УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2022.04.067

Е. Л. ГАРТ[1], В. С. ГУДРАМОВИЧ[2], Б. І. ТЕРЬОХІН[1]

ВПЛИВ ВКЛЮЧЕННЯ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ ТА ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

[1]Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Гагаріна, 72, 49010, Дніпро, Україна; e-mail: hart@ua.fm, bogdan.teryokhin@gmail.com
[2]Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: hudramovich@i.ua

Тонкостінні конструкції завдяки поєднанню значної міцності та відносно малої ваги знайшли широке застосування в різноманітних галузях техніки, зокрема ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві та ін. Наявність отворів в пластинчато-оболонкових елементах таких конструкцій призводить до різкого збільшення локальних напружень, що за певних умов може запустити руйнівні процеси. Застосування функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) з певними механічними властивостями дозволяє суттєво зменшити концентрацію напружень в околі локальних концентраторів у вигляді отворів, вирізів, викружок, виточок тощо.

У цій роботі проведено комп’ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин та тонкостінних циліндричних оболонок за наявності кругового отвору і оточуючого його кільцевого включення із ФГМ. Досліджено вплив розмірів ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану пластин і оболонок в околі отвору. Отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Встановлено, що за використання кільцевого ФГМ-включення з певними механічними властивостями можна зменшити коефіцієнт концентрації напружень більш ніж на 30 %. При цьому також спостерігається пропорційне зменшення інтенсивності деформацій в околі отвору. Закон змінення модуля пружності ФГМ-включення та ширина включення суттєво впливають не тільки на величину концентрації параметрів напружено-деформованого стану пластини та оболонки, а й на характер розподілу напружень по їх поверхням. Результати проведеної серії широкомасштабних обчислювальних експериментів показують, що використання кільцевого включення із ФГМ дає змогу знизити інтенсивності як напружень, так і деформацій навколо отвору.

Отже, використання кільцевих підкріплень із ФГМ у пластинах та циліндричних оболонках з отворами дозволяє впливати на розподіл і величину інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації параметрів їх напружено-деформованого стану.

Ключові слова: *пружна пластина, тонкостінна циліндрична оболонка, круговий отвір, кільцеве включення, функціонально-градієнтний матеріал, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, скінченноелементний аналіз.*

Due to a combination of a significant strength and a relatively low weight, thin-walled structures have found wide application in various branches of technology, in particular, space-rocket engineering, oil-and-gas engineering, power engineering, construction, etc. The presence of openings in their plate and shell components leads to a sharp increase in local stresses, which, under certain conditions, may trigger destructive processes. The use of functionally graded materials (FGMs) with certain mechanical properties can significantly reduce the stress concentration in the vicinity of local concentrators in the form of openings, cutouts, fillets, grooves, etc.

This paper presents the results of computer simulation and finite element analysis of the stress and strain fields of thin plates and thin-walled cylindrical shells with a circular opening and an annular FGM inclusion surrounding it. The effect of the dimensions of the FGM inclusion and the law of variation of its elastic modulus on the stress and strain concentration in the vicinity of the opening was studied. The stress and strain intensity distribution in local stress concentration zones was obtained. It was found that an annular FGM inclusion with certain mechanical properties can reduce the stress concentration factor by more than 30%. In this case, a proportional decrease in strain intensity in the vicinity of the opening is also observed. The law of variation of the elastic modulus of the FGM inclusion and the inclusion width have a significant effect not only on the level of stress and strain concentration, but also on the stress and strain pattern. The results of the large-scale computational experiments show that an FGM annular inclusion reduces both the stress and the strain intensity around the opening.

Therefore, the use of annular FGM reinforcements in plates and cylindrical shells with openings makes it possible to control the distribution and magnitude of the stress and strain intensities in local stress and strain concentration zones.

Keywords: *elastic plate, thin-walled cylindrical shell, circular opening, annular inclusion, functionally graded material, stress and strain field, stress concentration factor, finite-element analysis.*

Вступ. Пластини і циліндричні оболонки з отворами широко застосовуються в різних галузях техніки, зокрема ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві тощо. Перевага цих елементів тонкостінних конструкцій полягає у їх значній міцності та відносно малій вазі. Наявність отворів в пластинах і оболонках призводить до різкого збільшення локальних напружень, які, у свою чергу, впливають на міцність та надійність конструкції у цілому [1 – 7]. Саме тому пошук можливостей для зниження концентрації напружень в тонкостінних конструкціях є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла.

Питанням дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонкостінних конструкцій з отворами присвячено багато наукових праць. Фундаментальний характер у цьому напрямку мають роботи відомих вітчизняних вчених Г. М. Савіна, О. М. Гузя та ін. Так, у [8] викладено обширні результати систематичних досліджень концентрації напружень навколо різноманітних отворів в пластинах і оболонках із застосуванням теорії комплексної змінної. У [9] проаналізовано сучасний стан теорії оболонок, що послаблені отворами, наведено відповідні постановки задач, методи їх розв'язування та отримано розв'язки задач для сферичних, циліндричних та інших оболонок за допомогою аналітичних, варіаційних та числових методів.

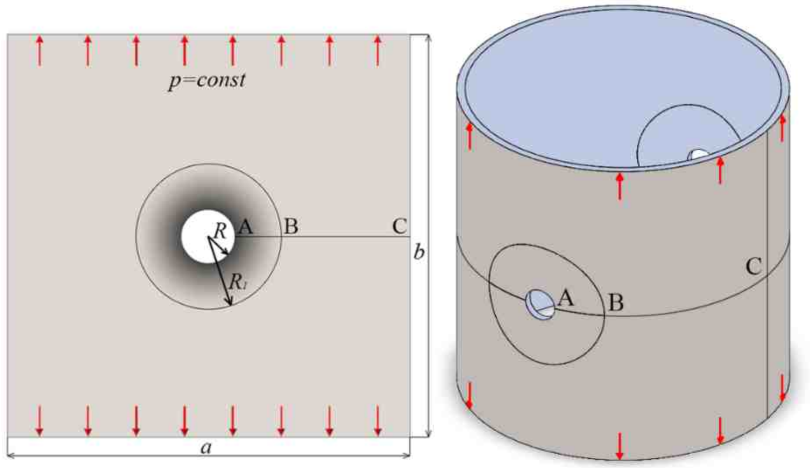
Наявність підкріплювальних елементів або включень з певними механічними властивостями сприяє зниженню концентрації напружень навколо отворів [10 – 14].

Використання функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) також дає змогу впливати на НДС тонкостінних конструкцій з метою зменшення коефіцієнта концентрації напружень (ККН). У дослідженнях застосовують як аналітичні, так і числові методи. Так, у [15] розглянуто змішані осесиметричні задачі для функціонально-градієнтних середовищ, отримано їх аналітичні розв'язки. У [16] за допомогою аналітичного методу досліджено розподіл напружень в пластині із ФГМ з круговим отвором; у [17] здійснено оцінку концентрації напружень у багатоклинових системах з функціонально градуйованими клинами. У [18] за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) із використанням різних ізопараметричних скінченних елементів визначено ККН в околі кругового вирізу в неоднорідній пластині за дії одновісного розтягувального навантаження, у [19] – навколо кругового вирізу в пластині з ФГМ за дії двовісного розтягування та зсуву.

Врахування неоднорідності ФГМ суттєво підвищує складність математичної моделі задачі та отримання її розв'язку. Аналітичні методи для розв'язування задач про деформування конструкцій із ФГМ можуть бути використані лише в деяких окремих випадках, тому при досліджені НДС конструкцій з різними неоднорідностями (отворами, включеннями тощо) більш доцільно застосовувати числові методи механіки, які, на відміну від аналітичних, є досить універсальними і ефективними для розв'язування широкого класу задач.

У даній роботі, як продовженні [6, 7], проведено комп'ютерне моделювання НДС пружних тонких пластин та тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором за наявності навколо нього кільцевого ФГМ-включення. Виконано скінченноелементний аналіз впливу розмірів ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності на параметри НДС пластин і оболонок в зоні їх локальної концентрації.

Постановка задачі. Дослідження НДС проведено для тонких пружних однорідних ізотропних пластин розмірами $a \times b$ товщини h з центрально розташованим круговим отвором радіусу R та кільцевим включенням із ФГМ радіусу R_1 (рис. 1, а)) та циліндричних оболонок довжини L, діаметром d, товщини h з круговим отвором радіусу R та кільцевим ФГМ-включенням радіусу R_1 (рис. 1, б)). Включення має товщину h (знаходиться у площині пластини/оболонки), на його границі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення. Величина R_1 варіюється. На бокові грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне розтягувальне навантаження $p = \text{const}$, що не призводить до появи пластичних деформацій.



а) б)

Рис. 1 – Геометрія та схема навантаження пластини (а) та оболонки (б)

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu_0 = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-включення. На рис. 2 наведено графічне зображення закону змінення модуля пружності ФГМ-включення. По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l \le 1$ в радіальному напрямку від краю отвору (точка A, рис. 1) по ширині включення $AB = h_{вкл} = R_1 - R$: $l = (r - R)/(R_1 - R)$, r – відстань від центру отвору до довільної точки включення.

Рис. 2 – Закон змінення модуля пружності ФГМ-включення

Як видно з рис. 2, закон змінення модуля пружності ФГМ-включення має три характерні зони: 1) зона зростання (ширини h_1); 2) зона незмінного (фіксованого) значення (ширини h_2); 3) зона зменшення модуля пружності (ширини h_3).

Дослідимо вплив ширини h_i кожної зони ФГМ-включення на ККН в пластині/оболонці з круговим отвором. Для цього проведемо розрахунки для різних варіантів величини R_1 і виду ФГМ-включення (табл. 1).

Таблиця 1

Варіанти ФГМ-включень в залежності від ширини зон

Ширина зон ФГМ-включення/ вид включення	h_1	h_2	h_3
ФГМ-включення 1	*R*	*R*	*R*
ФГМ-включення 2	2*R*	*R*	*R*
ФГМ-включення 3	*R*	2*R*	*R*
ФГМ-включення 4	*R*	*R*	2*R*
ФГМ-включення 5	3*R*	*R*	*R*
ФГМ-включення 6	*R*	3*R*	*R*
ФГМ-включення 7	*R*	*R*	3*R*

Тут R – радіус отвору; h_i – ширина кожної з трьох зон ФГМ-включення $(i=\overline{1,3})$, $h_{вкл}=\sum_{i=1}^{3} h_i$.

Математичні моделі задач та метод їх розв’язування. У варіаційній постановці вихідна задача для циліндричної оболонки призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [3]:

$$Э=\sum_{s=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_s}\frac{E_s(x,y)h}{(1-\nu_s^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)^2+2\nu_s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu_s}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}\int_{\Omega_s}\frac{E_s(x,y)h^3}{12(1-\nu_s^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)^2+\right. \qquad (1)$$

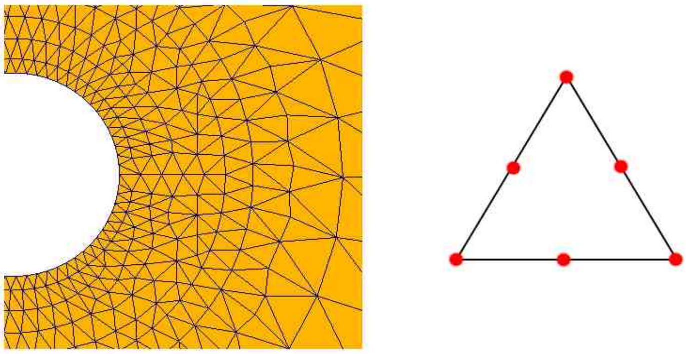
$$\left.\left.+2\nu_s\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)+2(1-\nu_s)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\right\}-\int_{\gamma}\left(p_x u+p_y v+p_z w\right)dxdy,$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox , Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; $\tilde{R}$ – радіус оболонки; $E_s(x,y)$, ν_s – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки Ω_1 (матриці) $(s=1)$ і включення Ω_s $(s=\overline{2,n+1}$, n – кількість включень); $\Omega=\bigcup_{s=1}^{n+1}\Omega_s$ – область визначення змінних x та y ; γ – границя області Ω, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y)=(p_x(x,y),\ p_y(x,y),\ p_z(x,y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x,y)=p_z(x,y)=0$, $p_y(x,y)=p=\mathrm{const}$.

У випадку задачі для пластини функціонал повної потенціальної енергії деформації системи набуває вигляду [20]:

$$Э=\sum_{s=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_s}\frac{E_s(x,y)h}{(1-\nu_s{}^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\nu_s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-\nu_s}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dxdy\right\}-\int_{\gamma}\left(p_x u+p_y v\right)\,dxdy. \qquad (2)$$

Для розв'язання поставлених варіаційних задач застосовано МСЕ з використанням ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня (рис. 3, б)), при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовано квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10 (рис. 3, а)). Збіжність МСЕ у випадку використання плоских скінченних елементів для тонкостінної оболонки тут забезпечується за рахунок згущення сітки (точність апроксимації поверхні оболонки геометрією вписаного багатогранника збільшується з використанням більш дрібної сітки).



а) б)

Рис. 3 – Фрагмент адаптивної скінченноелементної сітки (а), вид скінченного елементу (б)

Числовий аналіз. Розрахунки проведені на ПК з процесором Intel Core i7-10700F з тактовою частотою 2,9–4,8 GHz, оперативною пам'яттю 32 GB, відеокартою nVidia GeForce RTX 2060 SUPER, розрядність системи x64. Середня кількість скінченних елементів у разі розрахунку пластин – 2126, кількість вузлів – 4408; у разі розрахунку оболонок кількість скінченних елементів – 6372, кількість вузлів – 13002.

Числові результати отримані для: 1) квадратних пластин з такими геометричним параметрами: $h=0{,}005$м, $a=b=0{,}2$м, $R=a/20$, навантаження розтягування $p=10$МПа; 2) циліндричних оболонок з параметрами: $L=0{,}2$м, $d=0{,}2$м, $h=0{,}005$м, $R=d/10$, навантаження розтягування $p=10$МПа.

Радіус R_1 кільцевого ФГМ-включення навколо отвору варіювався з кроком R, при цьому ширина ФГМ-включення $h_{вкл}=R_1-R$ дорівнювала $3R,\ 4R,\ 5R$.

Результати проведених обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для пластини з ФГМ-включеннями зведено у табл. 2. При цьому з метою порівняльного аналізу був здійснений розрахунок для однорідної пластини з круговим отвором без включення. Отримано ККН= 3,05; максимальні значення інтенсивності деформацій при цьому $\varepsilon_i^{\max} = 2,13 \cdot 10^{-4}$, що добре узгоджується з результатами [8].

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з ФГМ-включенням

Задача	ККН	δ_1, %	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	δ_2, %
ФГМ-включення 1	2,39	-21,6	1,60	-24,9
ФГМ-включення 2	2,32	-23,9	1,58	-25,8
ФГМ-включення 3	2,23	-26,9	1,50	-29,6
ФГМ-включення 4	2,31	-24,3	1,55	-27,2
ФГМ-включення 5	2,25	-26,2	1,55	-27,2
ФГМ-включення 6	2,10	-31,1	1,41	-33,8
ФГМ-включення 7	2,24	-26,6	1,51	-29,1

Тут δ_1 і δ_2 – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій $\varepsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для пластини без включення.

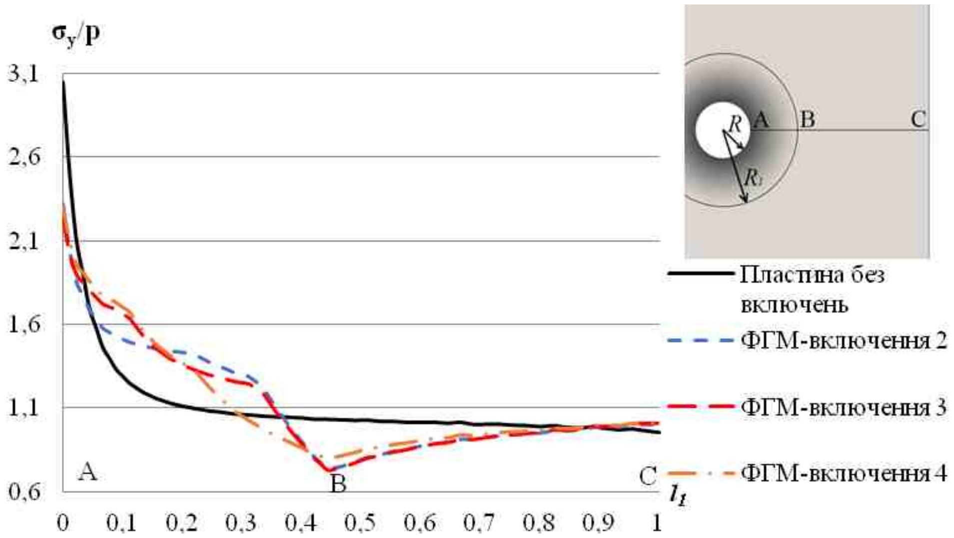
Із табл. 2 видно, що наявність кільцевого ФГМ-включення із заданим законом змінення модуля пружності (рис. 2) дає змогу зменшити величини ККН у пластині на ~ 21 % – 31 %, а максимальні деформації на ~25 % – 34 %. При цьому, чим більша ширина ФГМ-включення, тим менші величини ККН і максимальних деформацій. Найбільший вплив має ширина другої (центральної) зони (h_2) ФГМ-включення: чим вона більша, тим менші величини ККН і максимальних деформацій у пластині. Також у разі фіксованої ширини включення спостерігається, що чим менша перша зона (h_1) ФГМ-включення, тим менші величини ККН і максимальних деформацій навколо отвору.

Найкращім із розглянутих варіантів з точки зору зменшення ККН для пластини виявляється ФГМ-включення 6.

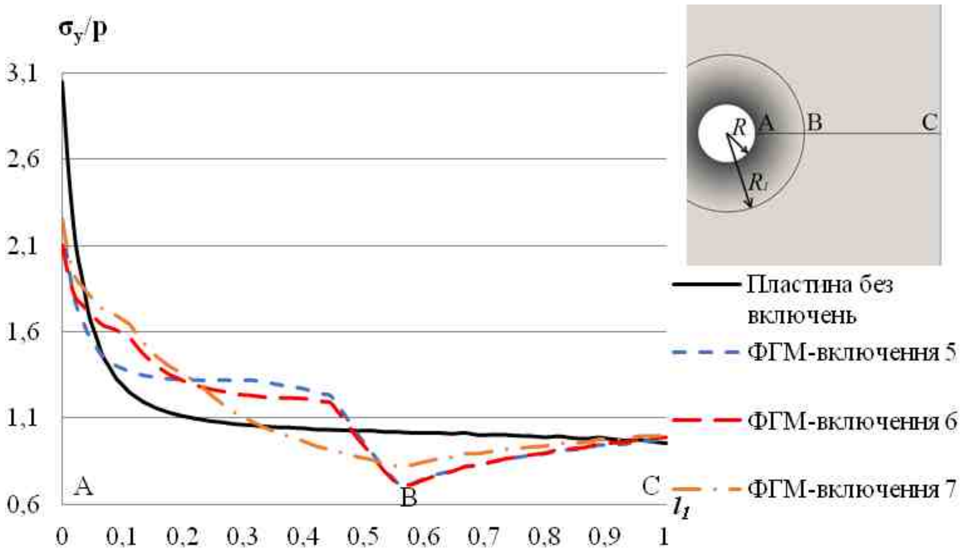
На рис. 4, а) та рис. 4, б) наведено графіки розподілу відносних напружень σ_y / p у характерному перерізі AC пластини з ФГМ-включенням у разі $h_{вкл} = 4R$ та $h_{вкл} = 5R$ відповідно для різних варіантів ширини h_i кожної зони ФГМ-включення (див. табл. 1). На рис. 4 та рис. 5 по осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l_1 \le 1$ в радіальному напрямку від краю отвору (точка A, рис. 1, а)) по перерізу пластини $AC = (a - 2R)/2$: $l_1 = (r - R) / (\frac{a}{2} - R)$, r – відстань від центру отвору до довільної точки відрізку AC.

Як видно з рис 4, а), при використанні ФГМ-включень 2–4 відбувається перерозподіл напружень у перерізі AC у порівнянні з пластиною без включень: максимальні напруження навколо отвору зменшуються, у той же час спостерігається їх деяке зростання в інтервалі $l \in [0,05;\ 0,35]$ для ФГМ-включень 2, 3 і в інтервалі $l \in [0,05;\ 0,3]$ для ФГМ-включення 4.

На рис. 4, б) можна побачити аналогічні попередньому випадку закономірності перерозподілу напружень у перерізі AC за наявності ФГМ-включень 5–7. Аналіз отриманих результатів щодо впливу ширини третьої зони (h_3) ФГМ-включення на характер розподілу напружень у пластині показує: чим ця зона більше, тим плавніше відбувається розподіл напружень σ_y/p в околі з'єднання включення з пластиною.



а)



б)

Рис. 4 – Розподіл відносних напружень σ_y/p в пластині з ФГМ-включенням в перерізі AC у разі $h_{вкл} = 4R$ (а) та $h_{вкл} = 5R$ (б)

Порівнюючи результати розподілу напружень σ_y/p у характерному перерізі AC пластини у разі використання ФГМ-включень 1, 3, 6, які відрізняються між собою тільки розміром центральної зони (h_2), видно, що чим більше ширина цієї зони, тим менші максимальні напруження в околі отвору (рис. 5). Характер розподілу напружень для указаних трьох варіантів ФГМ-включень в околі їх з’єднання з пластиною є аналогічним.

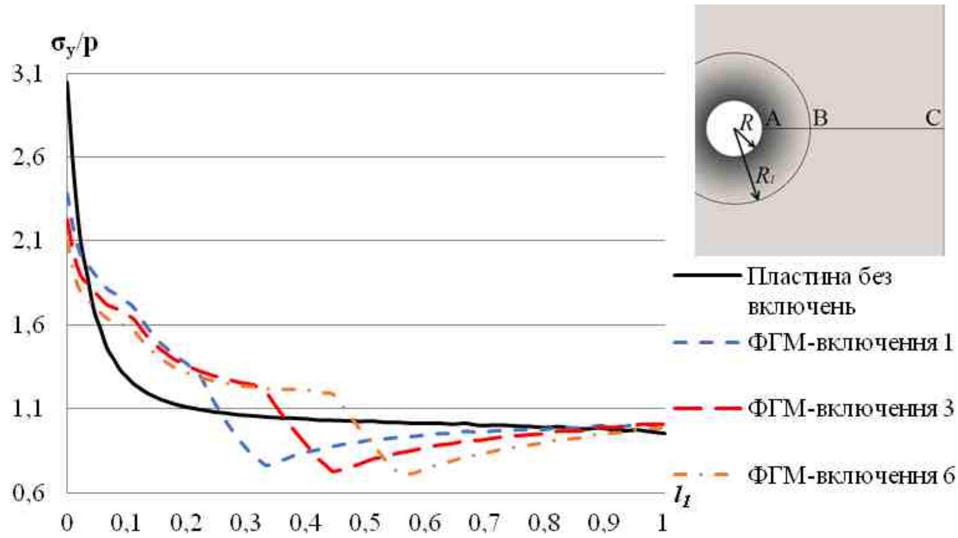
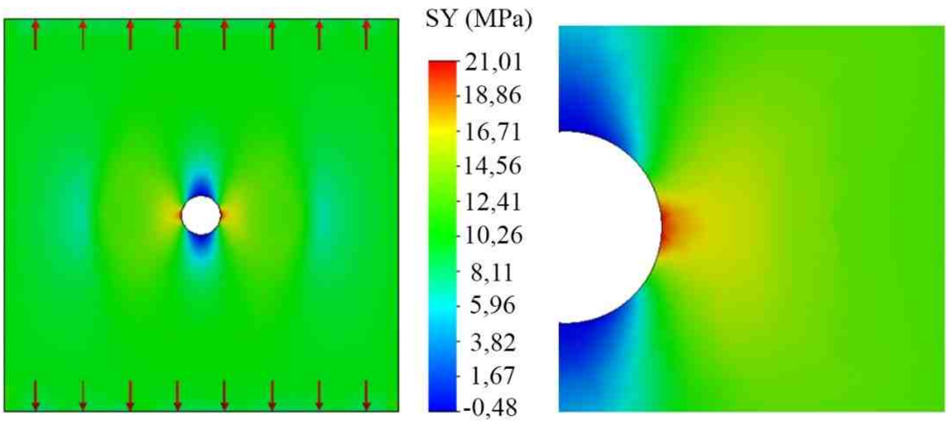


Рис. 5 – Розподіл відносних напружень σ_y / p в пластині з ФГМ-включенням у перерізі AC у разі $h_{вкл} = 3R;\ 4R;\ 5R$

Як приклад, на рис. 6 наведено розподіл напружень σ_y в пластині з круговим отвором і ФГМ-включенням 6.



а) б)

Рис. 6 – Розподіл напружень σ_y в пластині з ФГМ-включенням 6 (а); фрагмент розподілу σ_y навколо отвору (б)

Далі розглянемо вплив ФГМ-включень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці на величину ККН.

З метою верифікації отриманих результатів в ході проведених обчислювальних експериментів на основі МСЕ здійснено розрахунок для однорідної циліндричної оболонки з круговим отвором без включення. Отримано

ККН=3,27; максимальні значення інтенсивності деформацій при цьому $\varepsilon_i^{\max} = 2,28 \cdot 10^{-4}$, що добре узгоджується з результатами [9].

Результати здійснених розрахунків для оболонки з різними ФГМ-включеннями зведено у табл. 3.

Таблиця 3

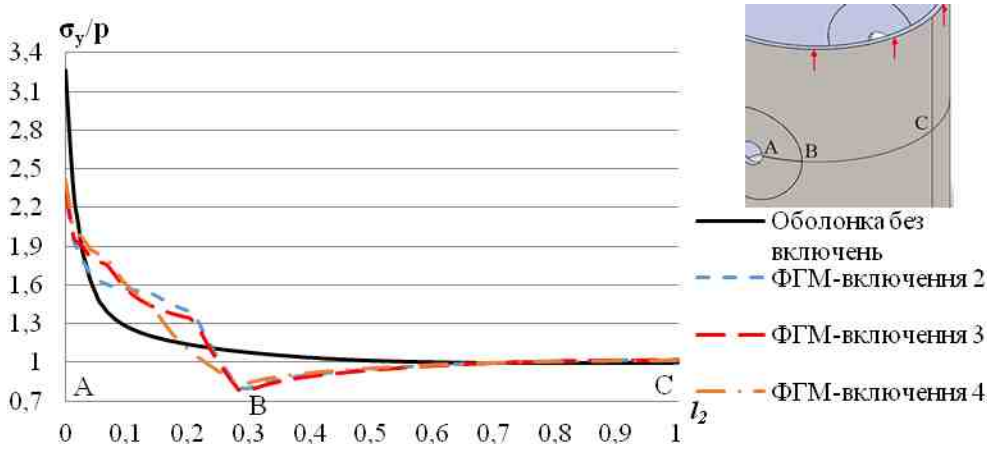
Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в циліндричній оболонці з ФГМ-включенням

Задача	ККН	δ_1, %	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	δ_2, %
ФГМ-включення 1	2,49	-23,9	1,66	-27,2
ФГМ-включення 2	2,43	-25,7	1,65	-27,6
ФГМ-включення 3	2,32	-29,1	1,55	-32,0
ФГМ-включення 4	2,41	-26,3	1,61	-29,4
ФГМ-включення 5	2,37	-27,5	1,62	-28,9
ФГМ-включення 6	2,20	-32,7	1,46	-36,0
ФГМ-включення 7	2,34	-28,4	1,56	-31,6

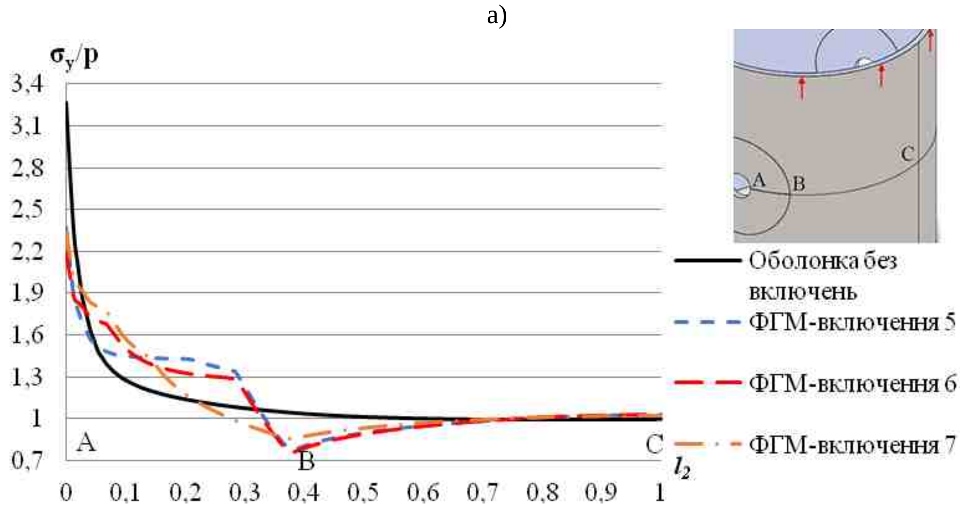
Тут δ_1 і δ_2 – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій $\varepsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для оболонки без включення.

Із табл. 3 видно, що наявність кільцевого включення із заданим законом змінення модуля пружності призводить до зменшення величини ККН в оболонці на ~ 24 % – 33 %, а максимальних деформацій на ~27 % – 36 %. Тут спостерігаються аналогічні розрахунку пластин закономірності: чим більша ширина включення, тим менші величини ККН і максимальних деформацій в оболонці; найбільший вплив тут також має ширина другої (центральної) зони (h_2) ФГМ-включення у порівнянні з іншими двома зонами: чим вона більша, тим менші величини ККН і максимальних деформацій в оболонці; у разі фіксованої ширини включення чим менша перша зона (h_1) ФГМ-включення, тим менші величини ККН і максимальних деформацій. Найкращім із розглянутих варіантів для оболонки з точку зору зменшення величини ККН, також як і для пластини, виявляється наявність ФГМ-включення 6.

Як видно з рис. 7 та рис. 8, за використання ФГМ-включень відбувається перерозподіл відносних напружень по поверхні оболонки (у перерізі AC), аналогічний випадку для пластин: в околі отвору максимальні напруження зменшуються у порівнянні з випадком оболонки без включень, у той же час спостерігається збільшення напружень в другій (центральній) зоні (h_2) ФГМ-включення. Тут на рисунках по осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l_2 \le 1$ від краю отвору (точка A, рис. 1, б) по дузі $AC = (\pi d - 4R)/4$.



а)



б)

Рис. 7 – Розподіл відносних напружень σ_y / p в оболонці з ФГМ-включенням у перерізі AC у разі $h_{вкл} = 4R$ (а) та $h_{вкл} = 5R$ (б)

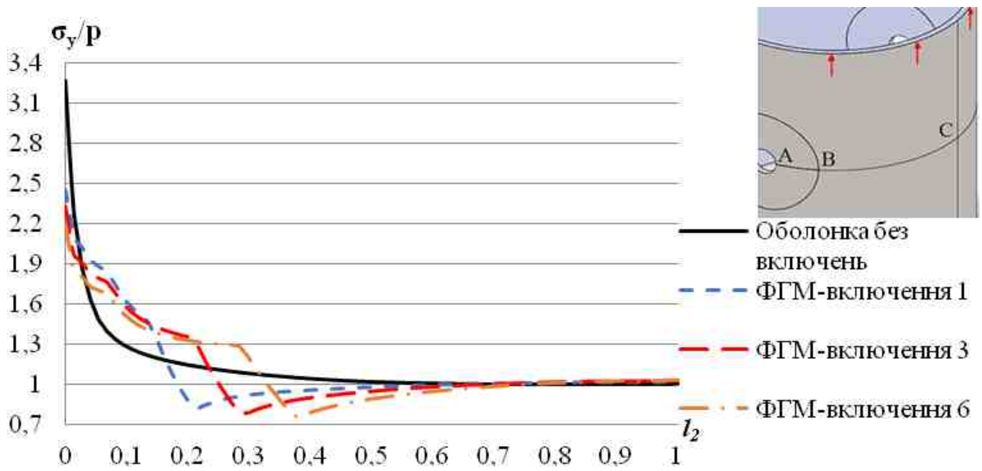
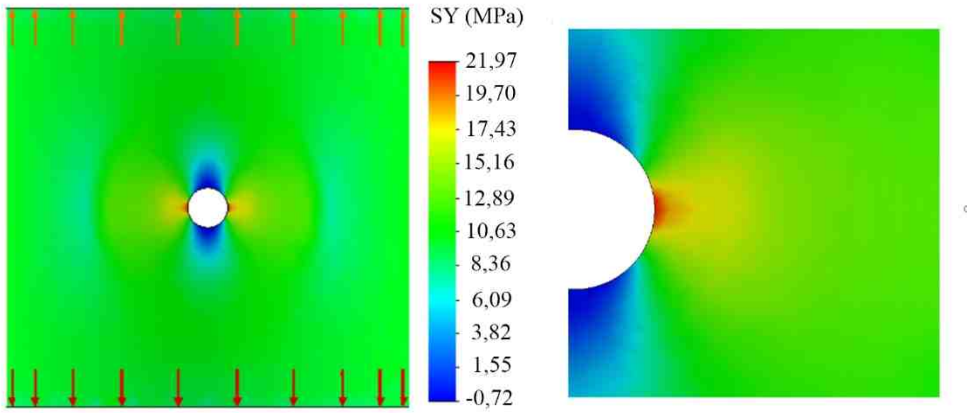


Рис. 8 – Розподіл відносних напружень σ_y / p в оболонці з ФГМ-включенням у перерізі AC у разі $h_{вкл} = 3R;\ 4R;\ 5R$

Як приклад, на рис. 9 наведено розподіл напружень σ_y в циліндричній оболонці з круговим отвором і ФГМ-включенням 6 навколо нього.



а) б)

Рис. 9 – Розподіл інтенсивності напружень σ_y в оболонці з ФГМ-включенням 6 (а); фрагмент розподілу σ_y навколо отвору (б)

Висновки. На основі скінченноелементного аналізу НДС тонких пластин та тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором, що підкріплюється кільцевим включенням із ФГМ, проведено моделювання впливу ФГМ-включення на концентрацію напружень навколо отвору, отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації параметрів НДС пластин і оболонок, що розглядалися.

У результаті проведеного комп'ютерного моделювання і числового дослідження впливу розмірів ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності за радіальним напрямком на концентрацію параметрів НДС в околі отвору пластин та циліндричних оболонок встановлено, що за наявності ФГМ-включень з певними механічними властивостями можна зменшити ККН в пластині та оболонці більш ніж на 30 %. При цьому також спостерігається пропорційне зменшення інтенсивності деформацій в околі отвору. Використання ФГМ-включення дає змогу впливати не тільки на величину ККН поблизу локальних концентраторів напружень, але і на характер розподілу напружень по поверхні пластини та оболонки у цілому.

Подальший інтерес представляє дослідження інших видів і конфігурацій ФГМ-включень з точки зору їх впливу на зменшення концентрації параметрів НДС пластин і оболонок з різними отворами, знаходження їх раціональних параметрів.

1. *Погорелов В. И.* Строительная механика тонкостенных конструкций. СПб., 2007. 528 с.
2. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М., 1978. 228 с.
3. *Авдонин А. С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М., 1969. 402 с.
4. *Арзамасов Б. Н., Соловьева Т. В., Герасимов С. А.* Справочник по конструкционным материалам. М., 2005. 60 с.
5. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. М., 1977. 227 с.
6. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2021. V. 29, Iss.1. P. 42–53. https://doi.org/10.15421/142103
7. *Гарт Е. Л., Терьохін Б. І.* Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. Modern Science: Innovations and

Prospects: Proceedings of the IX International Scientific and Practical Conference (May 29–31, 2022, Stockholm, Sweden). 2022. P. 301–306.
8. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К., 1968. 888 с.
9. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др.* Методы расчета оболочек. В 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К., 1980. 636 с.
10. *Гарт Е. Л., Терьохін Б. І.* Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2019. Вип. 30. С. 19–32.
11. *Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Марченко О. А.* Вплив форми підкріплень на напружено-деформований стан циліндричної оболонки з видовженими прямокутними отворами. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро, 2017. Вип. 27. С. 52–64.
12. *Гудрамович В.С., Гарт Е. Л., Панченко С. В.* Напружено-деформований стан пластин з підкріпленими прямокутними отворами різної орієнтації відносно напрямку дії зусилля розтягу. Техническая механика. 2018. № 4. С. 82–89. https://doi.org/10.15407/itm2018.04.082
13. *Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions. Materials Science. 2017. V. 52, Iss. 6. P. 768–774. https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z
14. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Marchenko O. A.* Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure. Strength Mater. 2021. V. 52, No. 6. P. 832–842. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7
15. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред, Айзикович С. М. [и др.]. М., 2011. 192 с.
16. *Yang Q., Gao C.-F., Chen W.* Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole. Arch. Appl. Mech. 2010. V. 80. P. 895–907. https://doi.org/10.1007/s00419-009-0349-3
17. *Linkov A., Rybarska-Rusinek L.* Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. Intern. J. Engng Sci. 2012. V. 61. P. 87–93. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012
18. *Kubair D. V., Bhanu-Chandar B.* Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. Intern. J. Mech. Sci. 2008. V. 50. P. 732–742. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009
19. *Mohammadi M., Dryden J. R., Jiang L.* Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. Intern. J. Solids Structures. 2011. V. 48. P. 483–491. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013
20. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Elsevier Science & Technology, 1974. 412 p.

Отримано 08.11.2022,
в остаточному варіанті 23.11.2022