УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2023.04.060

Е. Л. ГАРТ, О. О. СЕМЕНЧА

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КІЛЬЦЕВИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ В ТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНКАХ З КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна, 49010; e-mail: hart@ua.fm, semencha.aleksey@gmail.com

Оболонкові конструкції використовуються в різних галузях техніки і промисловості, таких як аерокосмічна, нафтогазова, енергетика, машинобудування, будівництво тощо. Через конструктивні або технологічні особливості суцільність таких конструкцій може порушуватися наявністю різноманітних отворів, навколо яких виникають локальні напруження. Пошук способів зменшення концентрації напружень навколо отворів є важливою задачею механіки деформівного твердого тіла.

У цій роботі проведене комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і зрізаних конічних оболонок з круговими отворами за наявності навколо них кільцевих включень із матеріалу, властивості якого відрізняються від основного матеріалу оболонок. Досліджено вплив зміни величини модуля пружності включення та його геометричних параметрів на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану оболонок в околі отворів. Розглянуто декілька варіантів матеріалу включення та його ширини. Вважалося, що кільцеве включення із однорідного матеріалу і розташоване у площині оболонки. Отримано розподіли інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Проведено порівняльний аналіз одержаних результатів для циліндричних і конічних оболонок. Дослідження показали, що наявність «м'якого» однорідного кільцевого включення дає змогу знизити концентрацію напружень навколо отворів на ~(13 – 35) % в залежності від ширини включення і величини модуля пружності як в циліндричній, так і в конічній оболонках. При певних поєднаннях геометричних і механічних параметрів включення спостерігається «механічний ефект», що полягає у зміні локації зони концентрації напружень від краю отвору до стику включення з матеріалом оболонки. Для конічних оболонок, в силу їх геометричних особливостей, має місце ефект «конічності»: збільшення напружень виникає не тільки в околі послаблення отворами, а й біля основ.

Ключові слова: *тонкостінна циліндрична оболонка, тонкостінна зрізана конічна оболонка, круговий отвір, кільцеве включення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.*

Shell structures are used in various industries, such the aerospace industry, the oil and gas industry, power engineering, mechanical engineering, construction, etc. Due to their design or manufacturing features, their integrity may be disrupted by the presence of various openings, around which local stresses develop. Finding ways to reduce stress concentrations around openings is an important problem in deformable solid mechanics.

This paper presents the results of a computer simulation and a finite-element analysis of the stress and strain field of thin-walled cylindrical and truncated conical shells with circular openings in the presence of annular inclusions around them made of a material whose properties differ from the main material of the shells. The effect of the elastic modulus of an inclusion and its geometric parameters on the stress and strain concentration in the vicinity of the openings was studied. Several inclusion materials and inclusion widths were considered. An annular inclusion made of a homogeneous material and located in the shell plane was considered. Stress and strain intensity distributions in the local stress concentration zones were calculated. A comparative analysis of the results obtained for cylindrical and conical shells was carried out. The study showed that the presence of a "soft" homogeneous annular inclusion makes it possible to reduce the stress concentration around the opening by ~13–35% depending on the inclusion width and elastic modulus both for a cylindrical and a conical shell. Certain combinations of the geometric and mechanical parameters of the inclusion give rise to a "mechanical" effect, which consists in shifting the stress concentration zone from the opening edge to the inclusion – shell material interface. For conical shells, due to their geometric features, a "conical" effect occurs: the stresses increase not only in the vicinity of the opening-weakened zone, but also near the cone basis.

Keywords: *thin-walled cylindrical shell, thin-walled truncated conical shell, circular opening, annular inclusion, stress and strain field, stress concentration factor, finite-element method.*

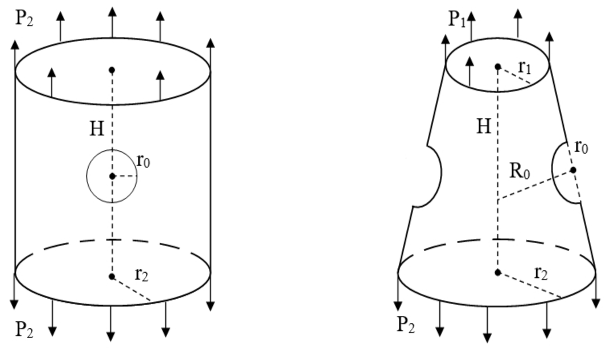
Вступ. Оболонки з отворами широко використовуються у різних сферах техніки, зокрема в ракетно-космічній, нафтогазовому секторі, енергетиці, будівництві та інших галузях. Головна перевага таких елементів тонкостінних конструкцій полягає у їх високій міцності при відносно невеликій вазі. Проте наявність отворів призводить до значного підвищення локальних напружень, що негативно впливає на загальну міцність та надійність конструкції. Тому дослідження можливих шляхів зменшення концентрації напружень в тонкостінних конструкціях є актуальною проблемою в механіці деформованого твердого тіла.

Для оцінки міцності конструкцій необхідно враховувати їх параметри напружено-деформованого стану (НДС). Цьому аспекту присвячено значну кількість досліджень, що використовують аналітичні [7 – 10], числові та експериментальні методи. Наприклад, у [13] представлено аналітичний розрахунок загальної динамічної реакції тонких ортотропних циліндричних оболонок, який порівняно з теоретичними та експериментальними даними. У [2] розглянуто чисельно-аналітичний підхід до аналізу двовимірних задач статики нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини. У [12] за допомогою методу заданих форм досліджено коливання обтічників ракетоносіїв у надзвуковому газовому потоці, які змодельовані тонкими конічними оболонками, підсиленими внутрішніми кільцями. У [15] використовується метод узагальнених диференціальних квадратур для аналізу частотних характеристик тонких зрізаних багатошарових конічних оболонок обертання. Робота [3] присвячена числовому аналізу власних коливань вертикально і горизонтально орієнтованих циліндричних оболонок при різному рівні заповнення рідиною та різних варіантах граничних умов, що задаються на торцях пружної конструкції. У [14] застосовано числовий метод для аналізу нестаціонарних хвиль, що виникають від ударних точкових навантажень, у циліндричних оболонках із функціонально-градієнтного матеріалу. У [6] представлені результати експериментальних досліджень стійкості циліндричних оболонок з одним та двома отворами кругової або квадратної форми.

Вивченню НДС оболонок обертання з використанням аналітичних методів присвячено велику кількість досліджень, які охоплюють різноманітні задачі. Однак не завжди можна аналітично розв’язати певну задачу, тому у більшості випадків застосовують числові методи. Одним із найбільш поширених універсальних методів аналізу прикладних задач механіки деформованого тіла є метод скінченних елементів (МСЕ) [16].

Постановка задачі. За допомогою МСЕ провести дослідження впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) для тонкостінних пружних однорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонок товщини h, висоти H з двома однаковими діаметрально протилежними «малими» круговими отворами радіусу r_0, розташованими посередині оболонок. Радіуси верхньої і нижньої основ конічних оболонок – r_1, r_2 відповідно. Радіус основ циліндричних оболонок – r_2. Циліндричні оболонки знаходяться під дією одновісних рівномірних розтягувальних зусиль P_2 (рис. 1, а)), зрізані конічні – під дією одновісних рівномірних розтягувальних врівноважувальних зусиль P_1 і P_2 (рис. 1, б)). Вважається, що кільцеве включення розташоване у площині оболонки. Матеріал включення має інші, ніж основний матеріал оболонки, властивості ($E_{вкл} = 2E_0/3;\ E_0/2;\ 2E_0/5;\ E_0/3$, де E_0 – модуль пружності оболонки, $E_{вкл}$ – модуль пружності включення). Ширина включень $h_{вкл}$ варіюється ($h_{вкл} = 0{,}5r_0;\ 0{,}25r_0;\ 0{,}125r_0$).

Метою дослідження є знаходження раціональних параметрів включень для оболонок з точки зору зменшення величини ККН.



а) б)

Рис. 1 – Оболонки з круговими отворами: циліндрична (а) та конічна (б)

Математичні моделі задач та метод їх розв'язування. Для *циліндричної оболонки* вихідна задача у варіаційній постановці відповідає задачі мінімізації функціонала потенціальної енергії деформації системи [1]:

$$I[u,v,w]=\sum_{j=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}\frac{E_j h}{(1-\nu_j^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde R}\right)^2+2\nu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde R}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu_j}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}\frac{E_j h^3}{12(1-\nu_j^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde R}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+2\nu_j\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde R}\right)+2(1-\nu_j)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\right\}-\int_{\gamma}\left(p_x u+p_y v+p_z w\right)\,dxdy,$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox, Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; $\tilde R$ – радіус оболонки; E_j, ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки Ω_1 (матриці) $(j=1)$ і включення Ω_j $(j=\overline{2,n+1}$, n – кількість включень); $\Omega=\bigcup_{j=1}^{n+1}\Omega_j$ – область визначення змінних x та y; γ – границя області Ω, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y)=(p_x(x,y),\ p_y(x,y),\ p_z(x,y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x,y)=p_z(x,y)=0$, $p_y(x,y)=p=\text{const}$.

Для *конічної оболонки* вихідна задача у варіаційній постановці відповідає задачі мінімізації функціонала потенціальної енергії деформації системи [4]:

$$I[u,v,w]=\sum_{j=1}^{n+1}\left\{\frac{E_j h}{2(1-\nu_j^2)}\int_{\Omega_j}\left(S_1+S_2\right)^2-2(1-\nu_j)\left(S_1S_2-\frac{1}{4}T_1^2\right)\times\right.$$

$$\times\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]dsd\varphi+$$

$$+\frac{E_j h^3}{24(1-\nu_j^2)}\int\limits_{\Omega_j}\left[\left(K_1+K_2\right)^2-2\left(1-\nu_j\right)\left(K_1K_2-T_2^2\right)\right]\times$$

$$\left.\times\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]dsd\varphi\right\}-\int\limits_{\gamma}\left(p_x u+p_y v+p_z w\right)\,d\gamma,$$

де E_j, ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки Ω_1 (матриці) $(j=1)$ і включення Ω_j $(j=\overline{2,n+1},$ n – кількість включень); R – радіус нижньої основи оболонки; γ – границя, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y)=(p_x(x,y),\ p_y(x,y),\ p_z(x,y))^T$; α – кут між твірною лінією та віссю конуса; s, φ – координатні лінії (рис. 2);

$$K_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial s},\quad K_2=\left(\frac{1}{s^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}\right]-\frac{\partial w}{s\partial s}\right),$$

$$S_1=\frac{\partial u}{\partial s},\quad S_2=\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\,\mathrm{tg}\alpha+w\right),$$

$$T_1=\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{v}{s}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha},\quad T_2=\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}-\frac{\partial w}{s\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{v}{s}\right].$$

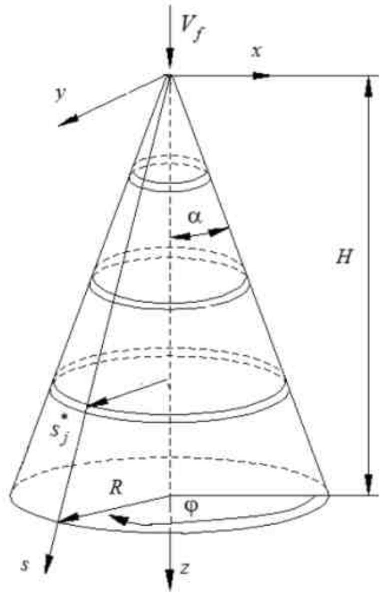


Рис. 2 – Схема конічної оболонки

Радіуси кривини вздовж координатних ліній:

$$R_\varphi=\frac{R}{\cos\alpha}-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\mathrm{tg}\alpha,\quad R_s=\infty.$$

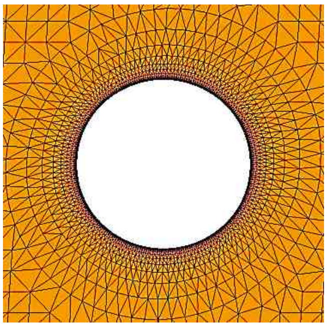


Рис. 3 – Адаптивна сітка в околі кругового отвору

Для розв’язання поставлених варіаційних задач для циліндричних і конічних оболонок з круговими отворами застосовано МСЕ з використанням ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня. В областях концентрації напружень застосовано адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10 (рис. 3). Збіжність МСЕ забезпечувалась за рахунок згущення сітки. Використання більш дрібної сітки у випадку застосування плоских скінченних елементів для розрахунку тонкостінних оболонок призводить до збільшення точності апроксимації поверхні оболонки геометрією вписаного багатогранника.

Числовий аналіз. Розрахунки проведено на ПК з процесором AMD Ryzen 7 5800H з тактовою частотою 3,2 GHz, оперативною пам’яттю 16 GB, відеокартою AMD Radeon Graphics, розрядність системи x64. Середня кількість скінченних елементів для циліндричної оболонки – 9356, вузлів – 19070; для конічної оболонки середня кількість скінченних елементів – 8421, вузлів – 17167.

Обчислення виконано для оболонок з малим круговим отвором. Згідно з [9] отвір вважався *малим*, якщо виконувалось співвідношення $0 < r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} < 1$ та *немалим*, якщо $r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} > 1$, де R_0 – радіус кривини координатної лінії оболонки (рис. 1, б)). Для циліндричної оболонки $R_0 = r_2$, для конічної $R_0 = (2r_1 + \sqrt{L^2 + H^2}) / (2\cos\alpha)$, $\alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{H}{L}\right)\frac{180^\circ}{\pi}$, $L = \sqrt{H^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

Розміри оболонок обирались відповідно до [5, 11]: $r_1 / h = 55{,}56$; $r_2 / h = 73{,}704$; $H / h = 148{,}67$; радіус отвору для циліндричної оболонки: $r_0 / h = 4{,}3$; для конічної оболонки: $r_0 / h = 4{,}05$, при цьому $r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$. Матеріал оболонок – сталь (модуль пружності $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}28$; границя текучості $\sigma_{\grave{O}} = 620{,}42$ Ì Ï à; границя міцності $\sigma_{в} = 723{,}8$ МПа). Осьові рівномірно розподілені розтягувальні зусилля інтенсивності $\tilde{P}_2 = 10$, $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 r_2 / r_1$ ($P_k / h = \tilde{P}_k$ МПа, $k = 1, 2$).

Матеріал кільцевого включення навколо отвору та його ширина варіювалися ($E_{вкл} = 2E_0 / 3$; $E_0 / 2$; $2E_0 / 5$; $E_0 / 3$ та $h_{вкл} = 0{,}5 r_0$; $0{,}25 r_0$; $0{,}125 r_0$).

Результати проведених обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для циліндричної оболонки з малими круговими отворами у разі $r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$ та кільцевим включенням ширини $h_{вкл} = 0{,}5 r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці
в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0,5r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	2,53	-22,2
$E_0/2$	2,13	-34,5
$2E_0/5$	2,31	-28,9
$E_0/3$	2,45	-24,6

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення.

Із табл. 1 видно, що наявність кільцевого включення з більш м’якого матеріалу, ніж матеріал оболонки, дає змогу зменшити величину ККН навколо отвору на ~ (22 – 35) %. Тут найкращім із розглянутих варіантів при $h_{вкл} = 0,5r_0$ з точку зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0, при цьому ККН=2,13, але концентрація напружень спостерігається не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів.

На рис. 4, а) – рис. 4, г) проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого кругового отвору ($r_0 \big/ \sqrt{R_0 h} = 0,5$) у разі «м’якого» включення ширини $h_{вкл} = 0,5r_0$ при величині модуля пружності $E_{вкл} = 2E_0/3$ (рис. 4, а), б)) та при $E_{вкл} = E_0/3$ (рис. 4, в), г)). Отже, при вказаній фіксованій ширині включення в залежності від величини його модуля пружності спостерігається перерозподіл напружень. Має місце «механічний ефект» зміни зони локації концентрації напружень. У разі $E_{вкл} = 2E_0/3$ концентрація напружень спостерігається навколо отвору (ККН=2,53), при зменшенні модуля пружності в два рази ($E_{вкл} = E_0/3$)) її локація переміщується до місця з’єднання включення із матеріалом оболонки (на стик оболонки із включенням), при цьому ККН=2,45. Такий же ефект має місце при $E_{вкл} = E_0/2$; $2E_0/5$, але він менш виражений.

На рис. 5 наведено графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням у разі $h_{вкл} = 0,5r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності ($E_{вкл} = 2E_0/3$; $E_0/2$; $2E_0/5$; $E_0/3$). По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l \le 1$ по розгортці контурів отвору і кільцевого включення. Чим «м’якше» матеріал включення, тим більше величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з’єднання включення із матеріалом оболонки.

У табл. 2 та табл. 3 наведено результати розрахунку ККН, отриманих в ході проведених обчислювальних експериментів для циліндричної оболонки з малими круговими отворами $(r_0 \big/ \sqrt{R_0 h} = 0,5)$ та кільцевими включеннями ширини $h_{вкл} = 0,25r_0$ та $h_{вкл} = 0,125r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності відповідно.

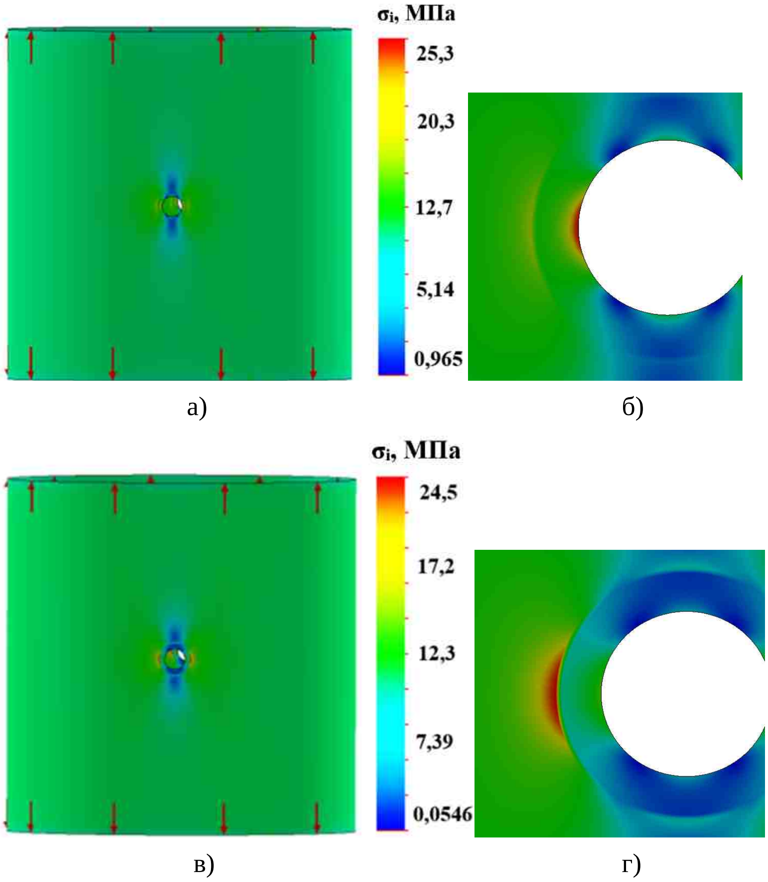


Рис. 4 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м’якого включення $h_{вкл} = 0,5r_0$ при $E_{вкл} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{вкл} = E_0 / 3$ (в), (г)

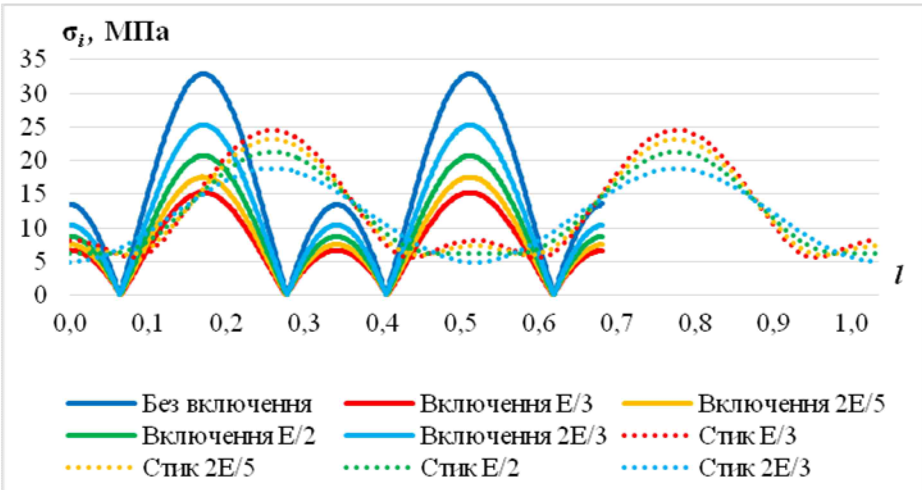


Рис. 5 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл} = 0,5r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці
в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0{,}25 r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	2,45	-24,6
$E_0/2$	2,41	-25,9
$2E_0/5$	2,54	-21,9
$E_0/3$	2,64	-18,8

Також, як і у попередньому випадку, спостерігається тенденція перерозподілу максимальних напружень навколо отвору і зменшення величини ККН при зменшенні величини модуля пружності до $E_{вкл} = E_0/2$, а потім має місце зростання величини ККН. Але у порівнянні із випадком оболонки без включень за рахунок використання м'яких включень навколо отворів вдається зменшити ККН на ~ (19 – 26) %. Тут, у разі $h_{вкл} = 0{,}25 r_0$, найкращім із розглянутих варіантів $E_{вкл}$ з точки зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0, при цьому ККН = 2,41, але концентрація напружень тут зосереджена на стику оболонки із включенням.

Із розглянутих варіантів «жорсткості» включень тільки у разі $E_{вкл} = 2E_0/3$ та $h_{вкл} = 0{,}25 r_0$ концентрація напружень залишається в околі отвору, при цьому ККН=2,45 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 25 %.

На рис. 6, а) – рис. 6, г) проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого кругового отвору $r_0 \big/ \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$ у разі «м'якого» включення з модулем пружності $E_{вкл} = 2E_0/3$, ширини $h_{вкл} = 0{,}25 r_0$ (рис. 6, а), б)) та $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$ (рис. 6, в), г)). Отже, при вказаній фіксованій величині модуля пружності включення в залежності від його ширини спостерігається перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення: у разі $h_{вкл} = 0{,}25 r_0$ величина ККН= 2,45 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$ величина ККН=2,55 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням).

На рис. 7 та рис. 8 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням для різних варіантів величини його модуля пружності.

Аналіз отриманих результатів показує, що чим «м'якше» матеріал включення, тим більше величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки. Чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення.

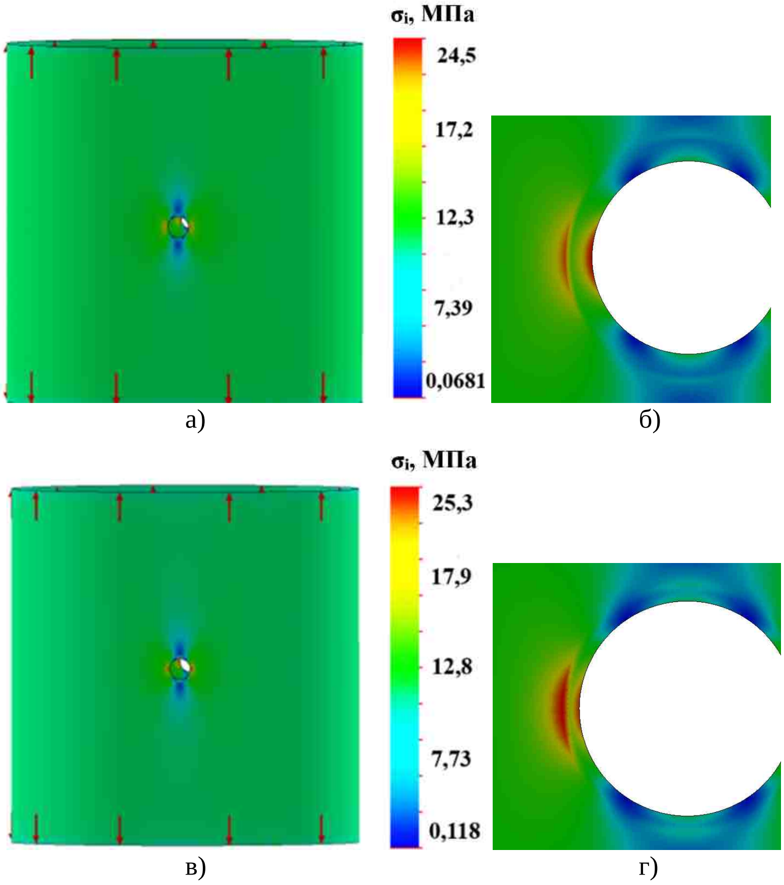


Рис. 6 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м'якого включення $2E_0/3$ при $h_{вкл}=0{,}25r_0$ (а), (б) та при $h_{вкл}=0{,}125r_0$ (в), (г)

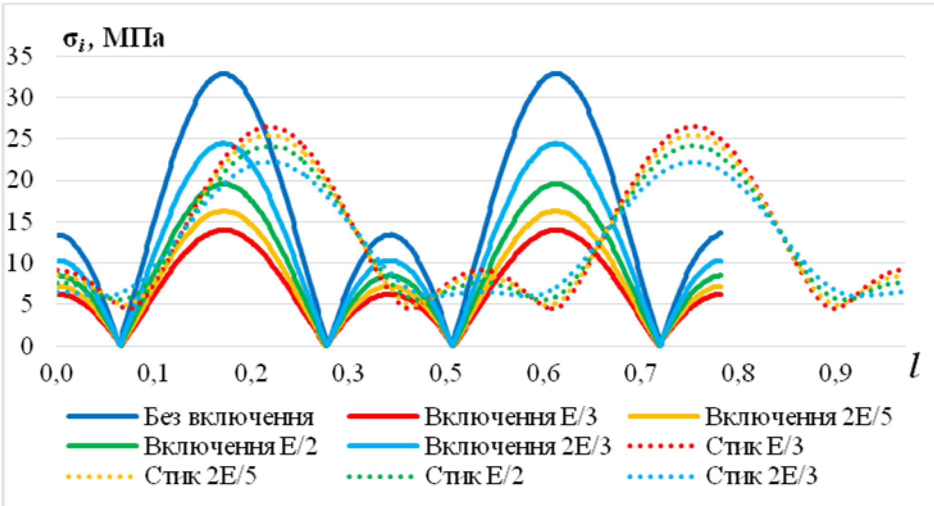


Рис. 7 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл}=0{,}25r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

Таблиця 3

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці
в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	2,55	-21,5
$E_0/2$	2,68	-17,5
$2E_0/5$	2,76	-15,1
$E_0/3$	2,82	-13,2

Тут у порівнянні із випадком оболонки без включень вдається зменшити ККН на ~ (13 – 22) % за рахунок використання м'яких тонких включень навколо отворів. Але у даному випадку концентрація напружень змінює локацію і зосереджена безпосередньо у зоні стику оболонки із включенням. У разі $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$ найкращім із розглянутих варіантів величини модуля пружності з точки зору зменшення ККН виявляється включення з $E_{вкл} = 2E_0/3$, при цьому ККН=2,55 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 22 %.

Отже, у разі тонких включень має місце «механічний ефект» зміни зони локації концентрації напружень від контуру отвору до зони з'єднання оболонки із включенням для усіх розглянутих випадків величини модуля пружності. При цьому зменшення величини модуля пружності призводить до зростання ККН на стику матеріалів (від 2,55 до 2,82).

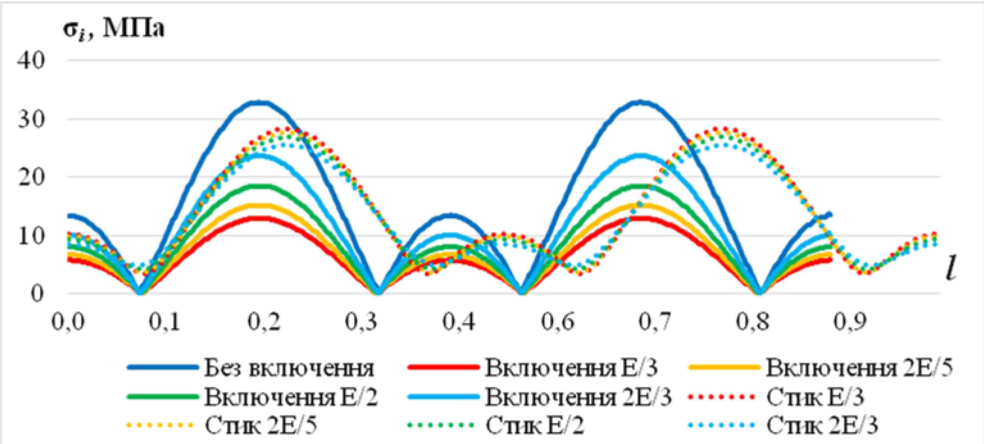


Рис. 8 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

Порівнюючи отримані результати для циліндричної оболонки с круговими отворами маємо, що завдяки включенням з «м'якого» матеріалу вдається зменшити величину ККН на ~ (13 – 35) %. Найбільш задовільні результати одержуємо при ширині включення $h_{вкл} = 0{,}5 r_0$ та модулі пружності $E_{вкл} = 2E_0/3$. За усіх інших випадках ми маємо зміщення зони локації концентрації напружень до стику оболонки із включенням.

Аналогічні числові дослідження здійснено для зрізаних конічних оболонок з малими круговими отворами. Результати проведених обчислювальних експериментів у разі $r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$ за наявності в оболонці кільцевого включення ширини $h_{вкл} = 0{,}5r_0;\ 0{,}25r_0;\ 0{,}125r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 4 – табл. 6 відповідно.

Таблиця 4

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{вкл} = 0{,}5r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	2,52	-23,6
$E_0/2$	2,15	-34,8
$2E_0/5$	2,30	-30,3
$E_0/3$	2,45	-25,7

На рис. 9, а) – рис. 9, г) зображено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого кругового отвору $r_0 \Big/ \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$ у разі «м’якого» кільцевого включення ширини $h_{вкл} = 0{,}5r_0$ з модулем пружності $E_{вкл} = 2E_0/3$ (рис. 9, а), б)) та $E_{вкл} = E_0/3$ (рис. 9, в), г)).

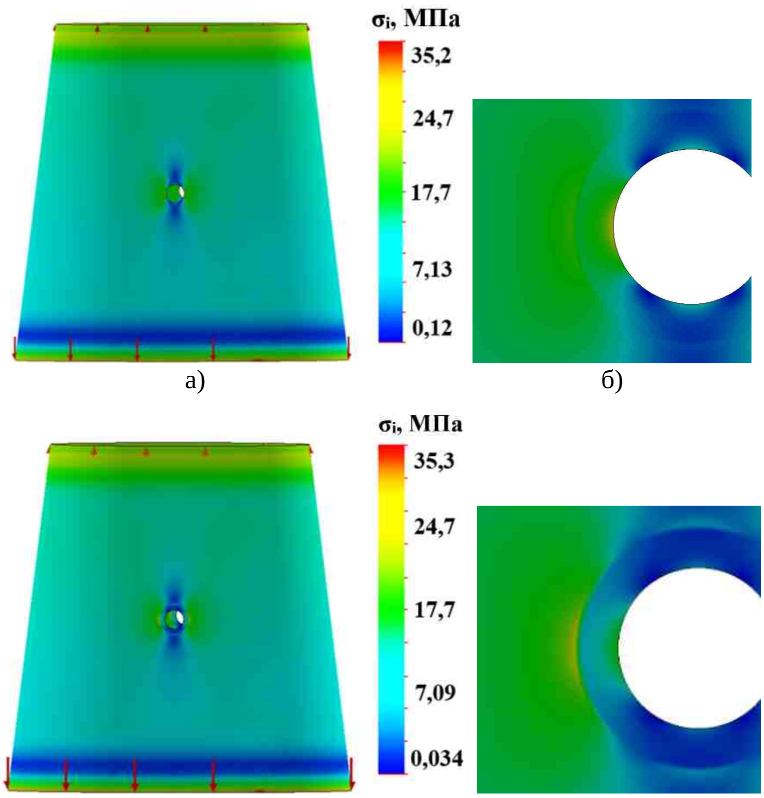


Рис. 9 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м’якого включення $h_{вкл} = 0{,}5r_0$ при $E_{вкл} = 2E_0/3$ (а), (б) та при $E_{вкл} = E_0/3$ (в), (г)

На рис. 10 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням ширини $h_{вкл} = 0{,}5r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

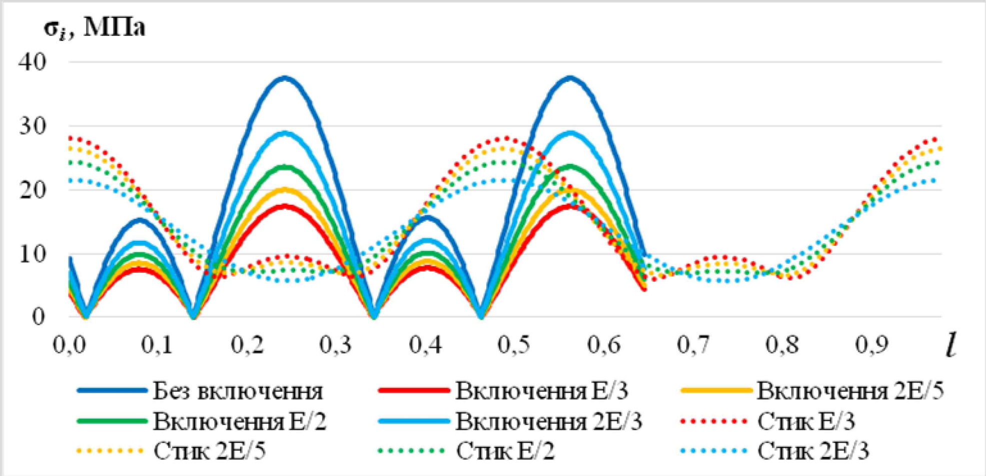


Рис. 10 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл} = 0{,}5r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

За характером розподілу інтенсивності напружень для даних параметрів оболонки і включення результати є аналогічними результатам для циліндричної оболонки. Також, випадок $E_{вкл} = 2E_0 / 3$ є найзадовільнішим не тільки з точки зору зменшення величини ККН (на ~24 %) у порівнянні з оболонкою без включень, а й з точки зору збереження локації зони концентрації напружень навколо отвору.

На рис. 11, а) – рис. 11, г) проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого кругового отвору у разі «м'якого» включення з модулем пружності $E_{вкл} = 2E_0 / 3$, ширини $h_{вкл} = 0{,}25r_0$ (рис. 11, а), б)) та $h_{вкл} = 0{,}125r_0$ (рис. 11, в), г)). Так саме, як і у випадку циліндричних оболонок, спостерігається перерозподіл напружень і зміна зони локації концентрації напружень та тенденція їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення: у разі $h_{вкл} = 0{,}25r_0$ величина ККН= 2,45 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{вкл} = 0{,}125r_0$ величина ККН=2,54 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням).

Таблиця 5

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{вкл} = 0{,}25r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	2,45	-25,7
$E_0 / 2$	2,41	-26,9
$2E_0 / 5$	2,54	-22,9
$E_0 / 3$	2,64	-19,9

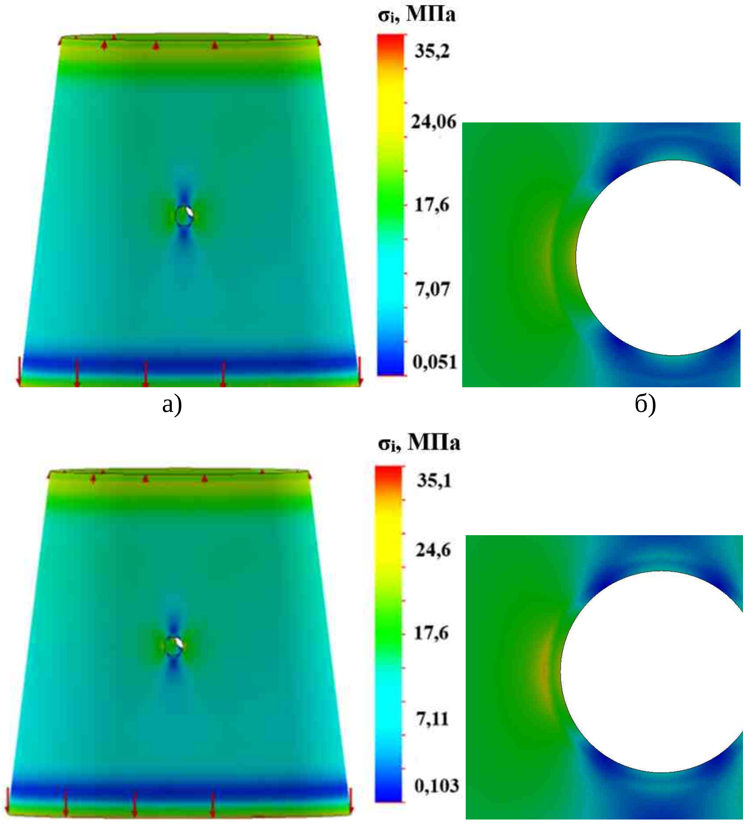


Рис. 11 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м’якого включення $E_{вкл} = 2E_0 / 3$ при $h_{вкл} = 0,25r_0$ (а), (б) та при $h_{вкл} = 0,125r_0$ (в), (г)

На рис. 12 та рис. 13 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням ширини $h_{вкл} = 0,25r_0$ та $h_{вкл} = 0,125r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

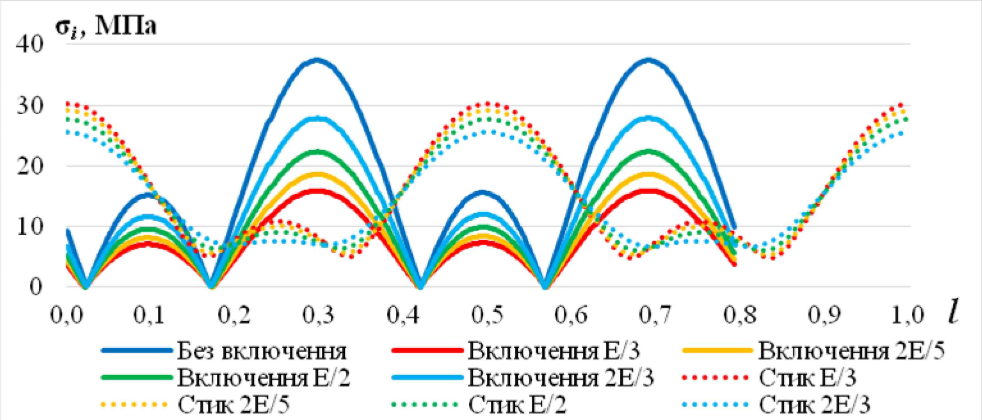


Рис. 12 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл} = 0,25r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

У даному випадку вдається досягнути зменшення ККН на ~ (15 – 23) %, при цьому зона концентрації напружень зміщується від контура отвору на стик між оболонкою і включенням у разі $E_{вкл} = E_0 / 2; 2E_0 / 5; E_0 / 3$.

Таблиця 6

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності та товщини включення $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	2,54	-22,9
$E_0 / 2$	2,66	-19,3
$2E_0 / 5$	2,75	-16,6
$E_0 / 3$	2,80	-15,1

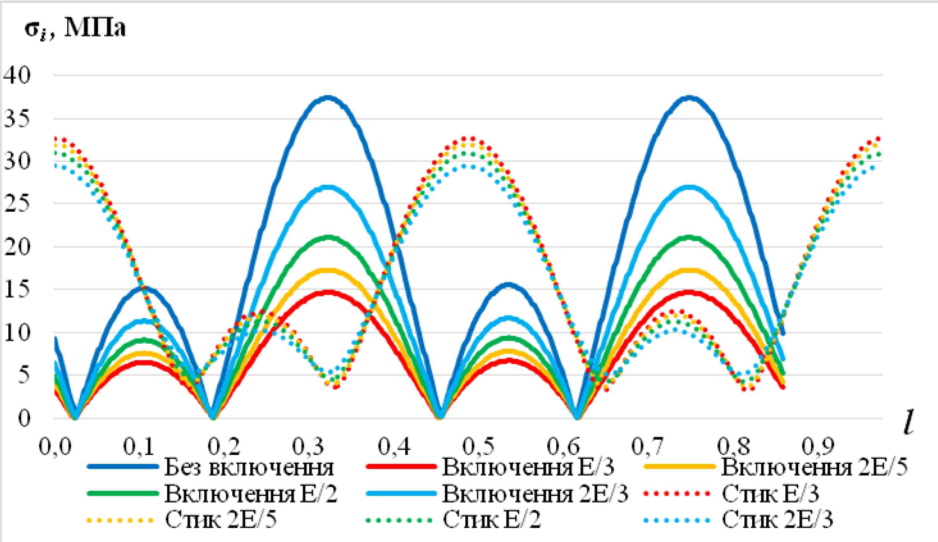


Рис. 13 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{вкл} = 0{,}125 r_0$ для різних варіантів $E_{вкл}$

При розрахунках НДС і визначенні ККН для зрізаної конічної оболонки з круговими отворами виявляється, що проблема зменшення концентрації напружень навколо отвору не є єдиною проблемою для такого роду оболонок. В силу їх геометрії з'являється так званий ефект «конічності», що, у свою чергу, потребує окремого врахування виникнення критичних напружень на її торцях. Зниження концентрації напружень в околі отвору конічної оболонки є можливим за рахунок використання кільцевих включень з певними механічними і геометричними параметрами. «Небезпечні» зони в околі торців потребують додаткової уваги та проведення додаткових досліджень.

У табл. 7 наведено результати порівняльного аналізу розрахунку ККН, отриманих в ході проведених обчислювальних експериментів для циліндричних і конічних оболонок з малими круговими отворами та кільцевими включеннями різної ширини $h_{вкл} = r_0 / 2;\ r_0 / 4;\ r_0 / 8$ в залежності від зміни величини модуля пружності.

Таблиця 7

Порівняльна таблиця ККН в циліндричній та конічній оболонках
в залежності від величини модуля пружності та ширини включення

Оболонка	Модуль пружності включення, $E_{вкл}$	ККН		
		Ширина включення, $r_0/2$	Ширина включення, $r_0/4$	Ширина включення, $r_0/8$
Циліндрична	$2E_0/3$	2,53	2,45	2,55
	$E_0/2$	**2,13**	2,41	2,68
	$2E_0/5$	2,31	2,54	2,76
	$E_0/3$	2,45	2,64	2,82
Конічна	$2E_0/3$	2,52	2,45	2,54
	$E_0/2$	**2,15**	2,41	2,66
	$2E_0/5$	2,30	2,54	2,75
	$E_0/3$	2,45	2,64	2,80

Як видно з табл. 7, для обох типів оболонок найкращій результат з точки зору зменшення величини ККН є такі параметри включення: $E_{вкл} = E_0/2$ та $h_{вкл} = 0,5r_0$. При цьому величина зменшення ККН у порівнянні з ККН для відповідної оболонки без включення складає на ~35 %. Тут слід мати на увазі, що за даних параметрів включення зона концентрації напружень знаходиться не в околі отворів, а на межі поділу матеріалів оболонки і включення. При $E_{вкл} = 2E_0/3$ та $h_{вкл} = 0,5r_0$ величину ККН вдається зменшити для обох типів оболонок на ~22 %, при цьому зона концентрації напружень залишається в околі отворів з певним перерозподілом в бік межі між оболонкою і включенням.

Аналіз отриманих результатів для обох типів оболонок свідчить про те, що чим «м'якше» матеріал включення, тим більшою є величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки. Чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення.

Висновки. В результаті проведеного на основі МСЕ числового дослідження впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на величину коефіцієнта концентрації напружень в тонких циліндричних і конічних оболонках з малими круговими отворами отримано певні раціональні конфігурації параметрів включень, які дають змогу знизити ККН на ~ (13 – 35) %. Встановлено, що в залежності від величини механічних і геометричних параметрів, можна спостерігати механічний ефект: відбувається зміна зони локації концентрації напружень і перерозподіл максимальних напружень від контуру отвору у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення.

Для конічних оболонок, в силу їх геометричних особливостей, спостерігається ефект «конічності», врахування якого потребує проведення додаткових досліджень. Перспективним є знаходження шляхів урахування, або усунення цього ефекту, а також знаходження раціональних параметрів включень щодо зменшення концентрації напружень для інших конфігурацій отворів в оболонкових конструкціях сучасної техніки.

1. *Авдонин А. С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М., 1969. 402 с.
2. *Авраменко О. О.* Аналіз напружено-деформованого стану нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини під дією нерівномірного навантаження. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. Запоріжжя. 2011. Вип. 2. С. 103–107.
3. *Бочкарев С. А.* Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком. Вычислительная механика сплошных сред. 2008. № 3. С. 25–33. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.3.24
4. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М., 1988. 272 с.
5. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецевидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2021. Вип. 33. С. 43–54.
6. *Голда Ю. Л., Преображенский И. Н., Штукарев В. С.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями. Прикладная механика. 1973. Т. 9, № 1. С. 27–32. https://doi.org/10.1007/BF00888695
7. *Григоренко Я. М., Мольченко Л. В.* Теорія пластин та оболонок. К., 1993. 232 с.
8. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей К.: Академпериодика, 2006. 472 с.
9. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С. и др.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К.: Наукова думка, 1980. 636 с.
10. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
11. *Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С.* Концентрація напружень в області прямокутного отвору на бічній поверхні нелінійно-пружної ортотропної конічної оболонки. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 11. С. 41–48. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.041
12. *Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. В. и др.* Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Техн. механіка. 2015. №1. С. 15–29.
13. *Darvizeh M., Haftchenari H., Darvize A., Ansari R., Sharma C. B.* The effect of boundary conditions on the dynamic stability of orthotropic cylinders using a modified exact analysis. Composite Structures. 2006. V. 74. P. 495–502. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.05.004
14. *Han X., Xu D., Liu G. R.* Transient responses in a functionally graded cylindrical shell to a point load. Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 251, Iss. 5. P. 783–805. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3997
15. *Hua L., Lam K. Y.* Orthotropic influence on frequency characteristics of a rotating composite laminated conical shell by the generalized differential quadrature method. Int. J. of Solids and Structures. 2001. V. 38. P. 3995–4015. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00272-9
16. *Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

Отримано 27.10.2023,
в остаточному варіанті 21.11.2023