УДК 629.764

В. В. АВДЕЕВ

ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
пр. Гагарина, 72, 49010, Днепр, Украина; e-mail: voltavde@i.ua

Цель работы состоит в определении численно-аналитическим методом количественных оценок запаса устойчивости на плоскостях корней характеристического полинома, двух коэффициентов закона регулирования и амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы. Объектом управления является вращательное движение ракеты как твердого тела в одной из плоскостей с учетом инерции автомата стабилизации, но без учета возмущенного движения центра масс. Результатом работы являются семь оценок запаса устойчивости, определяемых исходя из коэффициентов уравнений движения и закона регулирования. Новизна работы в том, что закон регулирования содержит слагаемые, пропорциональные всем учитываемым в модели переменным состояния, в частности, углу и угловой скорости поворота рулевого органа. Практическая ценность результатов в том, что в процессе проектирования могут быть учтены альтернативные количественные оценки запаса устойчивости, обеспечение которого является одним из основных требований к системе стабилизации.

Мета роботи полягає у визначенні чисельно-аналітичним методом кількісних оцінок запасу стійкості на площинах коренів характеристичного поліному, двох коефіцієнтів закону регулювання і амплітудно-фазової частотної характеристики розімкненої системи. Об’єктом управління є обертальний рух ракети як твердого тіла в одній з площин із врахуванням інерції автомата стабілізації, але без врахування збуреного руху центра мас. Результатом роботи є сім оцінок запасу стійкості, що визначаються виходячи з коефіцієнтів рівнянь руху і закону регулювання. Новим в роботі є те, що закон регулювання містить доданки, пропорційні усім змінним стану, які враховані у моделі, зокрема, куту і кутовій швидкості повороту рульового органу. Практична цінність результатів у тому, що в процесі проектування можуть бути враховані альтернативні кількісні оцінки запасу стійкості, забезпечення яких є однією із основних вимог до системи стабілізації.

The research purpose is to make a quantitative assessment of the stability margin on the planes of characteristic polynomial roots, the two coefficients of the control law and amplitude-phase-frequency characteristic of the open-loop system using the numerical-analytical method. A control object is a rotary motion of a rocket as a rigid body in the plane considering inertia of autostabilizer but without a disturbed motion of the center of mass. The result of the research involves the seven assessments of the stability margin due to the coefficients of the motion equations and the control law. The research novelty consists in the fact that the control law includes summands proportional to all accountable state variables, in particular to angle and an angular velocity of the steering gear. Practical value of the results resides in the fact that the design takes in account the alternative quantitative assessments of the stability margin that is one of the basic requirements for the stabilization system.

Ключевые слова: *закон регулирования, вращательное движение, оценки запаса устойчивости.*

При проектировании системы стабилизации (СС) движения ракеты космического назначения (РКН) принимается во внимание широкий в процессе полета диапазон массово-инерционных характеристик, скоростей и высоты, колебания жидкого топлива и конечная жесткость корпуса [1]. Одним из показателей СС является запас устойчивости вращательного движения, обеспечение которого входит в перечень задач начального этапа проектирования [2]. При уменьшении этого показателя возрастают затраты энергии на переходных процессах компенсации возмущений, их длительность и вероятность потери устойчивости, тогда как при его чрезмерном увеличении также возрастают затраты энергии на управление движением, в частности на выполнение заданной программы тангажа.

Запас устойчивости собственного движения СС принято определять на плоскостях коэффициентов закона регулирования, корней характеристического полинома и амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) разомкнутой системы. Методика построения границы области устойчивости на плоскости коэффициентов закона регулирования содержится в работах [1, 3, 4]. Проведено исследование взаимосвязи динамических характеристик СС и расположения корней характеристического полинома, на плоскости коэффициентов закона регулирования построены кривые равного затухания, его параметры выбираются методом стандартных коэффициентов [5]. Исходя из критерия устойчивости Найквиста на плоскости АФЧХ введено понятие запаса устойчивости по амплитуде и по фазе [2]. Для уменьшения потерь энергии на переходных процессах компенсации возмущений находит применение метод аналитического конструирования регуляторов [6], согласно которому закон регулирования содержит слагаемые, пропорциональные всем учитываемым в модели переменным состояния.

Задача данной статьи разработать методику определения количественных оценок запаса устойчивости СС, закон регулирования в которой, кроме традиционных слагаемых, пропорциональных углу и угловой скорости поворота РКН, включает составляющие, зависящие от угла и угловой скорости поворота исполнительного органа. Ее решение даст возможность устанавливать требования к точности коэффициентов закона регулирования с учетом альтернативных оценок запаса устойчивости.

Область устойчивости на плоскости двух коэффициентов закона регулирования. В соответствии с принятым формализмом в теории автоматического регулирования СС разделяется на объект управления (ОУ) и регулятор. Одна из особенностей РКН в том, что уравнения возмущенного движения в плоскостях рыскания и тангажа одинаковы, поэтому под ОУ в данной работе имеется в виду вращательное движение ракеты как твердого тела в плоскости рыскания, исследование которого проводится в начале процесса проектирования СС [2]. С использованием метода замороженных коэффициентов [1, 2] ОУ описывается уравнением

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u + c \cdot m, \qquad (1)$$

в котором координатами вектора состояния $\boldsymbol{x}$ являются: угол и угловая скорость рыскания ($\psi, \dot{\psi}$), угол и угловая скорость поворота исполнительного органа ($\delta, \dot{\delta}$) – автомата стабилизации (АС); то есть $x^T = [\psi\ \dot{\psi}\ \delta\ \dot{\delta}]$. На ОУ действует управление u – сигнал регулятора и возмущающее ускорение m. Динамические характеристики АС принято включать в математическую модель ОУ (1), поэтому элементами матрицы a являются не только традиционные коэффициенты $a_{\psi\psi}, a'_{\psi\psi}, a_{\psi\delta}$, зависящие от параметров РКН и траектории [1 – 4], но и характеристики АС: постоянная времени T_{AC} и коэффициент демпфирования ξ:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a'_{\psi\psi} & a_{\psi\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mu & -\xi \cdot \mu \cdot T_{AC} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mu = 1/T_{AC}^2$.

Одна из причин применения модели ОУ (1) на начальном этапе разработки в том, что для типичной РКН характерны такие диапазоны частот в Гц: движение центра масс 0,01 – 0,03; угловое 0,1 – 0,3; топлива в баках 0,5 – 1,5; упругого корпуса 2 – 15 [2]. То есть спектр частот, характерных для вращательного движения ракеты как твердого тела, в первом приближении с другими составляющими не перекрывается.

Входящие в модель (1) матрицы b и c имеют вид:

$$b^T = [0\,0\,0\,\mu], \quad c^T = [0\,1\,0\,0], \tag{3}$$

так как возмущающее вращательное ускорение m приложено к корпусу ракеты, от него зависят только угол рыскания и его производные по времени, а скалярное управление u определяет угол поворота рулевого органа δ и его производные.

Методы модального управления [5] и аналитического конструирования регуляторов [6] определяют закон регулирования u как линейную комбинацию координат вектора состояния x:

$$u = k_\psi \cdot \psi + k_\psi' \cdot \dot{\psi} + k_\delta \cdot \delta + k_\delta' \cdot \dot{\delta}. \tag{4}$$

С учетом (1) – (4) уравнение СС вращательного движения ракеты в плоскости рыскания будет таким:

$$\dot{x} = a^* \cdot x + c \cdot m, \; a^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a_{\psi\psi}' & a_{\psi\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu \cdot k_\psi & \mu \cdot k_\psi' & \mu \cdot (k_\delta - 1) & \mu \cdot (k_\delta' - \xi \cdot T_{AC}) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Запас устойчивости собственного движения СС зависит только от матрицы a^* (5), ее характеристический полином (ХП)

$$Q(s) = \det(a^* - s \cdot E) = s^4 + \sum_{i=0}^{3} q_i \cdot s^i, \tag{6}$$

где s – комплексная переменная, E – единичная матрица, q_i – коэффициенты ХП, их зависимость от элементов матрицы a^* (5) определяется выражениями:

$$\begin{aligned} q_0 &= \mu \cdot [a_{\psi\psi} \cdot (k_\delta - 1) - a_{\psi\delta} \cdot k_\psi], \\ q_1 &= \mu \cdot [a_{\psi\psi} \cdot (k_\delta' - \xi \cdot T_{AC}) - a_{\psi\delta} \cdot k_\psi' + (k_\delta - 1) \cdot a_{\psi\psi}'], \\ q_2 &= \mu \cdot [(k_\delta' - \xi \cdot T_{AC}) \cdot a_{\psi\psi}' + 1 - k_\delta] - a_{\psi\psi}, \\ q_3 &= -[a_{\psi\psi}' + \mu \cdot (k_\delta' - \xi \cdot T_{AC})]. \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты (7) используются для расчета запаса устойчивости η на плоскости корней s_i ХП (6):

$$\eta = \min(-\mathrm{Re}(s_i)),\ i = \overline{1,4}\ , \qquad (8)$$

где Re – действительная часть корня.

Граница области устойчивости на плоскости коэффициентов $k_\psi\ k'_\psi$ закона регулирования (4) строится известным методом D-разбиения, то есть путем отображения на эту плоскость мнимой оси ($s = j \cdot \omega,\ j^2 = -1$) плоскости корней ХП $Q(s)$. Отображение дает два уравнения границы относительно параметра ω:

$$\mathrm{Re}(Q(j\cdot\omega)) = q_0 - q_2 \cdot \omega^2 + \omega^4 = 0,\ \mathrm{Im}(Q(j\cdot\omega)) = j \cdot \omega \cdot (q_1 - q_3 \cdot \omega^2) = 0\,. \qquad (9)$$

Исключая ω из соотношений (9) с учетом первых двух равенств (7), получаем уравнение границы на плоскости $k_\psi\ k'_\psi$ в виде параболы:

$$k_\psi = r_2 \cdot (k'_\psi)^2 + r_1 \cdot k'_\psi + r_0\,, \qquad (10)$$

ее коэффициенты:

$$r_0 = (a_0 - \frac{q_2}{q_3} a_1 + \frac{a_1^2}{q_3^2})/(\mu \cdot a_{\psi\delta})\,, \qquad r_1 = \frac{q_2 - 2a_1/q_3}{q_3}\,,\ r_2 = \frac{\mu \cdot a_{\psi\delta}}{q_3^2}\,,$$

где $a_0 = \mu \cdot a_{\psi\psi} \cdot (k_\delta - 1),\ a_1 = \mu \cdot [a_{\psi\psi} \cdot (k'_\delta - \xi \cdot T_{AC}) + a'_{\psi\psi} \cdot (k_\delta - 1)]$.

Ограничение области устойчивости на плоскости $k_\psi\ k'_\psi$ слева и снизу следует из необходимых условий, согласно которым все коэффициенты (7) ХП (6) должны быть больше нуля. Условие $q_0 > 0$ дает ограничение слева – прямая CD (рис. 1):

$$k_\psi > k_{\psi l} = \frac{a_0}{\mu \cdot a_{\psi\delta}}\,.$$

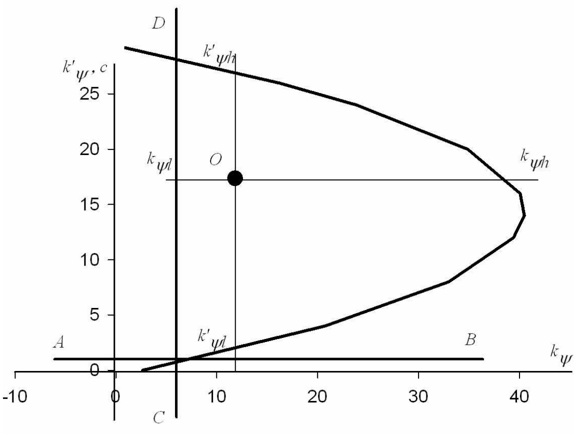

Рис. 1

Одно из ограничений снизу следует из условия $q_1 > 0$:

$$k'_\psi > k'_{\psi l1} = \frac{a_1}{\mu \cdot a_{\psi\delta}}\,.$$

Другим ограничением снизу ($k'_{\psi l2}$) может быть нижняя ветвь параболы (10). Оно определяется после выбора в области устойчивости номинального расположения рабочей точки O (рис. 1) с координатами $k_{\psi o}, k'_{\psi o}$:

$$k'_{\psi l2} = \min(y_1, y_2)\,,$$

где y_1, y_2 – корни уравнения $k_{\psi 0} = r_0 + r_1 \cdot y + r_2 \cdot y^2$.

Таким образом ограничением снизу коэффициента k'_{ψ} закона регулирования (4) является прямая AB:

$$k'_{\psi} > k'_{\psi l} = \max(k'_{\psi l1}, k'_{\psi l2}) .$$

Номинальное расположение рабочей точки O и уравнение границы (10) определяют верхнее предельное значение коэффициентов k_{ψ} и k'_{ψ} закона регулирования:

$$k_{\psi} < k_{\psi h} = r_0 + r_1 \cdot k'_{\psi o} + r_2 \cdot (k'_{\psi o})^2, \quad k'_{\psi} < k'_{\psi h} = \max(y_1, y_2).$$

Запас устойчивости СС на плоскости $k_{\psi}\, k'_{\psi}$ в относительных единицах относительно верхних предельных значений может быть определен в виде:

$$s_{xh} = \frac{k_{\psi h} - k_{\psi 0}}{k_{\psi 0}}, \; s_{yh} = \frac{k'_{\psi h} - k'_{\psi 0}}{k'_{\psi 0}}; \tag{11}$$

относительно нижних предельных значений:

$$s_{xl} = \frac{k_{\psi 0} - k_{\psi l}}{k_{\psi 0}}, \; s_{yl} = \frac{k'_{\psi 0} - k'_{\psi l}}{k'_{\psi 0}}. \tag{12}$$

При повышении требований к точности стабилизации запас устойчивости уменьшается [2], поэтому его количественные оценки (11), (12) могут применяться для выбора компромиссного решения между различными показателями СС.

Частотный метод оценки запаса устойчивости. Чтобы оценить запас устойчивости этим методом, необходимо согласно критерию Найквиста, исходя из моделей ОУ (1) и СС (5), получить передаточную функцию (ПФ) $W(s)$ системы, разомкнутой в точке A линии обратной связи угла рыскания ψ (рис. 2).

Если уравнение (1) записать в скалярной форме и выполнить преобразование по Лапласу при нулевых начальных значениях, то из первых двух со-

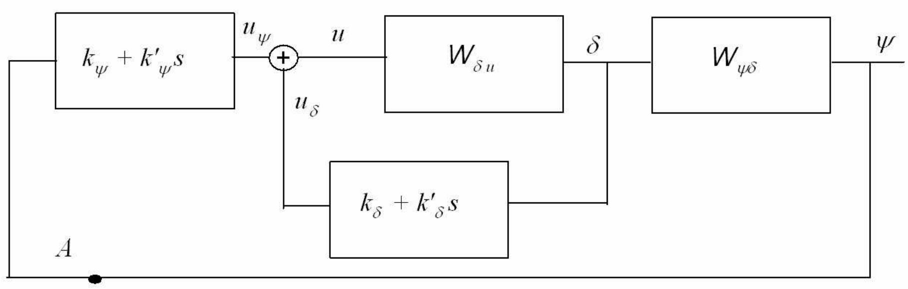

Рис. 2

отношений можно получить ПФ

$$W_{\psi\delta}(s) = \frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{a_{\psi\delta}}{s^2 - a'_{\psi\psi}s - a_{\psi\psi}}, \qquad (13)$$

а из третьего и четвертого –

$$W_{\delta u}(s) = \frac{\delta(s)}{u(s)} = \frac{\mu}{s^2 + \xi\mu T_{AC}s + \mu},$$

где $u = u_{\psi} + u_{\delta}$. ПФ звена, охваченного местной обратной связью,

$$W_{\delta u\psi}(s) = \frac{\delta(s)}{u_{\psi}(s)} = \frac{W_{\delta u}(s)}{1-(k_{\delta} + k'_{\delta}s)\cdot W_{\delta u}(s)} = \frac{\mu}{s^2 + (\xi T_{AC} - k'_{\delta})\mu s + \mu(1-k_{\delta})}. \qquad (14)$$

Перемножая с учетом (13), (14) ПФ трех последовательно соединенных звеньев, получаем ПФ разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + s^4}, \qquad (15)$$

где $b_0 = k_{\psi}\mu\, a_{\psi\delta}$, $b_1 = k'_{\psi}\mu\, a_{\psi\delta}$, $c_0 = -a_{\psi\psi}\mu\cdot(1-k_{\delta})$, $c_1 = \mu\cdot(a_{\psi\psi}v - a'_{\psi\psi}(1-k_{\delta}))$,

$v = k'_{\delta} - \xi T_{AC}$, $c_2 = \mu\cdot(a'_{\psi\psi}v + 1 - k_{\delta}) - a_{\psi\psi}$, $c_3 = -a'_{\psi\psi} - \mu v$.

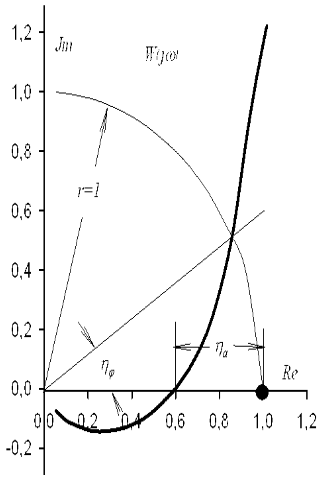

Рис. 3

Запас устойчивости по фазе и амплитуде согласно критерия Найквиста определяется на плоскости АФЧХ $W(j\omega)$, которая следует из ПФ (15) путем замены $s = j\omega$. Он зависит от расположения АФЧХ относительно критической точки $+1 + j0$ (рис. 3).

Угол η_{φ} между осью абсцисс системы координат $\mathrm{Re}(W)\,\mathrm{Im}(W)$ и проведенной из ее начала линией в определяемую итерационным путем точку пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса принято называть запасом устойчивости по фазе, то есть:

$$\eta_{\varphi} = \arg(W(j\omega)), \quad |W(j\omega)| = 1, \quad 0 < \eta_{\varphi} < 90^{o}. \qquad (16)$$

Расстояние η_a от критической точки до также определяемого итерационным путем пересечения АФЧХ с осью абсцисс $\mathrm{Re}(W)$ называют запасом устойчивости по амплитуде

$$\eta_a = 1 - W(j\omega), \quad \arg(W(j\omega) = 0 . \qquad (17)$$

При последовательном соединении звеньев системы (рис. 2) их фазовые характеристики складываются, а коэффициенты усиления перемножаются, поэтому запасы устойчивости (15), (16) в отличие от (10), (11) могут быть сопоставлены с результатами экспериментальной проверки АС с целью компенсации возможного запаздывания сигнала, неучтенного в модели (5).

Пример расчета влияния на оценки запаса устойчивости отклонений рабочей точки от номинального положения. Номинальное положение рабочей точки O (рис. 1) на плоскости коэффициентов k_ψ k'_ψ закона регулирования определяют координаты $k_{\psi 0}, k'_{\psi 0}$. Величины, которые принимаются постоянными при изменении положения точки O, приведены в табл. 1. Это коэффициенты уравнений движения (1), параметры АС и коэффициент er, пропорциональный статической ошибке СС при возмущении типа единичной ступенчатой функции.

Анализ зависимости количественных характеристик запаса устойчивости (8), (11), (12), (16), (17) от малых приращений k_ψ, k'_ψ показывает, что для примера данных в табл. 1 пропорционально k_ψ изменяются: $S_{xh}, S_{yl}, S_{yh}, \eta, \eta_\varphi, \eta_a$, тогда как оценка S_{xl} остается неизменной (табл. 2). При смещении точки O вдоль оси абсцисс плоскости k_ψ k'_ψ для сохранения значения er соответственно корректируется коэффициент закона регулирования k_δ. Пропорционально k'_ψ изменяется характеристика запаса устойчивости S_{yl}, обратно пропорционально – $S_{xh}, S_{yh}, \eta, \eta_\varphi, \eta_a$.

Таблица 1

Величины, независимые от перемещений точки O (рис. 1).

$a_{\psi\psi}$	$a_{\psi\delta}$	$a'_{\psi\psi}$	er	T_{AC}	ξ	$k_{\psi 0}$	$k'_{\psi 0}$
с$^{-2}$		с$^{-1}$	с^{2}	с	–		с
-0,30	-0,20	-0,11	0,427	0,16	1,20	9,19	15,7

Таблица 2

Оценки запаса устойчивости при малых перемещениях точки O.

k_ψ	k'_ψ	k_δ	k'_δ	S_{xl}	S_{xh}	S_{yl}	S_{yh}	η	η_φ	η_a
–	с	–	с	–				с$^{-1}$	град	–
9,19	15,70	0,100	0,027	1,147	3,375	0,917	0,755	0,797	30,9	0,401
9,65	15,70	0,055	0,032	1,147	3,600	0,922	0,791	0,865	34,6	0,413
9,19	16,49	0,100	0,025	1,147	3,342	0,919	0,692	0,742	28,5	0,381

Выводы. Предложена методика расчета оценок запаса устойчивости на плоскостях корней (8), коэффициентов закона регулирования (11), (12) и частотной характеристики разомкнутой системы (16), (17).

Результаты работы могут быть использованы для выбора параметров системы стабилизации с учетом альтернативных оценок запаса устойчивости.

1. *Игдалов И. М., Кучма Л. Д., Поляков Н. В., Шептун Ю. Д.* Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и космических ступеней: монография (под. ред. акад. С. Н. Конюхова). Днепропетровск, 2010. 264 с.
2. *Айзенберг Я. Е., Сухоребрий В. Г.* Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов. Москва, 1986. 224 с.
3. *Авдеев В. В.* Коэффициенты ошибок стабилизации вращательного движения ракеты. Техническая механика. 2014. № 3. С. 71 – 78.
4. *Авдеев В. В.* Влияние закона управления и постоянной времени регулятора на запас устойчивости системы стабилизации вращательного движения ракеты. Материалы научной конференции Информационные технологии в управлении сложными системами (11–13 июня 2013, г. Днепропетровск). С. 1 – 3.
5. *Кузовков Н. Т.* Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет). Москва, 1976. 364 с.
6. *Красовский А. А.* Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. Москва, 1969. 240 с.

Получено12.10.2016.
в окончательном варианте 23.11.2016