УДК 629.78 https://doi.org/10.15407/itm2021.04.066

Е. О. ЛАПХАНОВ, О. С. ПАЛІЙ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРОЄКТНИХ ПАРАМЕТРІВ КОСМІЧНОЇ НАДУВНОЇ ПЛАТФОРМИ З КОРИСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
15, вул. Лешко-Попеля., Дніпро 49005, Україна; e-mail: ericksaavedralim@gmail.com

Розробка і застосування надувних космічних конструкцій викликає значний інтерес в сучасній космічній науці і техніці. На сьогодні використання цих конструкцій має досить широкий спектр від створення аеродинамічних надувних засобів відведення до надувних житлових секцій на Міжнародній космічній станції. Це пояснюється меншими масовими характеристиками надувних конструкцій у порівнянні з іншими, що в свою чергу мінімізує вартість виведення таких систем на орбіти Землі. Враховуючи значний інтерес до створення орбітальних угруповань, авторами статті пропонується застосування надувної космічної аеродинамічної системи як платформи для корисного навантаження. Таким чином, отримуємо розподілену супутникову систему на космічній надувній платформі. Перевагою застосування такої технології є забезпечення підтримання відносного положення між елементами (корисного навантаження) розподіленої супутникової системи при мінімальних витратах енергії.

В свою чергу, для аналізу особливостей функціонування певної космічної техніки необхідно її математична модель. Враховуючи це, метою статті є розробка математичної моделі для визначення проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням.

Розроблена в роботі математична модель функціонування космічної надувної платформи з корисним навантаженням складається з трьох модулів: модуля орбітального руху, модуля розрахунку термодинамічних параметрів надувної платформи і модуля розрахунку змінного тензора інерції. Також, в роботі визначено чотири газові режими функціонування надувного сегмента космічної платформи та залежність тензора інерції від зміни температури навколишнього космічного середовища, що є необхідним для подальших досліджень. Слід зазначити, що застосування розробленої математичної моделі дає можливість апріорного аналізу широкого спектра проєктних параметрів надувної космічної платформи. Виходячи з цього, було розроблено методику аналізу проєктних параметрів із застосуванням даної моделі. Застосування цього методу може значно спростити подальші дослідження щодо синтезу регулятора кутовим рухом надувної космічної платформи з корисним навантаженням, вибору проєктних параметрів матеріалів оболонки надувного сегмента та дослідження функціонування платформи в різних газових режимах.

Ключові слова: *космічна надувна платформа, корисне навантаження, математична модель, проєктні параметри, термодинамічні параметри.*

The development and application of inflatable space structures is of considerable interest in modern space science and technology. Today, these structures enjoy wide application from aerodynamic inflatable deorbit means to inflatable residential sections for the International Space Station. This is because the masses of inflatable structures are smaller in comparison with others, which in turn minimizes the cost of their orbital injection. In view of the considerable interest in orbital constellations, the authors of this article propose the use of an inflatable space aerodynamic system as a platform for a payload. In doing so, we obtain a distributed satellite system on an inflatable space platform. The advantage of this technology is that it assures the maintenance of the relative position of the elements (payload) of a distributed satellite system of this type with minimal energy consumption.

In its turn, to analyze the features of the operation of a particular space technology, its mathematical model is required. Because if this, the aim of the article is to develop a mathematical model for estimating the design parameters of an inflatable payload-bearing space platform.

The mathematical model of the operation of an inflatable payload-bearing space platform developed in this work consists of three modules: a module of orbital motion, a module of calculation of the thermodynamic parameters of the inflatable platform, and a module of calculation of its variable inertia tensor. The article also identifies four gas modes of operation of the inflatable segment of the space platform and gives the inertia tensor as a function of the ambient temperature, which is necessary for further research. It should be noted that the application of the mathematical model allows a priori analysis of a wide range of inflatable space platform design parameters. On this basis, a design parameter analysis method that uses this model was developed. The application of this method may greatly simplify further research into the synthesis of an angular motion controller for an inflatable payload-bearing space platform, the choice of the design parameters of inflatable segment shell materials, and the study of the platform operation in different gas modes.

Keywords: *inflatable space platform, payload, mathematical model, design parameters, thermodynamic parameters.*

Вступ. На даний час в світі спостерігається висока активність в створенні малих та надмалих космічних апаратів (НМКА), розробниками яких є як університетські лабораторії та студентські колективи, так і державні відомства та компанії. За останнє десятиріччя кількість створення орбітальних угруповань малих та надмалих космічних апаратів збільшилась в 5 разів [1], що свідчить про виникнення і становлення нового, добре структурованого сегмента світового космічного ринку. Таким чином постало питання створення засобів виведення на орбіту, формування орбітальних угруповань НМКА, керування угрупованнями НМКА та відведення їх з орбіти [2]. Конструкція НМКА накладає обмеження на об’єм та вагу систем відведення з орбіти після закінчення терміну їх активного існування. Для вирішення задачі створення та відведення з орбіти угруповання НМКА запропоновано корисне навантаження та службові системи розміщувати на надувній платформі [3]. Використання такого підходу дозволяє вирішити дві науково-технічні задачі:

– відведення з орбіти після закінчення терміну активного існування;

– збільшення меж ефективного використання малих та надмалих космічних апаратів.

Надувні космічні аеродинамічні системи використовуються в конструкціях космічних апаратів (КА) [4 – 6] і їх елементах [7]. Наприклад, каркаси для розгортання сонячних батарей [8], поверхні антен космічних телескопів [9], рами для розправлення полотнищ сонячного вітрила [10], штанги для виносу наукових приладів на великі віддалення від КА [11].

Метою даної статті є розробка математичної моделі для оцінки проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням. Для досягнення цієї мети було поставлено такі задачі:

– визначити системи координат, які необхідні для дослідження особливостей орбітального поступального і кутового руху космічної надувної платформи з корисним навантаженням та для розрахунку її проєктно-конструкторських параметрів;

– формалізувати математичні моделі орбітального поступального і кутового руху космічної надувної платформи з корисним навантаженням;

– визначити математичну модель термодинамічних і газодинамічних станів космічної надувної платформи з корисним навантаженням;

– розробити математичну модель для визначення змінного тензора інерції космічної надувної платформи в залежності від зміни температури при русі по орбіті;

– розробити метод оцінки проєктних параметрів із застосуванням розробленої математичної моделі.

Системи координат. Для дослідження орбітального руху і вибору проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням застосовуються такі системи координат:

1. Інерційна геоцентрична система координат (ІГСК) $OXYZ$. Початок координат, точку O , поміщено в центр мас Землі, вісь OZ спрямована уздовж її осі обертання в напрямку північного полюсу N , осі OX і OY лежать в площині екватора Землі так, що вісь OX спрямована в точку весняного рівнодення, а вісь OY доповнює систему до правої (рис. 1).

2. Грінвічська геоцентрична система (ГСК) координат $O_g X_g Y_g Z_g$ Неінерційна система відліку. Початок системи координат поміщено в центр мас Землі, точку O_g . Вісь $O_g X_g$ лежить в площині екватора і спрямована в сто-

рону перетину екватора з грінвічським меридіаном, вісь $O_g Z_g$ співпадає з віссю OZ системи координат ІГСК та з вектором кутової швидкості добового обертання Землі $\omega_з$ ($\eta = \omega_з t$ – кут повороту ГСК відносно ІГСК за час t), вісь $O_g Y_g$ доповнює систему до правої (рис. 1).

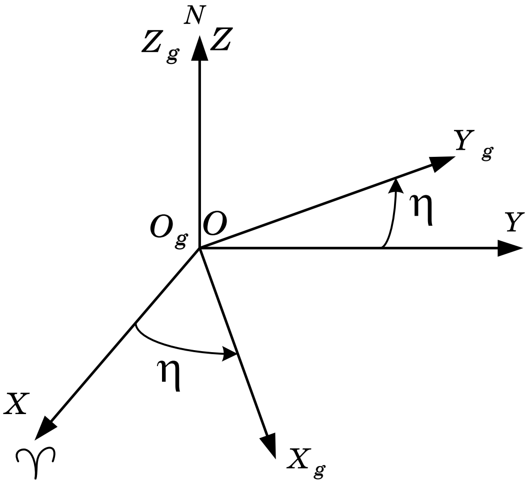


Рис. 1 – Грінвічська система координат відносно ІГСК

3. Перифокальна система координат (ПСК) $O_p X_p Y_p Z_p$ [12]. Неінерційна система відліку. Центр O_p знаходиться в центрі Землі. Вісь $O_p X_p$ лежить в площині орбіти і спрямована в сторону її перигею. Вісь $O_p Z_p$ перпендикулярна площині орбіти космічного апарата і співпадає з вектором інтеграла площини. Вісь $O_p Y_p$ доповнює систему до правої.

4. Орбітальна нижня система координат (ОНСК) $O_{он} X_{он} Y_{он} Z_{он}$. Неінерційна система відліку. Центр $O_{он}$ знаходиться в центрі мас надувної платформи з корисним навантаженням на ній. Вісь $O_{он} Z_{он}$ спрямована в центр Землі, вісь $O_{он} X_{он}$ лежить в площині орбіти і спрямована в сторону руху надувної платформи по орбіті (створює з вектором орбітальної швидкості гострий кут), вісь $O_{он} Y_{он}$ доповнює систему до правої.

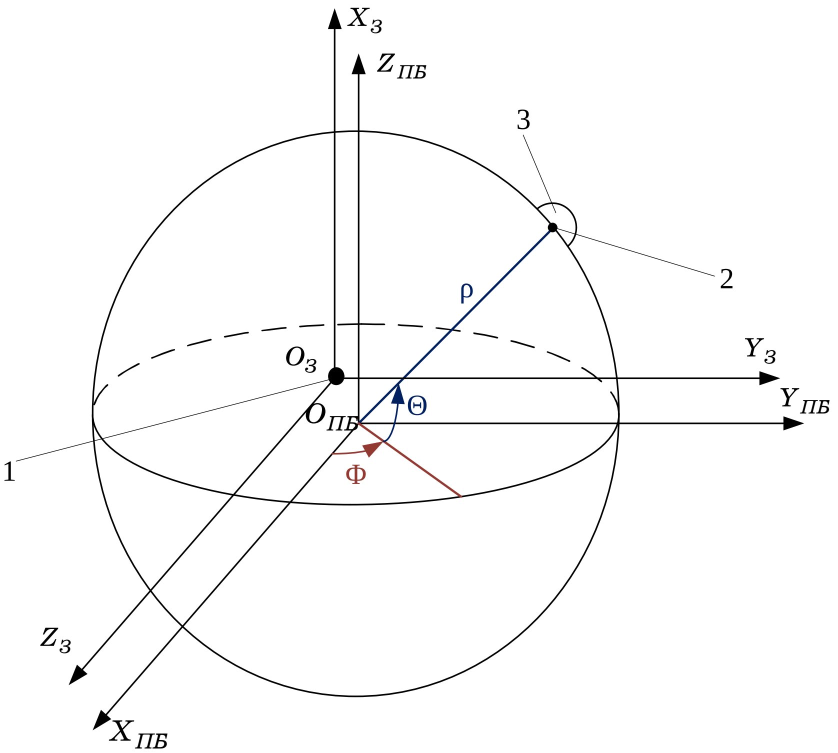
5. Орбітальна верхня система координат (ОВСК) $O_{ов} X_{ов} Y_{ов} Z_{ов}$. Неінерційна система відліку. Орбітальна верхня система координат є стандартом для перерахунку збурень при орбітальному русі у багатьох космічних агентствах в світі [12, 13]. Вісь $O_{ов} X_{ов}$ лежить в площині орбіти і співпадає з віссю $O_{он} X_{он}$ ОНСК. В свою чергу, вісь $O_{ов} Z_{ов}$ спрямована в протилежну сторону від центра Землі і співпадає за напрямком з радіус-вектором космічної надувної платформи. Вісь $O_{ов} Y_{ов}$ доповнює систему до правої. Перехід від ОВСК до ОНСК здійснюється шляхом повороту ОВСК на 180 градусів $O_{ов} X_{ов}$.

6. Зв’язана з центром мас космічної надувної платформи система координат (ЗЦМСК) $O_З X_З Y_З Z_З$. Центр системи координат, точка $O_З$, знаходиться в центрі мас системи, що складається з надувної космічної платформи

і корисного навантаження закріпленого на ній. Осі ЗЦМСК співпадають з головними осями інерції цієї системи.

Перелічені 6 систем координат застосовуються для аналізу навігаційних, динамічних і балістичних параметрів надувної платформи з корисним навантаженням. Переходи між системами координат реалізуються із застосуванням кватерніонів і матриць повороту [14, 15].

В свою чергу, для розрахунку тензора інерції та визначення положення корисного навантаження (місць кріплення) на базовій надувній платформі використовуються три системи координат: базова конструкторська полярна система координат (БКПСК), базова конструкторська декартова система координат (БКДСК) і зв’язана з центром мас система координат (ЗЦМСК). БКПСК є полярною сферичною системою координат, якій відповідає декартова система координат БКДСК $O_{ПБ}X_{ПБ}Y_{ПБ}Z_{ПБ}$. Центр, точка $O_{ПБ}$, знаходиться в геометричному центрі сфери, що є основою надувної космічної платформи. Осі $O_{ПБ}X_{ПБ}$, $O_{ПБ}Y_{ПБ}$, $O_{ПБ}Z_{ПБ}$ складають праву систему координат і паралельні осям інерції ЗЦМСК, як показано на рисунку 2.



1 – центр мас надувної космічної платформи з корисним навантаженням; 2 – центр мас закріпленого *k*-го корисного навантаження на базовій надувній платформі; 3 – корисне навантаження

Рис. 2 – Положення БКПСК та БКДСК відносно ЗЦМСК

В БКПСК положення корисного навантаження визначається полярними сферичними координатами: радіус-вектором закріплення ρ (для сфери вважаємо цю величину константою), конструкторським азимутом Φ та конструкторським кутом місця Θ (рис. 2). Перехід від БКПСК до БКДСК визначається такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
&X_{ПБ}^{k} = \rho \cdot \cos\left(\Phi_k\right)\cos\left(\Theta_k\right),\\
&Y_{ПБ}^{k} = \rho \cdot \sin\left(\Phi_k\right)\cos\left(\Theta_k\right),\\
&Z_{ПБ}^{k} = \rho \cdot \sin\left(\Theta_k\right),\\
&0^{o} \le \Phi_k \le 360^{o},\\
&-90^{o} \le \Theta_k \le 90^{o},
\end{aligned} \tag{1}$$

де $X_{ПБ}^{k}$, $Y_{ПБ}^{k}$, $Z_{ПБ}^{k}$ – координати центра мас k -го корисного навантаження в БКДСК; Φ_k, Θ_k – конструкторські азимут і кут місця k -го корисного навантаження в БКПСК.

За розрахованими координатами центра мас в БКДСК із застосуванням методу паралельного перенесення визначається перехід від БКДСК до ЗЦМСК за такими формулами:

$$\begin{aligned}
&X_{З} = X_{ПБ} - X_{ЦМ},\\
&Y_{З} = Y_{ПБ} - Y_{ЦМ},\\
&Z_{З} = Z_{ПБ} - Z_{ЦМ},
\end{aligned} \tag{2}$$

де $X_{З}$, $Y_{З}$, $Z_{З}$ – координати в ЗЦМСК; $X_{ПБ}$, $Y_{ПБ}$, $Z_{ПБ}$ – координати в БКДСК; $X_{ЦМ}$, $Y_{ЦМ}$, $Z_{ЦМ}$ – координати центра мас надувної платформи з корисним навантаженням в БКДСК.

Модель орбітального поступального і кутового руху космічної надувної платформи. Математичні моделі орбітального поступального руху наведено в роботах [13, 16 – 19]. Системи диференціальних рівнянь, що наведені в роботі [13], є класичними математичними моделями орбітального руху в оскулюючих елементах, де похідні беруться за часом та за істинною аномалією. Застосування моделей, де похідні беруться за істинною аномалією [13] або аргументом широти [16], доцільно для аналізу довгоперіодичного орбітального руху космічного апарата, наприклад в задачах відведення об’єктів космічного сміття [20, 21]. В свою чергу, системи диференціальних рівнянь [13] мають особливість вироджуватися при ексцентриситетах, менше за 0,005, та нахиленнях, близьких до полярних та екваторіальних орбіт. Ці недоліки було частково ліквідовано в роботах [17, 18]. В свою чергу, найбільшу універсальність за діапазоном застосування для різних орбіт має математична модель, що наведена в роботі [19]. Ця модель записується в такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dh}{dt}=\frac{h^2}{\xi}\cdot T\\
&\frac{de_x}{dt}=h\cdot\left[S\cdot\sin F+T\cdot\left[(\xi+1)\cdot\cos F+e_x\right]-W\cdot e_y\frac{\eta}{\xi}\right]\\
&\frac{de_y}{dt}=h\cdot\left[-S\cdot\cos F+T\cdot\left[(\xi+1)\cdot\sin F+e_y\right]+W\cdot e_x\frac{\eta}{\xi}\right]\\
&\frac{di_x}{dt}=\frac{h\cdot\tilde{\varphi}}{2\xi}W\cdot\cos F\\
&\frac{di_y}{dt}=\frac{h\cdot\tilde{\varphi}}{2\xi}W\cdot\sin F\\
&\frac{dF}{dt}=\frac{\xi^2}{h^3\mu}+W\cdot h\cdot\eta
\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

де $e_x=e\cdot\cos(\omega+\Omega)$; $e_y=e\cdot\sin(\omega+\Omega)$; $i_x=\operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}\right)\cdot\cos\Omega$; $i_y=\operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}\right)\cdot\sin\Omega$; $h=\sqrt{\frac{p}{\mu}}$; $F=\omega+\Omega+\vartheta$; e – ексцентриситет орбіти; Ω – пряме сходження висхідного вузла; ω – аргумент перигею; μ – гравітаційна стала, $\mu=3{,}986\cdot10^5$ км^3 / с^2; p – фокальний параметр орбіти; i – нахилення орбіти; ϑ – істинна аномалія; $a=\frac{p}{(1-e^2)}$ – велика піввісь орбіти; $r_{KA}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\vartheta}$ – радіус вектор надувної платформи; S, W, T – проєкції радіальних, трансверсальних і нормальних прискорень, що збурюють, на осі ОВСК.

В математичній моделі враховуються такі збурення:

1) гравітаційні збурення, що пов’язані з несферичністю Землі;
2) аеродинамічні збурення, які викликані тиском динамічного потоку атмосфери, що набігає;
3) плазмодинамічні збурення іоносфери;
4) тиск сонячного світла.

Кутовий рух описується системою диференціальних динамічних рівнянь Ейлера та системою кінематичних рівнянь у кватерніонній формі. У векторній формі систему динамічних рівнянь Ейлера можна записати таким чином:

$$\mathcal{J}\,\frac{d\mu}{dt}+\mu\times(\mathcal{J}\cdot\mu)=\mathbf{M}^{\text{кер.}}+\mathbf{M}^{\text{зб.}}, \tag{4}$$

де $\mathcal{J}$ – тензор інерції космічної надувної платформи з корисним навантаженням; $\mu=\left[\omega_x\quad\omega_y\quad\omega_z\right]^T$ – вектор кутової швидкості надувної платформи з корисним навантаженням в ЗЦМСК; $\mathbf{M}^{\text{кер.}}=\left[M_x^{кер.}\quad M_y^{кер.}\quad M_z^{кер.}\right]^T$

– вектор керуючого моменту в ЗЦМСК; $\mathbf{M}^{зб.} = \left[M_x^{зб.} \quad M_y^{зб.} \quad M_z^{зб.}\right]^T$ – вектор суми моментів збурень в ЗЦМСК.

В моделях враховуються моменти гравітаційних, аеродинамічних збурень та збурень сонячного тиску. Ці моменти розраховуються за формулами, що наведені в роботі [22]. Керуючий момент є проєктним параметром космічної надувної платформи з корисним навантаженням і визначається при синтезі регулятора керування кутовим рухом.

В свою чергу, кінематичні рівняння у кватерніонній формі описуються таким чином:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \circ \mu , \tag{5}$$

де $\boldsymbol{q} = \left[q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3\right]^T$ – кватерніон в ЗЦМСК; $\circ$ – оператор кватерніонного множення.

Математична модель термодинамічного стану надувної космічної платформи. В залежності від положення надувної космічної платформи на орбіті визначається температура її нагрівання або охолодження. Згідно [13, 23] рівняння теплового балансу космічних апаратів записується в такому вигляді:

$$\begin{gathered}
m_k C_k \frac{dT_k}{dt} = Q_{зовн.k} + Q_{внутk} - \sigma\varepsilon_k A_{sp.k} T_k^4 - \\
-\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\left(T_k - T_j\right) - \sigma\sum_{j=1}^{n} A_k F_{kj} \varepsilon_{kj}\left(T_k^4 - T_j^4\right), \\
Q_{зовн.k} = E_s \alpha_k A_{sol.k} + E_a \alpha_k A_{alb.k} + E_p \varepsilon_k A_{plan.k} ,
\end{gathered} \tag{6}$$

де m_k – маса k -го елемента космічного апарата; C_k – теплоємність k -го елемента космічного апарата; T_k – температура k -го елемента космічного апарата; $Q_{зовн.k}$ – кількість теплоти, що передається k -му елементу космічного апарата від навколишнього середовища; $Q_{внутk}$ – кількість теплоти Джоуля–Ленца, що передається k -му елементу космічного апарата від внутрішнього електричного обладнання; σ – стала Стефана–Больцмана, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$; ε_k – випромінювальна здатність k -го елемента космічного апарата; $A_{sp.k}$ – площа повної поверхні k -го елемента космічного апарата; h_{kj} – ефективна теплопровідність між вузлами (елементами) k та j ; T_j – температура j -го вузла; A_i – площа поверхні k -го елемента космічного апарата; F_{kj} – кутовий коефіцієнт поверхні j -го елемента, видимий з поверхні k ; ε_{kj} – параметр, відомий як ефективна випромінювальна здатність; α_k – коефіцієнт поглинання (абсорбованість) k -го елемента космічного апарата; E_s – інтенсивність випромінювання від Сонця; E_a – інтенсивність перевідбитого від Землі випромінювання; E_p – інтенсивність планетарного випромінювання; $A_{sol.k}$, $A_{alb.k}$, $A_{plan.k}$ – розрахункові площі, що приймають сонячне випромінювання, випромінювання альбедо та планетарне випромінювання.

Так, при дослідженні надувної сферичної платформи з корисним навантаженням, k -им елементом є надувна сферична платформа. В свою чергу, при значних розмірах надувної платформи (радіус більше 5 м) теплопередачою між елементами корисного навантаження можна знехтувати, враховуючі значні відстані між їх положеннями на платформі. Головними проєктними параметрами надувної космічної платформи при цьому є коефіцієнти поглинання α_k, випромінювання ε_k та теплопровідності h_{kj} матеріалів з яких виготовлено платформу. Температура надувної платформи T_k розраховуються із диференціального рівняння (6), параметри якого залежать від рішення систем диференціальних рівнянь балістико-навігаційного забезпечення (3) – (5). Таким чином для точного визначення температури надувної сфери необхідною умовою є вирішення системи диференціальних рівнянь, що включає моделі (3) – (6).

Також для надувної космічної платформи досить важливим параметром є температура газу $T_{газу}$ всередині надувної сфери (в даному випадку вважаємо, що в середині надувної оболонки знаходиться ідеальний газ). Цю температуру можна визначити таким чином:

$$T_{газу} = \kappa T_k , \tag{7}$$

де κ – коефіцієнт теплопередачі стінки надувної платформи.

Враховуючи, що $T_i = f(\vartheta, r_{KA})$, $T_{газу}$ також залежить від поточного положення платформи на орбіті. Таким чином, при русі надувної платформи по орбіті $T_{газу}$ є змінним параметром в залежності від поточного знаходження в тіньовій чи сонячній частині орбіти. Так, виходячи із зазначених температурних властивостей надувної платформи, можна сформувати три її газові режими роботи:

1) *Ізобарний пасивний режим роботи при збереженні постійного тиску всередині оболонки* $P_{газу} = \text{const}$. В такому випадку, згідно газових законів, значення об’єму газу, а звідси розміри оболонки надувної сферичної платформи є функціями від значень зміни температури під час польоту по орбіті $V_{газу} = f(\Delta T_k)$, $V_{обол.} = f(\Delta T_k)$.

2) *Ізохорний режим підтримування постійного об’єму надувної оболонки* $V_{газу} = \text{const}$. В такому випадку, згідно газових законів розраховується поточне значення тиску $P_{пот}$, що необхідне для підтримання постійного об’єму, таким чином:

$$P_{пот} = \frac{P_{поч.} T_{пот}}{T_{поч.}}, \tag{8}$$

де $P_{поч.}$, $T_{поч.}$ – значення тиску і температури в початковий момент часу, $T_{пот}$ – поточне значення температури, що розраховується із рішення диференціального рівняння (6).

Із врахуванням (8) необхідним параметром є визначення зміни тиску відносно початкового значення $\Delta P = P_{пот.} - P_{поч.}$. Це значення тиску необхідне для здійснення наддуву чи спускання надувної оболонки платформи для підтримання постійного об'єму при змінній температурі. В свою чергу, під час дослідження функціонування надувної платформи в цьому режимі початкові і поточні значення тиску і температури доцільно розраховувати на кожному поточному і попередньому кроці інтегрування при рішенні системи диференційних рівнянь (3) – (6). При цьому головним проєктним параметром буде визначення періодичності опитування бортовою системою надувної платформи датчиків тиску і температури.

3) *Керування об'ємом газової оболонки із застосуванням системи наддуву при змінній температурі*. Для визначення газових параметрів всередині надувної оболонки платформи в цьому випадку необхідно повне вирішення рівняння Клапейрона з урахуванням змінних температури, тиску і об'єму.

4) *Режим підтримання об'єму оболонки космічної платформи шляхом підтримання заданої температури на тіньовій стороні за допомогою внутрішньої системи нагрівання*. Застосовуються електронагрівальні елементи, що входять в енергосистему надувної космічної платформи.

Розрахунок змінного тензора інерції в першому і третьому газових режимах роботи надувної космічної платформи. Враховуючи, що в газових режимах роботи 1) і 3) об'єм надувної оболонки космічної платформи є непостійним, точки кріплення корисного навантаження в такому випадку є рухомими. В свою чергу, в даному дослідженні надувна оболонка моделюється як пружне тверде тіло змінного об'єму без пластичних деформацій (модель гумової кульки під тиском). Таке припущення є допустимим, враховуючи попередні випробування надувних космічних конструкцій типу Echo2 [4, 24]. Таким чином, при зміні об'єму змінюється параметр закріплення ρ для кожного корисного навантаження. Зміна параметра закріплення залежить від об'єму надувної сферичної платформи, таким чином:

$$\Delta\rho = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \Delta V_{обол.}}{4\pi}}, \tag{9}$$

де $\Delta\rho$ – зміна радіус-вектора закріплення; $\Delta V_{обол.}$ – зміна об'єму надувної космічної платформи.

Так, при зміні об'єму оболонки в газових режимах роботи 1) або 3) відбувається перерахунок радіус-вектора закріплень корисного навантаження (9). В свою чергу, при застосуванні кріплень з люфтами для корисного навантаження (наприклад сіткового покриття поверх надувної оболонки) можуть мати місце також і зміщення за конструкторським азимутом $\Delta\Phi_k$ та конструкторським кутом місця $\Delta\Theta_k$ під час зміни об'єму оболонки. Після перерахунку нових положень корисного навантаження в БКПСК відбувається розрахунок положення кожного елементу, що закріплений на надувній платформі, в БКДСК із застосуванням співвідношень (1). Далі, визначаються в БКДСК координати центра мас надувної космічної платформи з корисним навантаженням за формулами, що в загальному вигляді записуються таким чином:

$$\begin{aligned}
X_{ЦМ} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ПБ}^{k} m_k + \iiint\limits_{V} x\,\rho_{обол.} dxdydz}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k + \iiint\limits_{V} \rho_{обол.} dxdydz},\\
Y_{ЦМ} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_{ПБ}^{k} m_k + \iiint\limits_{V} y\,\rho_{обол.} dxdydz}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k + \iiint\limits_{V} \rho_{обол.} dxdydz},\\
Z_{ЦМ} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Z_{ПБ}^{k} m_k + \iiint\limits_{V} z\,\rho_{обол.} dxdydz}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k + \iiint\limits_{V} \rho_{обол.} dxdydz},
\end{aligned} \tag{10}$$

де m_i – маса k -го елемента корисного навантаження; n – кількість елементів корисного навантаження; $\rho_{обол.}$ – густина оболонки надувної космічної платформи; V – об'єм оболонки надувної космічної платформи;

Слід зазначити, що в формулах (10) корисне навантаження моделюється точковими масами m_k . Це припущення допустиме для випадків, коли відстані між елементами корисного навантаження та між кожним елементом і геометричним центром системи значно перевищують розміри цих елементів корисного навантаження (рис. 2). Після визначення координат центра мас в БКДСК (10), відбувається визначення координат корисного навантаження в ЗЦМСК при переході від БКДСК до ЗЦМСК за формулами (2). Далі, за стандартною методикою [13] відбувається розрахунок тензора інерції в ЗЦМСК із застосуванням таких формул:

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \sum_{k=1}^{n}\left(Y_k^2 + Z_k^2\right) m_k + \iiint\limits_{V_1} (y^2 + z^2)\rho_{обол.} dxdydz,\\
J_{yy} &= \sum_{k=1}^{n}\left(X_k^2 + Z_k^2\right) m_k + \iiint\limits_{V_1} (x^2 + z^2)\rho_{обол.} dxdydz,\\
J_{yy} &= \sum_{k=1}^{n}\left(X_k^2 + Y_k^2\right) m_k + \iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2)\rho_{обол.} dxdydz,\\
J_{xy} &= J_{yx} = -\sum_{k=1}^{n}\left(X_k Y_k\right) m_k - \iiint\limits_{V_1} xy\,\rho_{обол.} dxdydz,\\
J_{xz} &= J_{zx} = -\sum_{k=1}^{n}\left(X_k Z_k\right) m_k - \iiint\limits_{V_1} xz\,\rho_{обол.} dxdydz,\\
J_{yz} &= J_{zy} = -\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k Z_k\right) m_k - \iiint\limits_{V_1} yz\,\rho_{обол.} dxdydz,
\end{aligned} \tag{11}$$

де X_k , Y_k , Z_k – координати k -го корисного навантаження в ЗЦМСК; V_1 – об'єм оболонки надувної космічної платформи, що визначається в ЗЦМСК.

Таким чином, отримано формулу для розрахунку змінного тензора інерції, що складається з монолітної оболонки з дискретно розташованим на ній корисним навантаженням.

Метод оцінки проєктних параметрів із застосуванням математичної моделі функціонування космічної надувної платформи з корисним навантаженням. Розроблена математична модель функціонування космічної надувної платформи (1) – (11) з корисним навантаженням дозволяє проводити дослідження досить широкого спектру її характеристик, а саме: орбітального поступального і кутового руху, теплових характеристик, газодинамічних характеристик (газу всередині надувної оболонки) та механічних характеристик (оцінки зміни тензора інерції при зміні температури та об'єму надувної космічної платформи при русі по орбіті). Враховуючи це, пропонується метод оцінки проєктних параметрів надувної космічної платформи з корисним навантаженням, що можна представити алгоритмом послідовності дій, як показано на рисунку 3.

Рис. 3 – Метод оцінки проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням із застосуванням математичної моделі (1) – (11)

Застосування цього методу (рис. 3) дозволяє проводити апріорні оцінки проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням із застосуванням комп'ютерного моделювання. В свою чергу, розроблена математична модель функціонування космічної надувної платформи з корисним навантаженням із застосуванням кватерніонного математичного апарату для кутового руху [14] адаптована для зручності програмування та проведення комп’ютерних експериментів.

Висновки. В результаті проведеного аналізу особливостей функціонування космічних надувних конструкцій розроблено математичну модель для оцінки проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням. Розроблена математична модель оцінки проєктних параметрів включає три основні модулі: модуль орбітального поступального і кутового руху, модуль визначення термодинамічних і газодинамічних параметрів надувної космічної платформи та модуль розрахунку змінного тензора інерції при дії температурних факторів на надувну космічну платформу під час руху по орбіті. В свою чергу, застосування кватерніонного математичного апарату в моделях кутового руху та для переходу між системами координат дає зручність при використанні даної моделі для комп’ютерних експериментів. Також використання розробленої моделі функціонування космічної надувної платформи з корисним навантаженням дає можливість аналізу широкого спектра проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням. Враховуючи це, розроблено метод оцінки проєктних параметрів космічної надувної платформи з корисним навантаженням, що дає зручність для проведення подальших досліджень, таких як:

– синтез регулятора кутовим рухом космічної надувної платформи з корисним навантаженням;

– вибір матеріалів для розробки оболонки космічної надувної платформи;

– вибір термодинамічного захисту оболонки;

– дослідження функціонування космічної надувної платформи в різних газових режимах.

Робота виконувалася відповідно до договору № 04/01-2021(3) від 01.04.2021 між НАН України та Інститутом технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, який було заключено на підставі Розпорядження Президії НАН України від 29.03.2021 № 181. Дослідження, що привели до підготовки статті, виконано за рахунок фінансування за бюджетною програмою "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

1. *Curzi G., Modenini D., Tortora P.* Large Constellations of Small Satellites: A Survey of Near Future Challenges and Missions. Aerospace 2020, Vol. 7, No. 133. https://doi.org/10.3390/aerospace7090133
2. IADC Statement on Large Constellations of Satellites in Low Earth Orbit. Issued by IADC Steering Group and Working Group 4. IADC-15-03 July 2021. URL: https://www.iadc-home.org/documents_public/view/id/174#u (дата звернення 14.10.2021).
3. Патент України на винахід № 117381, МПК B 64 G 1/62, B 64 G 1/10. Спосіб створення та усунення з орбіти угрупувань нано- та піко- космічних апаратів та космічний апарат для його здійснення / *Алпатов А. П., Палій О. С., Скорік О. Д.* – a201604541; заявл. 25.04.2016; опубл. 25.07.2018, Бюл. № 14.
4. The Echo-I inflation system. Langley research center ; chief *D. L. Clemmons Jr.* Hampton, Virginia, 1964. 56 p. № TN D-2194. URL: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiug.30112106866681&view=1up&seq=3 (дата звернення 14.10.2021).
5. *Кучейко А.* Misty: спутники-невидимки в космосе. Новости космонавтики. 2004. Т. 14, № 6. С. 50–53.
6. Патент США на винахід № 5345238, МПК H 1 Q 15/16. Satellite signature suppression shield. *M. T. Eldridge, K. H. VcKechnie, R. M. Helfey*. 494278; заявл. 14.03.90; опубл. 06.09.94.
7. *Babuscia A., Knapp M., Hicks F. M. and other.* InCUBEation : A series of mission for interplanetary exploration using small satellite platforms. Presentation A.1.3 on Interplanetary small satellite conference, 20-21 June 2013 California Institute of Technology, Pasadena, California. URL: http://www.intersmallsatconference.org (дата звернення 14.10.2021).

8. *Lichodziejewski D., Veal G., Helms R., Freeland R., Kruer M.* Inflatable Rigidizable Solar Array for Small Satellites. In Proceedings of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. AIAA-2003.98. URL: https://doi.org/10.2514/6.2003-1898
9. Inflatable antenna technology with preliminary shuttle experiment results and potential applications. R. E. Freeland, S. Bard, G. R. Veal G. D. Bilyeu and other. URL: https://trs.jpl.nasa.gov/bitstream/handle/2014/26491/96-1367.pdf?sequence=1 (дата звернення 14.10.2021).
10. *Graybeal N. W., Craig J. I., Whorton M. S.* Deployment Modeling of an Inflatable Solar Sail Spacecraft. Presented at the AMA Guidance, Navigation and Controls Conference, Keystone Colorado, August 21-24, 2006. Paper AIAA 2006-6336. URL: https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/34446/e-16-y34_10127.pdf (дата звернення 14.10.2021).
11. *Schenk M., Viquerat A. D., Seffen K. A., Guest S. D.* Review of Inflatable Booms for Deployable Space Structures: Packing and Rigidization. Journal of Spacecraft and Rockets. Vol. 51, No. 3. URL: https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.A32598 (дата звернення 14.10.2021).
12. *Curtis H.* Orbital Mechanics for Engineering Students (4th Edition). Butterworth-Heinemann, 2019. 692 p. ISBN 978-0-08-102133-0.
13. *Fortescue P., Stark J., Swinerd G.* Spacecraft systems engineering. John Wiley & Sons Ltd. Chichester, 2011. 724 p. https://doi.org/10.1002/9781119971009
14. *Alpatov A., Kravets Vic., Kravets Vol., Lapkhanov E.* Representation of the kinematics of the natural trihedral of a spiral-helix trajectory by quaternion matrices. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2021. Vol. 9, No. 4. P. 18–29. https://doi.org/10.14738/tmlai.94.10523
15. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с. ISBN 5-9221-0680-5.
16. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные методы и задачи. М.: Наука. 1968. 800 с.
17. *Маслова А. И., Пироженко А. В.* Изменение орбиты под действием малого постоянного торможения. Космічна наука і технологія. 2016. Т. 22, №6. С. 20–24. https://doi.org/10.15407/knit2016.06.020
18. *Пироженко А. В., Маслова А. И., Васильев В. В.* О влиянии второй зональной гармоники на движение спутника по почти круговым орбитам. Космічна наука і технологія. 2019. Т. 25, № 2. С. 3–11. https://doi.org/10.15407/knit2019.02.003
19. *Мирер С. А.* Механика космического полета. Орбитальное движение. Москва: Резолит. 2007. 270 с.
20. *Golubek A., Dron' M., Dubovik L., Dreus A., Kulyk O., Khorolskiy P.* Development of the combined method to de-orbit space objects using an electric rocket propulsion system. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2020. Vol 4, No 5(106). P. 78–87. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210378
21. *Lapkhanov E., Khoroshylov S.* Development of the aeromagnetic space debris deorbiting system. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 5, No. 5(101). P. 30–37. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.179382
22. *Храмов Д. А.* Визуальное моделирование движения космического аппарата. Техническая механика. 2015. №2. С. 49–58.
23. *Martinez I.* Spacecraft thermal modelling and testing. 43 p. URL: http://webserver.dmt.upm.es/~isidoro/tc3/Spacecraft%20Thermal%20Modelling%20and%20Testing.pdf (дата звернення 14.10.2021).
24. *Horn A. C.* A Low Cost Inflatable CubeSat Drag Brake Utilizing Sublimation. 2017. https://doi.org/10.25777/1xaw-be17

Отримано 15.11.2021,
в остаточному варіанті 01.12.2021