УДК 539.213.2

К. В. АВРАМОВ

ОБОЛОЧЕЧНАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДИСТЫХ НАНОТРУБОК С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОЙ УПРУГОСТИ

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского 2/10, Харьков, 61046, Украина; e-mail: avramov@nas.gov.ua

Отримана модель нелінійних коливань вуглецевих нанотрубок, що базується на теорії оболонок. Використовуючи варіаційні принципи виведено систему трьох рівнянь у часткових похідних відносно трьох проекцій переміщень. При виведенні цих рівнянь використовувалась геометрично нелінійна модель деформування оболонок Сандерса–Коітера та нелокальна пружність, яка істотно змінює форму запису закону Гука. Система трьох рівнянь з частковими похідними є нелінійною. В коливаннях оболонок при геометрично нелінійному деформуванні беруть участь спряжені форми коливань. За допомогою цього припущення та метода Галеркіна отримано нелінійну систему звичайних диференційних рівнянь відносно узагальнених координат конструкцій, яка модулює вільні нелінійні коливання наноконструкцій. Отримана динамічна система містить квадратичні та кубічні нелінійні доданки. Для дослідження вільних нелінійних коливань використовується метод гармонічного балансу, який використовує представлення коливань у формі ряду Фур’є. У результаті використання цього методу розраховуються скелетні криві вільних нелінійних коливань. Скелетні криві є м’які. Стійкість отриманих періодичних коливань досліджено за допомогою чисельного інтегрування рівнянь рухів. Досліджувалась стійкість отриманих періодичних коливань. Вільні нелінійні коливання вуглецевих нанотрубок втрачають стійкість внаслідок біфуркацій Неймарка–Сакера. У результаті цієї біфуркації народжуються майже періодичні коливання. Досліджуються ці майже періодичні коливання за допомогою перетину Пуанкаре. У результаті розрахунків перетинів Пуанкаре показано, що у системі з’являється інваріантний тор. Отримані майже періодичні коливання наведено на біфуркаційній діаграмі.

Получена модель нелинейных колебаний углеродистой нанотрубки, которая основывается на теории оболочек. На основании вариационных принципов выведена система трех уравнений в частных производных относительно трех проекций перемещений точек срединной поверхности. При выводе этих уравнений используется геометрически нелинейная модель деформирования оболочек Сандерса–Коитера и нелокальная упругость, которая изменяет форму запаси закона Гука. Система трех уравнений в частных производных является нелинейной. Предполагается, что в колебаниях оболочки при геометрически нелинейном деформировании участвуют сопряженные формы колебаний. С помощью этого предположения и метода Галеркина получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат конструкции, которая описывает свободные нелинейные колебания наноконструкции. Полученная динамическая система содержит квадратичные и кубические нелинейные слагаемые. Для расчета свободных нелинейных колебаний используется метод гармонического баланса, который использует представление колебаний в виде ряда Фурье. В результате использования этого метода рассчитывались скелетные кривые свободных нелинейных колебаний. Скелетные кривые являются мягкими. Устойчивость полученных периодических колебаний исследовалась прямым численным интегрированием уравнений движения. Показано, что свободные нелинейные колебания углеродистой нанотрубки теряют устойчивость вследствие бифуркации Неймарка–Сакера. В результате этой бифуркации рождаются почти периодические колебания. Исследуются эти почти периодические колебания с помощью сечений Пуанкаре. В результате расчетов сечений Пуанкаре показано, что в системе возникает инвариантный тор. Полученные почти периодические колебания представлены на бифуркационных диаграммах.

The model of the carbon nanotubes nonlinear vibrations, which is based on the shell theory, is obtained. On the basis of the variational principle, the system of three partial differential equations with respect to three displacements projections is derived. The geometrically nonlinear Sanders–Koiter shell theory and nonlocal elasticity are applied to derive this system. The accounting of the nonlocal elasticity changes the form of Hooke’s law. The system of three partial differential equations is nonlinear. The conjugate vibrational modes participate in the geometrical nonlinear vibrations of the nanotube. Using this assumption and the Galerkin approach, the nonlinear system of ordinary differential equations with respect to generalized coordinates of the structure, which describes the free nonlinear vibrations of the nanotube, is derived. The obtained dynamical system contains quadratic and cubic nonlinear terms. The harmonic balanced method is used to calculate the free nonlinear vibrations of the nanotube. Then the generalized coordinates of the vibrations are expanded into Fourier series. Using this method, the backbone curves of free nonlinear vibrations are calculated. The backbone curves are soft. The stability of the obtained periodic motions is analyzed by the direct numerical integration of the nonlinear dynamical system. Free nonlinear vibrations of the carbon nanotubes lose stability due to the Naimark–Saker bifurcations. The almost periodic vibrations are arisen due to this bifurcation. The Poincare sections are used to study these almost periodic motions. As a result of the Poincare section calculations, it is shown, that the invariant torus is observed. The swings of these almost periodic vibrations are shown on the bifurcational diagrams. The longitudinal vibrations and the flexural motions have commensurable amplitudes. This is new properties of nanotube.

Ключевые слова*: теория Сандерса–Коитера, нелокальная упругость, оболочечная модель нанотрубки, бифуркация Неймарка–Сакера.*

Введение

Колебания углеродистых нанотрубок (УНТ) чрезвычайно важны для многих наномеханических устройств, таких как детекторы заряда, датчики, прибор для автоэлектронной эмиссии [1]. Колебания УНТ часто наблюдаются во время процессов обработки и получения нанокомпозитов. Волновые процессы в наноустройствах, содержащих УНТ, подробно изучаются в статьях [2, 3, 4]. Моделирование УНТ можно условно разделить на две группы подходов. Первая группа – это моделирование на основе молекулярной динамики [5, 6]. Эти подходы требуют колоссальных ресурсов компьютеров. Вторая группа подходов – это построение континуальных моделей на основании теории стержней и оболочек. Не много работ посвящено построению оболочечных моделей колебаний углеродистых нанотрубок. В статье [7] используется линейная оболочечная модель для описания колебаний шарнирно-опертых нанотрубок. В статье [8] получена модель линейных колебаний углеродистых нанотрубок на основании теории оболочек Флюгге с учетом нелокальной упругости. При исследовании геометрически нелинейного динамического деформирования углеродистых нанотрубок в основном используются стержневые модели. В статье [9] континуальные нелинейные балочные модели применяются для моделирования нелинейных колебаний многостенных УНТ. Нелинейные колебания многостенных УНТ, вложенных в упругую среду, рассматриваются в [10]. Нелинейные колебания с большими амплитудами двухстенных УНТ исследуются методом конечных элементов в [11]. Вынужденные колебания двухстенных УНТ рассматриваются в статье [12].

В настоящей статье для описания нелинейных свободных колебаний углеродистой нанотрубки используется оболочечная модель, которая основывается на теории Сандерса–Коитера и нелокальной упругости. Выведена система трех нелинейных уравнений в частных производных относительно проекций перемещений точек срединной поверхности. Для получения нелинейной динамической системы с конечным числом степеней свободы используется метод Галеркина. Свободные колебания полученной системы исследуются методом гармонического баланса. В работе подробно обсуждаются свойства свободных нелинейных колебаний углеродистых нанотрубок.

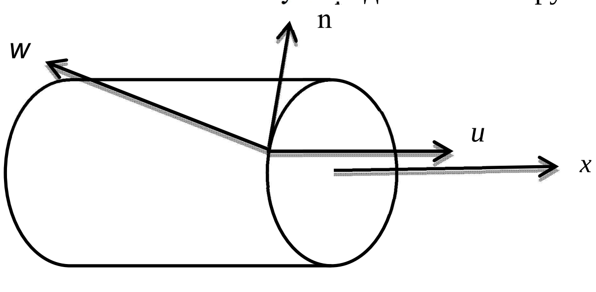


Рис. 1

1. Оболочечная модель нанотрубки

Для описания колебаний УНТ отнесем ее к криволинейной системе координат. Ось x направим вдоль нанооболочки (рис. 1); ось θ является окружной координатой срединной поверхности; ось z перпендикулярна срединной поверхности и направлена наружу. Проекции перемещений точек срединной поверхности УНТ обозначим через $u(x,\theta,t), v(x,\theta,t), w(x,\theta,t)$ (рис. 1). Выведем дифференциальные уравнения в частных производных колебаний УНТ на основе теории Сандерса–Коитера [13]. Вариацию потенциальной энергии цилиндрической оболочки представим так:

$$\delta\Pi = \iint_A \left[N_{xx}\delta\varepsilon_{x,0} + N_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta,0} + N_{x\theta}\delta\gamma_{x\theta,0} + M_{xx}\delta k_x + M_{\theta\theta}\delta k_\theta + M_{x\theta}\delta k_{x\theta} \right] R\,dx\,d\theta, \quad (1)$$

где R – радиус цилиндрической оболочки; A – область срединной поверхности оболочки; $N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}, M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}$ – удельные силовые факторы. Следуя теории Сандерса–Коитера, деформации срединной поверхности нанооболочки и проекции перемещений связаны между собой так:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2; \quad (2)$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right); \; k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \; k_\theta = \frac{\partial v}{R^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2};$$

$$k_{x\theta} = -2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta} + \frac{1}{2R}\left(3\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right).$$

Вариацию кинетической энергии представим так:

$$\delta K = -\rho h \iint_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) R\,dx\,d\theta, \quad (3)$$

где ρ - плотность материала. Виртуальную работу внешних поверхностных сил запишем в следующем виде: $\delta W = \iint_A \left(p_x\delta u + p_Y\delta v + q\delta w\right) R\,dx\,d\theta$, где p_x, p_Y, q - проекции внешних поверхностных сил на оси x, θ, z соответственно. Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\delta K - \delta\Pi + \delta W\right) dt = 0, \quad (4)$$

где t_1, t_2 – некоторые моменты времени. Уравнения (1), (2), (3) подставим в (4) и произведем интегрирование по частям. В результате получим уравнения движения цилиндрической нанооболочки относительно проекций перемещений в следующем виде:

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta} + \underline{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{N_{xx} + N_{\theta\theta}}{4R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)\right]} + \underline{\frac{1}{2R^2}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial\theta}} = p_x;$$

$$\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta}-\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}-\underline{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N_{xx}+N_{\theta\theta}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)\right]}-\underline{\frac{N_{\theta\theta}}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)}-$$

$$\underline{\frac{N_{x\theta}}{R}\frac{\partial w}{\partial x}}-\underline{\frac{\partial M_{\theta\theta}}{R^2\partial\theta}-\frac{3}{2R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}}=p_Y;$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{N_{\theta\theta}}{R}-\frac{\partial}{R^2\partial\theta}\left[N_{\theta\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-\underline{v}\right)\right]-\frac{\partial}{R\partial x}\left[N_{x\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-\underline{v}\right)\right]-$$

$$\frac{\partial}{R\partial\theta}\left(N_{x\theta}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{R^2\partial\theta^2}-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial\theta\partial x}=q, \qquad (5)$$

где h – толщина УНТ.

Если отбросить подчеркнутые слагаемые, то уравнения движения соответствуют уравнениям Доннела, которые опубликованы в монографии [14].

Применение теории нелокальной упругости к расчету УНТ рассмотрено в работах [8, 15]. Компоненты тензора напряжений и деформаций связаны между собой так:

$$\sigma_x-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{\theta\theta});\ \sigma_\theta-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{xx});$$

$$\sigma_{x\theta}-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_{x\theta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta},$$

где $\sigma_x,\sigma_\theta,\sigma_{x\theta}$ – компоненты тензора напряжений; e_0a – нелокальный параметр; E,ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{R^2\partial\theta^2}$. Из этих соотношений можно получить уравнения для удельных силовых факторов в виде:

$$N_{xx}-(e_0a)^2\nabla^2 N_{xx}=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{x,0}+\nu\varepsilon_{\theta,0});$$

$$N_{\theta\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 N_{\theta\theta}=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta,0}+\nu\varepsilon_{x,0});$$

$$N_{x\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 N_{x\theta}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta,0};$$

$$M_{xx}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{xx}=D(k_x+\nu k_\theta);$$

$$M_{\theta\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{\theta\theta}=D(k_\theta+\nu k_x);$$

$$M_{x\theta}-(e_0a)^2\nabla^2 M_{x\theta}=0{,}5D(1-\nu)k_{x\theta}, \qquad (6)$$

где D – цилиндрическая жесткость. Уравнения (6) подставим в уравнения движения (5). Тогда получим следующую систему уравнений движения цилиндрической нанооболочки:

$$\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0a)^2\nabla^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R}\right) + D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\theta^2} - \frac{(3-\nu)}{2R^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial\theta} - \frac{1}{R^4}\frac{\partial^3 v}{\partial\theta^3} + \frac{(1-\nu)}{2R^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial\theta^2}\right) - \tilde{F}_W = q - (e_0a)^2\nabla^2 q; \tag{7}$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (e_0a)^2\nabla^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] - \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{(1-\nu)}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu\partial w}{R\partial x} + \frac{(1+\nu)}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x}\right] + \frac{D(1-\nu)}{4R^3}\left[2\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^2\partial x} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right] + \tilde{F}_U = p_X - (e_0a)^2\nabla^2 p_X; \tag{8}$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (e_0a)^2\nabla^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left[\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial^2 v}{R\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} + \frac{(1-\nu)R}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] - \frac{D}{R^2}\left[\frac{\partial^2 v}{R^2\partial\theta^2} - \frac{\partial^3 w}{R^2\partial\theta^3} + \frac{9(1-\nu)}{8}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{3(1-\nu)}{8R}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial x} - \frac{(3-\nu)}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta\partial x^2}\right] + \tilde{F}_V = p_Y - (e_0a)^2\nabla^2 p_Y, \tag{9}$$

где функции $\tilde{F}_U, \tilde{F}_V, \tilde{F}_W$ описывают геометрически нелинейное деформирование системы. Эти функции имеют следующий вид:

$$\tilde{F}_W = F_W - (e_0a)^2\nabla^2 F_W - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{(1+\nu)}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)^2\right],$$

$$F_W = \frac{\partial}{\partial x}\left[N_{XX}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_{X\theta}}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right)\right] + \frac{\partial}{R\partial\theta}\left[N_{X\theta}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_{\theta\theta}}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right)\right]$$

$$\tilde{F}_U = F_U - (e_0a)^2\nabla^2 F_U - \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{(1+\nu)}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)^2\right] - \frac{Eh}{2R(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)\right]$$

$$F_U = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{N_{XX} + N_{\theta\theta}}{4R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)\right]$$

$$\tilde{F}_V = F_V - (e_0a)^2\nabla^2 F_V - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{(1+\nu)}{8}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)^2\right] - \frac{Eh}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)\right]$$

$$F_V = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N_{XX} + N_{\theta\theta}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)\right] - \frac{N_{\theta\theta}}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right) - \frac{N_{X\theta}}{R}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{10}$$

Из полученной системы уравнений (7) – (9) следует, что нелокальная упругость влияет на слагаемые, описывающие инерционные свойства системы, и на слагаемые, описывающие геометрически нелинейное деформирование. Итак, получена система уравнений (7) – (9) относительно трех проекций перемещений срединной поверхности u, v, w. Подчеркнем, что функции F_U, F_V, F_W содержат удельные силовые факторы $N_{XX}, N_{X\theta}, N_{\theta\theta}$. Поэтому, выразим эти силовые факторы через проекции перемещений. Для этого воспользуемся результатами статьи [16]. Следуя этой статье, для углеродистых нанотрубок выполняется оценка: $\frac{e_0 a}{L} << 1$, где L – длина углеродистой нанотрубки. Тогда соотношения (6) можно представить в следующем виде:

$$N_{XX} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{x,0} + \nu\varepsilon_{\theta,0} + (e_0 a)^2 \nabla^2 (\varepsilon_{x,0} + \nu\varepsilon_{\theta,0})\right]$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{\theta,0} + \nu\varepsilon_{x,0} + (e_0 a)^2 \nabla^2 (\varepsilon_{\theta,0} + \nu\varepsilon_{x,0})\right]$$

$$N_{X\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\gamma_{x\theta,0} + (e_0 a)^2 \nabla^2 \gamma_{x\theta,0}\right] \qquad (11)$$

Теперь представим функции F_U, F_V, F_W зависящими от трех проекций перемещений u, v, w и не зависящими от удельных силовых факторов $N_{XX}, N_{X\theta}, N_{\theta\theta}$. Для этого соотношения (2) подставим в (11) и полученный результат подставим в соотношения (10) для F_U, F_V, F_W.

Подчеркнем, что УНТ имеют очень большие собственные частоты при очень малых их размерах. Это приводит к вычислительным сложностям при их численном моделировании. Во избежание этих сложностей, уравнения движений (7) – (9) преобразовываются к безразмерным переменным:

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \frac{1}{R}(u, v, w);\ \eta = \frac{x}{L};\ \tau = \omega_0 t,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho R^2}};$$

$$\alpha = \frac{R}{L};\ \vartheta = \left(\frac{e_0 a}{R}\right)^2;$$

$$G = \frac{D}{R^2 J} = \frac{h^2}{12R^2};\quad J = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \qquad (12)$$

Как будет показано ниже, при колебаниях углеродистых нанотрубок u, ν и w имеют одинаковый порядок малости. Это является существенным отличием их колебаний от колебаний машиностроительных оболочек, в которых u, ν значительно меньше w.

2. Нелинейные колебания нанооболочки

Рассмотрим геометрически нелинейное динамическое деформирование шарнирно-опертой УНТ. Такие движения раскладываются по формам собственных колебаний с учетом величин частот этих форм. В общем случае нелинейные колебания нанотрубок представляются так:

$$w(x,\eta,\tau)=\sum_{j=1}^{N}\left(q_{2j-1}(\tau)\sin(n_j\theta)+q_{2j}(\tau)\cos(n_j\theta)\right)\sin(m_j\pi\eta);$$

$$v(x,\eta,\tau)=\sum_{j=1}^{N}\left(q_{2(N+j)-1}(\tau)\sin(n_j\theta)+q_{2(N+j)}(\tau)\cos(n_j\theta)\right)\sin(m_j\pi\eta);$$

$$u(x,\eta,\tau)=\sum_{j=1}^{N}\left(q_{2(N+j)-1}(\tau)\sin(n_j\theta)+q_{2(N+j)}(\tau)\cos(n_j\theta)\right)\cos(m_j\pi\eta),\quad(13)$$

где набор целых чисел $(n_j, m_j);\ j=1,\dots,N$ выбирается из анализа собственных частот колебаний; $q_j,\dots,q_{6N}$ обобщенные координаты. Как следует из численного анализа собственных форм колебаний, низкие собственные частоты характеризуются формами колебаний с соизмеримыми перемещениями u, v, w. Поэтому в дальнейшем анализе будут учитываться инерционные свойства нанотрубок в трех направлениях u, v, w. Вследствие геометрически нелинейного деформирования нанотрубки в разложении (13) присутствуют сопряженные формы колебаний $\sin(n_j\theta)\sin(m_j\pi\eta)$ и $\cos(n_j\theta)\sin(m_j\pi\eta)$, которые характеризуются одинаковыми собственными частотами.

Выведем нелинейную динамическую систему относительно обобщенных координат, которая описывает свободные колебания УНТ. Для этого воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. В результате применения этого метода, получим нелинейную динамическую систему относительно обобщенных координат:

$$m_i\ddot{q}_i+\sum_{j=1}^{N_1}K_{ij}q_j=\sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{j\ne\nu}\alpha_{\nu j}^{i}q_\nu q_j+\sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{j\ne\nu}\sum_{j_1=1}^{j_1\ne j}\beta_{\nu j j_1}^{(i)}q_\nu q_j q_{j_1},\ i=1,\dots,N_1,\quad(14)$$

где $N_1=6N$; $diag\{m_1,\dots,m_{N_1}\}$ матрица масс; $\{K_{ij}\}_{i=1,\dots,N_1}^{j=1,\dots,N_1}$ – матрица жесткости конструкции; $\alpha_{\nu j}^{(i)}, \beta_{\nu j j_1}^{(i)}$ – коэффициенты, зависящие от параметров нанотрубки.

Подчеркнем, что квадратичные и кубические слагаемые, входящие в (14), описывают геометрически нелинейное деформирование нанотрубок. Вследствие того, что в разложении (13) присутствуют сопряженные формы колебаний с одинаковыми частотами, то внутренний резонанс 1:1 наблюдается между шестью обобщенными координатами динамической системы (14). Такой внутренний резонанс существенно влияет на нелинейную динамику системы и на выбор метода исследования колебаний.

Для исследования нелинейной динамики системы (14) воспользуемся методом гармонического баланса [13]. Тогда колебания системы приближенно представим так:

$$q_i=A_i^{(0)}+A_i^{(1)}\cos(\Omega t)+A_i^{(2)}\cos(2\Omega t);\ i=1,\dots,N_1,\quad(15)$$

где Ω – частота колебаний. Параметры разложения (15) $\Omega, A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)};\quad i=1,\dots,N_1$ являются неизвестными величинами и определяются в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Для получения этой системы, разложения (15) подставляются в (14) и приравниваются амплитуды при постоянных величинах, $\cos(\Omega t), \cos(2\Omega t)$. Тогда получим систему нелинейных алгебраических уравнений, которую можно представить так:

$$G_1\left(A_1^{(0)},\dots,A_{N_1}^{(0)},A_1^{(1)},\dots,A_{N_1}^{(1)},A_1^{(2)},\dots,A_{N_1}^{(2)},\right)=0;\ i=1,\dots,3N_1. \qquad (16)$$

Итак, получена система $3N_1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $3N_1+1$ неизвестных $\left(\Omega, A_1^{(0)}\ A_2^{(0)},\dots,A_{N_1}^{(2)}\right)$. Решение этой системы нелинейных алгебраических уравнений представляется в виде скелетной кривой.

3. Численный анализ колебаний

Исследуем собственные частоты колебаний шарнирно-опертой углеродистой нанотрубки со следующими численными значениями параметров:

$$D=0{,}678\,nm;\ h=0{,}066\,nm;\ E=5{,}5\,TPa;\ \nu=0{,}19;\ \frac{2L}{D}=5;$$
$$e_0=0{,}6;\ a=0{,}142\,nm. \qquad (17)$$

Таблица 1. Собственные частоты шарнирно-опертой нанотрубки в ТГц

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
n=0	10,20	9,823	9,429	9,178	9,197	9,545	
n=0	6,52	9,06					
n=1	1,928	4,647	6,592	7,606	8,351	9,106	
n=2	1,674	2,96	4,577	6,055	7,365	8,594	9,820
n=3	3,64	4,159	5,093	6,277	7,55	8,862	
n=4	6,06	6,395	6,995	7,84	8,86		
n=5	8,588	8,85					

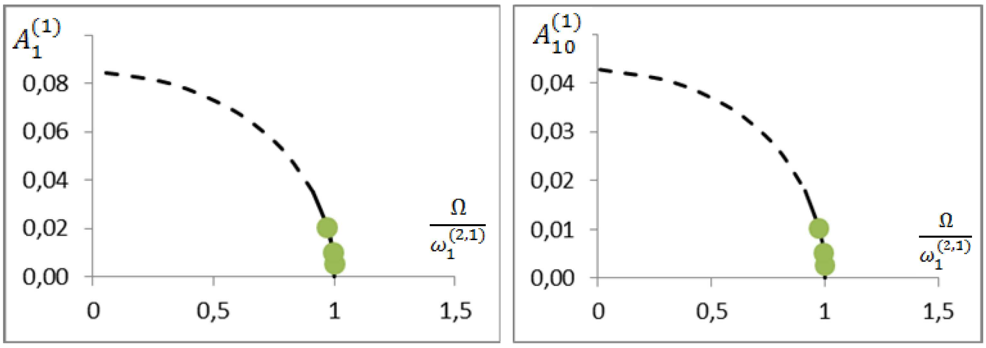
Результаты расчета низших собственных частот колебаний представлены в таблице 1. Во второй строке показаны собственные частоты мод радиального дыхания оболочки. В третьей строке представлены собственные частоты крутильных колебаний. В четвертой, пятой и так далее строках показаны собственные частоты колебаний при $n=1,2,\dots$. Теперь расставим первые семь собственных частот в порядке возрастания от низшей и выше. Для этих собственных частот введем обозначение $\omega_i^{(n,m)}$, где i – номер собственной частоты в порядке возрастания; n – число волн в окружном направлении; $m-1$ – число узлов в продольном направлении. Первые семь собственных частот в ТГц таковы:

$$\omega_1^{(2,1)}=1{,}67;\quad \omega_2^{(1,1)}=1{,}93;\quad \omega_3^{(2,2)}=2{,}96;\quad \omega_4^{(3,1)}=3{,}66;$$
$$\omega_5^{(3,2)}=4{,}16;\quad \omega_6^{(2,3)}=4{,}58;\quad \omega_7^{(1,2)}=4{,}65. \qquad (18)$$

Итак, низшая собственная частота соответствует двум волнам в окружном направлении оболочки $n = 2$. Вторая собственная частота соответствует одной волне в окружном направлении.

Исследуем свободные колебания при геометрически нелинейном деформировании шарнирно-опертой УНТ с параметрами (17). Тогда в разложении (13) применяются собственные формы, отвечающие первым четырем собственным частотам, которые представлены в таблице 1. Собственные формы, отвечающие этим частотам, характеризуются следующими парами чисел

(n_j, m_j); $j = 1, \dots 4$: $N = 4; (2,1); (1,1); (2,2); (3,1)$. Тогда число степеней свободы нелинейной динамической системы (14) $N_1 = 24$. Для исследования свободных нелинейных колебаний применялось разложение (15). Для расчета амплитуд нелинейных колебаний численно решалась система нелинейных алгебраических уравнений (16), состоящая из 72 уравнений. При решении системы нелинейных алгебраических уравнений (16) параметр $A_1^{(1)}$ задавался с некоторым шагом, а остальные параметры из вектора $\left(W, A_1^{(0)} A_2^{(0)}, \dots, A_{N_1}^{(2)}\right)$ определялись из решения этой системы методом Ньютона.



а) б)

Рис. 2

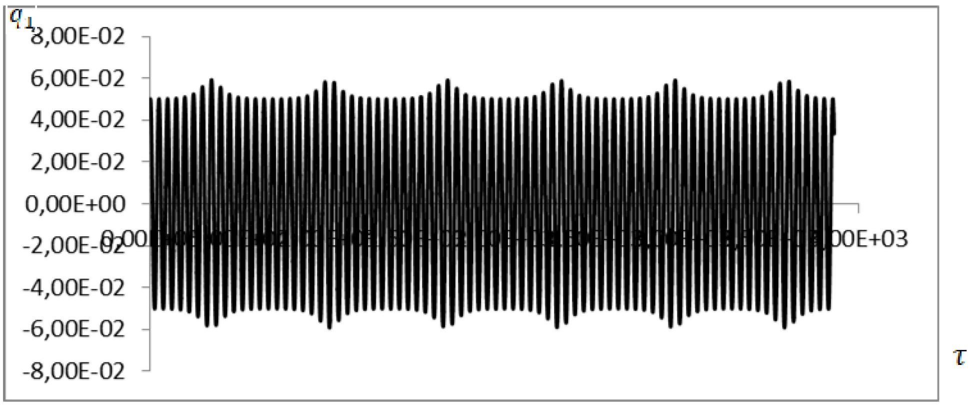


Рис. 3

Численным моделированием найдена группа решений системы нелинейных алгебраических уравнений (16), которая имеет следующие преобладающие параметры из разложения (15): $A_1^{(1)}; A_2^{(1)}; A_9^{(1)}; A_{10}^{(1)}; A_{17}^{(1)}; A_{18}^{(1)}$. Все остальные параметры указанного разложения имеют численные значения на несколько порядков меньше, чем перечисленные выше. Как следует из результатов численного моделирования, преобладающие параметры удовлетворяют следующим уравнениям: $A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$; $A_9^{(1)} = -A_{10}^{(1)}$; $A_{18}^{(1)} = A_{17}^{(1)}$. Колебания нанооболочки можно представить так: $q_i = A_i^{(1)} \cos(\Omega\tau);\ i = 1, 2, \ldots$. Такой вид движения свидетельствует, что в колебания динамической системы (14) значительно больший вклад вносят кубические слагаемые по сравнению с квадратичными. Рассматриваемому движению нанотрубки соответствуют следующие проекции перемещений ее срединной поверхности:

$$\begin{aligned} w &= A_1^{(1)} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) \sin(\pi\eta) \cos(\Omega\tau); \\ v &= A_{10}^{(1)} (\cos 2\theta - \sin 2\theta) \sin(\pi\eta) \cos(\Omega\tau); \\ u &= A_{17}^{(1)} (\cos 2\theta + \sin 2\theta) \cos(\pi\eta) \cos(\Omega\tau). \end{aligned} \qquad (19)$$

Решение, найденное методом гармонического баланса (раздел 2), проверялось прямым численным интегрированием уравнений движений (14). Это численное интегрирование осуществлялось со следующими целями.

1. Для проверки правильности расчета движений, найденных методом гармонического баланса.
2. Для оценки устойчивости периодических движений, найденных методом гармонического баланса.
3. Для расчета устойчивых непериодических движений углеродистой нанотрубки.

Начальные условия для прямого численного интегрирования находились из решений, полученных методом гармонического баланса.

Результаты расчетов периодических колебаний представлены на скелетных кривых (рис. 2). Здесь по оси абсцисс показывается безразмерная частота колебаний $\frac{\Omega}{\omega_1^{(2,1)}}$, а по оси ординат показаны амплитуды периодических колебаний $A_1^{(1)}, A_{10}^{(1)}$. Устойчивые колебания показываются на этом рисунке сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной. Маленькими кругами на этих рисунках показаны данные прямого численного интегрирования. Итак, амплитуды колебаний, полученные прямым численным интегрированием, близки к данным, полученным методом гармонического баланса. При увеличении амплитуды периодических колебаний происходит потеря их устойчивости вследствие бифуркации Неймарка–Сакера [13]. В области неустойчивых колебаний наблюдаются почти периодические движения. На рис. 3 представлены почти периодические колебания $q_1(\tau)$ с безразмерной частотой $\frac{\Omega}{\omega_1^{(2,1)}} = 0{,}808513$. Как следует из результатов численного моделирования, размахи движений $q_1(\tau), q_{10}(\tau)$ являются соизмеримыми. Подчеркнем, что при почти периодических колебаниях УНТ амплитуды перемещений u, v, w соизмеримы.

Выводы

Получена новая модель нелинейных свободных колебаний УНТ при геометрически нелинейном деформировании. Так как свойства колебаний УНТ существенно отличаются от свойств колебаний машиностроительных оболочек, то при выводе их модели были использованы дополнительные гипотезы. При колебаниях нанооболочек проекции перемещений u, n, w предполагались соизмеримыми. Поэтому в этом случае нельзя использовать предположение Доннелла о том, что перемещения в плоскости срединной поверхности не изменяются при изменении кривизны. Чтобы не учитывать эту гипотезу, используется модель Сандерса–Коитера, описывающая геометрически нелинейное деформирование оболочки. Более того, нами использовалась модель нелокальной упругости. В результате получена система трех уравнений в частных производных относительно проекций перемещений, описывающая нелинейные колебания углеродистой нанотрубки. Учет нелокальной упругости сказывается на слагаемых, которые описывают инерционные свойства, и на нелинейных слагаемых, описывающих геометрическую нелинейность.

Нелинейные колебания шарнирно-опертой углеродистой нанотрубки исследованы с частотами, близкими к первой собственной частоте линейных колебаний. Были обнаружены свободные нелинейные колебания около одной из двух сопряженных форм колебаний. Скелетная кривая таких колебаний является мягкой. При увеличении амплитуды свободных колебаний наблюдается бифуркация Неймарка–Сакера, которая приводит к появлению почти периодических колебаний. В режиме почти периодических колебаний амплитуды колебаний проекций перемещений имеют одинаковый порядок.

1. *Gibson R. F., Ayorinde E. O., Wen Y.-F.* Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. Composites Science and Technology. 2007. № 67. P. 1–28.
2. *Sirtori C.* Applied physics: bridge for the terahertz gap. Nature. 2002. № 417. P. 132–133.
3. *Jeon T., Kim K.* Terahertz conductivity of anisotropic single walled carbon nanotube films. Applied Physics Letters. 2002. № 80. P. 3403–3405.
4. *Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A.* Sound wave propagation in multiwall carbon nanotubes. Journal of Applied Physics. 2003. № 93. P. 4801–4806.
5. *Iijima S., Brabec C., Maiti A., Bernholc J.* Structural flexibility of carbon nanotubes. Journal of Chemical Physics. 1996. №104. P. 2089–2092.
6. *Yakobson B. I., Campbell M. P., Brabec C. J., Bernholc J.* High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes. Computer Material Science. 1997. № 8. P. 241–248.
7. *Wang C. Y., Zhang L. C.* An elastic shell model for characterizing single-walled carbon nanotubes. Nanotechnology. 2008. № 19**.** 195704.
8. *Wang Q., V. K. Varadan* Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. Smart Material Structure. 2007. № 16. P. 178–190.
9. *Fu Y. M., Hong J. W., Wang X. Q.* Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes. Journal of Sound and Vibration. 2006. № 296. P. 746–756.
10. *Ansari R., Hemmatnezhad M.* Nonlinear vibrations of embedded multi-walled carbon nanotubes using a variational approach. Mathematical and Computer Modeling. 2011. № 53. P. 927–938.
11. *Ansari R., Hemmatnezhad M.* Nonlinear finite element analysis for vibrations of double-walled carbon nanotubes. Nonlinear Dynamics. 2012. № 67. P.373–383.
12. *Hajnayeb A., Khadem S. E.* Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid. Journal of Sound and Vibration. 2012. № 331. P. 2443–2456.
13. *Аврамов К. В., Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Подходы, методы, явления. 2-е издание переработанное и дополненное. Москва: Институт компьютерных исследований. 2015. 716 с.
14. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge: Cambridge University Press. 2008. 605 p.
15. *Hu Y.-G., Liew K. M., Wang Q., He X. Q., Yakobson B. I.* Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. № 56. P. 3475–3485.
16. *Peddieson J., Buchanan G. R., McNitt R. P.* Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. International Journal of Engineering Science. 2003. № 41. P. 305–312.

Получено 21.02.2018,
в окончательном варианте 17.05.2018