infty}^{t} S_{3(5)}(x)N(x)dx$.

Таким чином, якщо в процесі побудови розподілу випадкової величини дослідник, виходячи із значень коефіцієнтів скошення та ексцесу, не має можливості використовувати розподіл Грама–Шарльє, може бути розглянуто можливість застосування сплайн-петрубаційного розподілу (9) або (11).

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
2. *Гладкий Э. Г.* Использование вероятностного распределения Якоби для аппроксимации эмпирических статистических распределений. Техническая механика. 2017. №1. С. 107–122. https://doi.org/10.15407/itm2017.01.107
3. *Губарев В. В.* Таблицы характеристик случайных величин и векторов. Новосибирск: Изд-во НЭТИ, 1980. 225 с. Деп. в ВИНИТИ №3146–81.
4. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: ГИИЛ, 1975. 648 с.
6. *Переверзев Е. С., Даниев Ю. Ф.* Вероятностные распределения и их применение. Днепропетровск: НАН Украины и НКА Украины, Институт технической механіки, 2004. 418 с.

7. *Перлик В. И.* Методология надежности механических систем летательных аппаратов. Космическая техника. Ракетное вооружение. Дн-ск: ГКБЮ, 1995. Вып.1–2. С.37–43.
8. *Савчук В. П., Лигун И. И.* О применении сплайнов к приближению распределений параметров технических систем. Вероятностно-статистические методы в проектировании конструкций. Дн-ск: ДГУ, 1974. С. 61–65.
9. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М: Наука, 1976. 248 с.
10. *Хан Г., Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах. М.: Мир, 1969. 396 с.
11. *Azzalini A. A.* Class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics. 1985. Vol. 12. P. 171–178.
12. *Karian Z., Dudewicz E.* Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods. CRC Press, Boca Raton, 2000. 435 p. https://doi.org/10.1201/9781420038040
13. *O'Hagan A., Leonard T.* Bayes estimation subject to uncertainty about parameter constraints. Biometrika. 1976. Vol. 63, No. 1. P. 201–203. https://doi.org/10.1093/biomet/63.1.201

Отримано 02.09.2023,
в остаточному варіанті 20.09.2023