УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2022.04.079

К. В. АВРАМОВ, Б. В. УСПЕНСЬКИЙ

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ОБОЛОНКИ ПОДВІЙНОЇ КРИВИЗНИ З ПРУЖНИМ СТІЛЬНИКОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,
вул. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: admi@ipmach.kharkov.ua

Отримано математичну модель коливань тришарових оболонок подвійної кривизни при геометрично нелінійному деформуванні. Серединний шар є стільниковим заповнювачем, який виго-товлено за допомогою адитивних технологій FDM. Механічні властивості стільникового заповнювача оцінено за допомогою процедури гомогенізації. Зовнішні шари оболонки є тонкими та виготовлені з вуглепластику. При побудові моделі коливань застосовано теорію зсуву високого порядку, враховано ортотропію механічних властивостей всіх шарів оболонки. Кожний шар оболонки описано п'ятьма змінними (три проєкції переміщень та два кути обертання нормалі до серединної поверхні). Властивості лінійних коливань досліджено шляхом дискретизації за методом Релея–Рітца. При цьому серединний шар оболонки є значно легшим та податливим в порівнянні з зовнішніми шарами, що призводить до особливостей обчислювального процесу. Знайдено власні частоти та форми оболонки для подальшого аналізу нелінійних коливань. Математична модель вимушених коливань оболонки при геометрично нелінійному деформуванні являє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яку отримано методом заданих форм. Для дослідження нелінійних періодичних коливань та їхніх біфуркацій застосовано чисельну процедуру, яка є поєднанням методу продовження та методу пристрілки. Чисельно досліджено властивості нелінійних періодичних коливань та їхніх біфуркацій в областях основних та субгармонійних резонансів. Розглянуто сферичну панель та панель у формі гіперболічного параболоїда. Показано, що при застосуванні збурюючого навантаження в точці, яка зміщена відносно центра тяжіння панелі, спостерігається взаємодія власних форм коливань, а частотний відгук та біфуркаційна діаграма якісно змінюються в порівнянні з випадком, коли збурююче навантаження застосовується в центрі тяжіння панелі. Досліджено збіжність результатів в залежності від кількості доданків у розкладеннях методу Релея–Рітца та методу заданих форм.

Ключові слова: *тришарова конструкція, нелінійні коливання, біфуркації, вимушені коливання, ортотропний матеріал.*

This paper presents a mathematical model of vibrations of a three-layered double-curved shell under geometrically nonlinear deformation. The middle layer is a honeycomb manufactured using FDM additive technologies. The mechanical properties of the honeycomb were assessed by a homogenization procedure. The outer layers of the shell are thin, and they are made of carbon-filled plastic. The model is based on a higher-order shear theory and accounts for the orthotropy of the mechanical properties of all the shell layers. Each layer of the shell is described by five variables (three displacement projections and two rotation angles of the normal to the middle surface). The properties of linear vibrations were studied using discretization by the Rayleigh–Ritz method. Because the middle layer of the shell is far lighter and more compliant in comparison with the outer layers, the computational process has some features. The eigenferquencies and eigenmodes of the shell were found for a further analysis of nonlinear vibrations. The mathematical model of forced vibrations of the shell under geometrically nonlinear deformation is a system of nonlinear ordinary differential equations derived by the assumed-mode method. Nonlinear periodic vibrations and their bifurcations were studied using a numerical procedure, which is a combination of the continuation method and the shooting technique. The properties of the nonlinear periodic vibrations and their bifurcations in the regions of fundamental and subharmonic resonances were studied numerically. A spherical panel and a hyperbolic paraboloid panel were considered. It was shown that when a disturbing force is applied at a point out of the panel's center of gravity, the panel's eigenmodes interact, and the frequency response and the bifurcation diagram change qualitatively in comparison with the case where that force is applied at the panel's center of gravity. An agreement between the results was studied as a function of the number of terms in the Rayleigh–Ritz and assumed-mode expansions.

Keywords: *three-layered structure, nonlinear vibrations, bifurcations, forced vibrations, orthotropic material.*

Вступ. Багатошарові конструкції застосовуються в аерокосмічній техніці понад 70 років, оскільки вони дозволяють отримати високу жорсткість на вигин при малій вазі конструкції. Стільниковий заповнювач є серединною частиною цієї конструкції. Його може бути виготовлено за допомогою адитивних технологій [1 – 3], які поступово знаходять застосування в

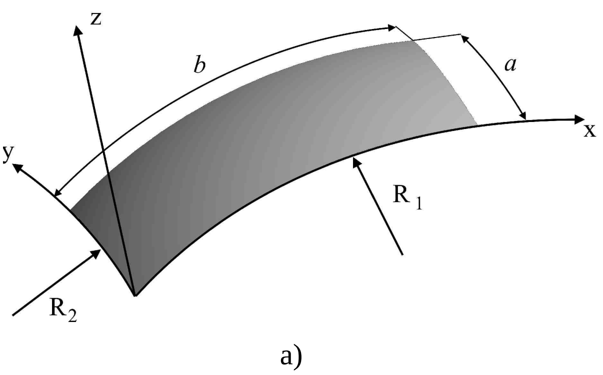
© К. В. Аврамов, Б. В. Успенський, 2022

аерокосмічній техніці [4, 5].

Кілька статей присвячено дослідженню коливань тришарових оболонок при геометрично нелінійному деформуванні. Нелінійні коливання тришарової оболонки подвійної кривизни з п’єзоелектричним шаром розглянуті в [6]. Нелінійні коливання в’язкопружних багатошарових оболонок подвійної кривизни з м’яким серединним шаром та магнітореологічним шаром досліджено в статті [7]. Нелінійні коливання циліндричної тришарової оболонки з чарунковим серединним шаром розглянуті в [8]. Лицьові боки цієї оболонки посилено вуглецевими нанотрубками. Нелінійні коливання тришарових панелей на пружній основі під дією ударного навантаження розглянуто в [9].

Головна новизна цієї статті полягає в результатах чисельного моделювання нелінійних вимушених коливань та їхніх біфуркацій в зоні основних та субгармонійних резонансів тришарових пластин зі стільниковим заповнювачем, який виготовлено адитивними технологіями FDM. Для досягнення цієї мети побудовано нову математичну модель геометрично нелінійного динамічного деформування тришарових оболонок подвійної кривизни. Ця математична модель базується на теорії зсуву високого порядку. За допомогою методу заданих форм цю математичну модель зведено до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Періодичні коливання отриманої динамічної системи досліджено чисельним методом, який є поєднанням методу продовження та методу пристрілки. Чисельно досліджено властивості вимушених коливань в зонах основного та субгармонійного резонансів.

Формулювання задачі та основні співвідношення. Розглядається тришарова оболонка подвійної кривизни (рис. 1). Верхній та нижній шари оболонки виготовлено з вуглепластику. Середній шар оболонки є стільниковим заповнювачем, який виготовлено за FDM технологією (рис. 1, б)) з ULTEM 9085. Верхній, середній та нижній шари оболонки мають постійні товщини h_t, h_c, h_b відповідно. Деформування конструкції вивчається в криволінійних координатах (x, y) з радіусами кривизн R_1 та R_2. Вісь z спрямована перпендикулярно осям x, y (рис.1, а)).



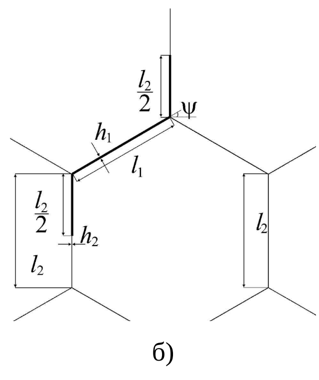


Рис. 1 – Ескіз тришарової оболонки

Введемо три поперечних координати z_t, z_c, z_b, які зв’язано з серединними поверхнями шарів. Основні геометричні параметри стільникового заповнювача l_1, l_2, h_c, ψ наведено на рис. 1, б). Довжини викривлених сторін оболонки позначаються a та b (рис. 1, а)).

Оболонка здійснює вимушені нелінійні коливання під впливом періодичної зосередженої сили $F_0 \cos(\Omega\ )$. Значення цієї сили є таким, що амплітуди коливань оболонки є сумірними з її товщиною, тому оболонка піддається геометрично нелінійному деформуванню. Напружено-деформований стан конструкції описується проєкціями переміщень точок кожного шару на координатні осі (x, y, z): $(u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, u_3^{(t)}, u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, u_3^{(c)}, u_1^{(b)}, u_2^{(b)}, u_3^{(b)})$, де індекси b, c, t вказують на верхній, середній та нижній шари конструкції відповідно.

Верхній та нижній шари оболонки є ортотропними. Вони описуються законом Гука в наступній формі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(j)} \\ \sigma_y^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_x^{(j)} = 2\bar{C}_6\ \varepsilon_x^{(j)}; \sigma_x^{(j)} = 2\bar{C}_5\ \varepsilon_x^{(j)}; \sigma_y^{(j)} = 2\bar{C}_4\ \varepsilon_y^{(j)}; j = b, t. \quad (1)$$

Стільниковий заповнювач перетворено в еквівалентне ортотропне середовище за допомогою процедури гомогенізації [10]. В результаті такого моделювання розраховано матрицю закону Гука

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(c)} \\ \sigma_y^{(c)} \\ \sigma_z^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 & C_1 \\ C_2 & C_2 & C_2 \\ C_3 & C_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(c)} \\ \varepsilon_y^{(c)} \\ \varepsilon_z^{(c)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_y^{(c)} = C_4\ 2\varepsilon_y^{(c)}; \sigma_x^{(c)} =\ C_5\ 2\varepsilon_x^{(c)};\ \sigma_x^{(c)} = C_6\ 2\varepsilon_x^{(c)}. \quad (2)$$

Для опису напружено-деформованого стану оболонки скористаємось теорією зсуву високого порядку [11]. Переміщення точок верхнього та нижнього шарів оболонки в проєкціях на осі (x, y, z) представимо наступним чином:

$$u_1^{(i)} = u^{(i)} \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right) + z_i \phi_1^{(i)} + z_i^2 \varphi_1^{(i)};$$

$$u_2^{(i)} = v^{(i)} \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right) + z_i \phi_2^{(i)} + z_i^2 \varphi_2^{(i)}; u_3^{(i)} = w^{(i)}; i = t, b, \quad (3)$$

$$u_1^{(c)} = u^{(c)} \left(1 + \frac{z_c}{R_1}\right) + z_c \phi_1^{(c)} + z_c^2 \varphi_1^{(c)} + z_c^3 \gamma_1^{(c)};$$

$$u_2^{(c)} = v^{(c)} \left(1 + \frac{z_c}{R_2}\right) + z_c \phi_2^{(c)} + z_c^2 \varphi_2^{(c)} + z_c^3 \gamma_2^{(c)};$$

$$u_3^{(c)} = w^{(c)} + z_c w_1^{(c)} + z_c^2 w_2^{(c)},$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)} -$ проєкції переміщень точок серединних поверхонь шарів на координатні осі (x, y, z_i); $i = t, c, b$; $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні відповідного шару які є невідомими функціями, що слід визначити.

На верхній та нижній поверхнях оболонки виконуються наступні граничні умови:

$$\left.\varepsilon_x^{(t)}\right]_{z_t=0.5h_t} = \left.\varepsilon_y^{(t)}\right]_{z_t=0.5h_t} = \left.\varepsilon_x^{(b)}\right]_{z_b=-0.5h_b} = \left.\varepsilon_y^{(b)}\right]_{z_b=-0.5h_b} = 0, \quad (4)$$

де $\psi = x/R_1$; $\theta = y/R_2$;

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_1 \partial} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1}\right); \varepsilon_y^{(i)}$$
$$= \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_2 \partial} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2}\right); i = t, b.$$

Умови безперервності переміщень використаємо в наступній формі:

$$u_i^{(t)}(z_t = -0.5h_t) = u_i^{(c)}(z_c = 0.5h_c); u_i^{(b)}(z_b = 0.5h_b) = u_i^{(c)}(z_c = -0.5h_c); i = 1,2,3. \quad (5)$$

Розкладення (3) вводяться в умови (4), (5). В результаті отримано невідомі функції розкладень (3) в наступному вигляді:

$$\varphi_1^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\phi_1^{(t)} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial}\right); \varphi_2^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\phi_2^{(t)} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial}\right);$$
$$\varphi_1^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left[u^{(t)} + u^{(b)} - 2u^{(c)} + \frac{h_b}{2}\phi_1^{(b)} - \frac{h_t}{2}\phi_1^{(t)} + \frac{h_t^2}{4}\varphi_1^{(t)} + \frac{h_b^2}{4}\varphi_1^{(b)}\right];$$
$$\varphi_2^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left[v^{(t)} + v^{(b)} - 2v^{(c)} + \frac{h_b}{2}\phi_2^{(b)} - \frac{h_t}{2}\phi_2^{(t)} + \frac{h_t^2}{4}\varphi_2^{(t)} + \frac{h_b^2}{4}\varphi_2^{(b)}\right];$$
$$\gamma_1^{(c)} = \frac{2}{h_c^3}\left[u^{(t)} + u^{(b)} - u^{(c)}\frac{h_c}{R_1} - \frac{h_b}{2}\phi_1^{(b)} - \frac{h_t}{2}\phi_1^{(t)} + \frac{h_t^2}{4}\varphi_1^{(t)} - \frac{h_b^2}{4}\varphi_1^{(b)} - h_c\phi_1^{(c)}\right];$$
$$w_1^{(c)} = \frac{w^{(t)} - w^{(b)}}{h_c}; w_2^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left(w^{(t)} + w^{(b)} - 2w^{(c)}\right). \quad (6)$$

Розглянемо оболонку, яку защекнено за всім контуром ∂D. Граничні умови приймають наступної форми:

$$u^{(i)}\big|_{\partial} = v^{(i)}\big|_{\partial} = w^{(i)}\big|_{\partial} = \phi_1^{(i)}\big|_{\partial} = \phi_2^{(i)}\big|_{\partial} = 0; i = t, c, b. \quad (7)$$

Геометрично нелінійне деформування описується нелінійним зв'язком між деформаціями та переміщеннями. Загальний випадок таких співвідношень в криволінійних координатах описано в монографії [12]. Розкладення (3) введемо в ці геометрично нелінійні співвідношення. Збираючи доданки при однакових степенях z_i, отримаємо такі розкладення елементів тензора деформацій по степенях z_i:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \varepsilon_{1,0}^{(i)} + z_i k_{1,0}^{(i)} + z_i^2 k_{1,1}^{(i)} + z_i^3 k_{1,2}^{(i)};$$
$$\varepsilon_y^{(i)} = \varepsilon_{2,0}^{(i)} + z_i k_{2,0}^{(i)} + z_i^2 k_{2,1}^{(i)} + z_i^3 k_{2,2}^{(i)};$$
$$\varepsilon_x^{(i)} = \varepsilon_{1\ ,0}^{(i)} + z_i k_{1\ ,0}^{(i)} + z_i^2 k_{1\ ,1}^{(i)} + z_i^3 k_{1\ ,2}^{(i)};$$
$$\varepsilon_x^{(i)} = \varepsilon_{1\ ,0}^{(i)} + z_i k_{1\ ,0}^{(i)} + z_i^2 k_{1\ ,1}^{(i)} + z_i^3 k_{1\ ,2}^{(i)};$$
$$\varepsilon_y^{(i)} = \varepsilon_{2\ ,0}^{(i)} + z_i k_{2\ ,0}^{(i)} + z_i^2 k_{2\ ,1}^{(i)} + z_i^3 k_{2\ ,2}^{(i)}, i = t, c, b; \quad (8)$$
$$\varepsilon_z^{(c)} = \varepsilon_{3,0}^{(c)} + z_c k_{3,0}^{(c)},$$

де параметри розкладення мають надзвичайно громіздкий вигляд, тому не наводяться. Усі нелінійні доданки концентруються в складових при нульових степенях z_i. Доданки при ненульових степенях z_i є лінійними відносно проєкцій переміщень.

Для запису рівнянь руху тонкостінної конструкції скористаємося методом заданих форм, який дискретизує кінетичну та потенційну енергії. Потенційна енергія двох лицьових боків конструкції представляється у вигляді:

$$2U_i = \int_{V_i} \left(\sigma_{xx}^{(i)}\varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{yy}^{(i)}\varepsilon_{yy}^{(i)} + \sigma_{xy}^{(i)}\varepsilon_{xy}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)}\varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{yz}^{(i)}\varepsilon_{yz}^{(i)}\right)\left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right) R_1 R_2 d \qquad z_i;$$
$$i = t, b. \tag{9}$$

де V_i − об'єм, який займає шар оболонки. З урахуванням розкладень (8) та після інтегрування за z_i, співвідношення (9) набуває форми:

$$U_i = 0.5 \int_D \left(\Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(4)}\right) R_1 R_2 d \qquad ; i = t, b, \tag{10}$$

де D − область серединної поверхні;

$$\Pi_i^{(0)} = \overline{C}_1^{(0)} \varepsilon_{1,0}^{(i)2} + \overline{C}_2^{(0)} \varepsilon_{2,0}^{(i)2} + 2\overline{C}_1^{(0)} \varepsilon_{1,0}^{(i)} \varepsilon_{2,0}^{(i)} + 2\overline{C}_6^{(0)} \varepsilon_{1\ ,0}^{(i)2} + 2\overline{C}_5^{(0)} \varepsilon_{1\ ,0}^{(i)2} + 2\overline{C}_4^{(0)} \varepsilon_{2\ ,0}^{(i)2};$$

$$\Pi_i^{(2)} = \overline{C}_1^{(2)} \left[2k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)} + k_{1,0}^{(i)2} + \frac{2k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{1,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] +$$
$$+ \overline{C}_2^{(2)} \left[2k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)} + k_{2,0}^{(i)2} + \frac{2k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{2,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] +$$
$$2\overline{C}_1^{(2)} \left[k_{1,0}^{(i)}k_{2,0}^{(i)} + k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)} + k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)} + \frac{k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2}\right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2 R_1}\right] + 2\overline{C}_6^{(2)} \left[2k_{1\ ,1}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)} + k_{1\ ,0}^{(i)2} + \frac{2k_{1\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{1\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)}}{R_2} +\right.$$
$$\left.\frac{\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] + 2\overline{C}_5^{(2)} \left[k_{1\ ,0}^{(i)2} + 2k_{1\ ,1}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)} + \frac{2k_{1\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{1\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{1\ ,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] +$$
$$2\overline{C}_4^{(2)} \left[k_{2\ ,0}^{(i)2} + 2k_{2\ ,1}^{(i)}\varepsilon_{2\ ,0}^{(i)} + \frac{2k_{2\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{2\ ,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{2\ ,0}^{(i)}\varepsilon_{2\ ,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{2\ ,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right].$$

$$\overline{C}_i^{(k)} = \int_{-0.5h_t}^{0.5h_t} \overline{C}_i\, z_t^k dz_t; k = 0,1, \ldots$$

Розглянемо енергію гомогенізованого шару, який задовольняє закону Гука (2). Потенційну енергію представимо наступним чином:

$$U_c = 0.5 \int_{V_c} \left(\sigma_x^{(c)}\varepsilon_x^{(c)} + \sigma_y^{(c)}\varepsilon_y^{(c)} + \sigma_z^{(c)}\varepsilon_z^{(c)} + \sigma_x^{(c)}\varepsilon_x^{(c)} + \sigma_x^{(c)}\varepsilon_x^{(c)} + \sigma_y^{(c)}\varepsilon_y^{(c)}\right) \times$$

$$\left(1+\frac{z_c}{R_1}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_2}\right)R_1R_2d \qquad z_c.$$

Потенційна енергія гомогенізованого шару представляється у вигляді подвійного інтегралу таким чином:

$$U_c = 0.5\int_D \left(\Pi_c^{(0)}+\Pi_c^{(2)}+\Pi_c^{(4)}+\widetilde{U}_c^{(0)}+\widetilde{U}_c^{(2)}+\widetilde{U}_c^{(4)}\right)R_1R_2d \qquad , \tag{11}$$

де

$$\widetilde{U}_c^{(0)} = C_3^{(0)}\varepsilon_{3,0}^{(c)2}+2C_2^{(0)}\varepsilon_{2,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}+2C_1^{(0)}\varepsilon_{1,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)};$$

$$\widetilde{U}_c^{(2)} = C_3^{(2)}\left[k_{3,0}^{(c)2}+\frac{2k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_2}+\frac{2k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_1}+\frac{\varepsilon_{3,0}^{(c)2}}{R_2R_1}\right]+2C_2^{(2)}\left[k_{2,0}^{(c)}k_{3,0}^{(c)}+k_{2,1}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}\right.$$
$$+$$
$$\left.\frac{k_{2,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_1}+\frac{k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{2,0}^{(c)}}{R_1}+\frac{k_{2,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_2}+\frac{k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{2,0}^{(c)}}{R_2}+\frac{\varepsilon_{2,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_2R_1}\right]+2C_1^{(2)}\left[k_{1,0}^{(c)}k_{3,0}^{(c)}+k_{1,1}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}\right.$$
$$+$$
$$\left.\frac{k_{1,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_1}+\frac{k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{1,0}^{(c)}}{R_1}+\frac{k_{1,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_2}+\frac{k_{3,0}^{(c)}\varepsilon_{1,0}^{(c)}}{R_2}+\frac{\varepsilon_{1,0}^{(c)}\varepsilon_{3,0}^{(c)}}{R_2R_1}\right].$$

Кінетичні енергії шарів конструкції T_i мають вирази:

$$T_i = 0.5\int_{V_i}\rho_i\left(\dot{u}_1^{(i)2}+\dot{u}_2^{(i)2}+\dot{u}_3^{(i)2}\right)\left(1+\frac{z_i}{R_1}\right)\left(1+\frac{z_i}{R_2}\right)R_1R_2d \qquad z_i =$$

$$0.5\int_D\left(\lambda_0^{(i)}+\lambda_2^{(i)}+\lambda_4^{(i)}\right)R_1R_2d \qquad , i = t,c,b, \tag{12}$$

де ρ_i − густина матеріалу $i^{\text{го}}$ шару; $\dot{u}_1^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial}$. Параметри $\lambda_0^{(i)},\lambda_2^{(i)},\lambda_4^{(i)}$ для стільникового заповнювача приймають такий вигляд:

$$\lambda_0^{(c)} = \rho_c^{(0)}\left(\dot{u}^{(c)2}+\dot{v}^{(c)2}+\dot{w}^{(c)2}\right);$$

$$\lambda_2^{(c)} = \rho_c^{(2)}\left\{2\dot{u}^{(c)}\dot{\varphi}_1^{(c)}+\left(\frac{\dot{u}^{(c)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(c)}\right)^2+2\dot{v}^{(c)}\dot{\varphi}_2^{(c)}+\left(\frac{\dot{v}^{(c)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(c)}\right)^2+\right.$$
$$+2\dot{w}^{(c)}\dot{w}_2^{(c)}+\dot{w}_1^{(c)2}+\frac{1}{R_1R_2}\left(\dot{u}^{(c)2}+\dot{v}^{(c)2}+\dot{w}^{(c)2}\right)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\times$$
$$\left.\left[2\dot{u}^{(c)}\left(\frac{\dot{u}^{(c)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(c)}\right)+2\dot{v}^{(c)}\left(\frac{\dot{v}^{(c)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(c)}\right)+2\dot{w}^{(c)}\dot{w}_1^{(c)}\right]\right\};$$

$$\rho_i^{(k)} = \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i}\rho_i z_i^k dz_i;\ k = 0,1,\ldots$$

2. Рівняння нелінійних вимушених коливань. Вимушені нелінійні коливання оболонки розкладаються за власними формами лінійних коливань, тому дослідження лінійних коливань є важливим перед аналізом нелінійної системи. Для дослідження лінійних коливань застосуємо метод Релея–Рітца [13]. Лінійні коливання оболонки представимо таким чином:

$$\left[u^{(i)}; v^{(i)};\ w^{(i)}; \phi_1^{(i)}; \phi_2^{(i)}\ \right] =$$
$$= [U_i(x,y);\ V_i\ (x,y);\ W_i\ (x,y);\ X_i\ (x,y);\ \ Y_i\ (x,y)\ ]\ \cos(\omega\ ); \qquad (13)$$

де $i = b, c, t$; $\omega -$ частота лінійних коливань; $U_i(x,y), V_i(x,y), W_i(x,y), X_i(x,y), Y_i(x,y) -$ функції, що задовольняють граничним умовам (7), які необхідно знайти. Ці функції представимо в вигляді таких розкладень:

$$U_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x)\, U_y^{(j)}(y); V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\imath}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x)\, V_y^{(j)}(y);$$
$$W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x)\, W_y^{(j)}(y); X_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\imath}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x)\, F_y^{(j)}(y);$$
$$Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\imath}^{(f)} G_x^{(\mu)}(x)\, G_y^{(j)}(y), \qquad (14)$$

де $\mathbf{A} = \left(A_{t1}\ , A_{t1}\ , \dots, A_{bN_b^{(g)}L_b^{(g)}}\right) -$ вектор невідомих параметрів лінійних коливань, які представимо таким чином: $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{N_\square})$; $N_\square = \sum_{i=1}^{3} N_i^{(u)} L_i^{(u)} + N_i^{(v)} L_i^{(v)} + N_i^{(w)} L_i^{(w)} + N_i^{(f)} L_i^{(f)} + N_i^{(g)} L_i^{(g)}$;
$U_x^{(1)}(x), U_x^{(2)}(x), \dots, G_y^{\left(L_b^{(g)}\right)}(y) -$ базисні функції.

Для розрахунку власних частот та форм коливань конструкції співвідношення (13), (14) застосовані в методі Релея–Рітца.

Вимушені коливання конструкції збуджуються періодичною зосередженою силою, яку застосовано в точці з координатами $x = x_0; y = y_0$. Цю силу представимо таким чином: $F = F_0 \cos(\Omega\ )\, \delta(x - x_0, y - y_0)$, де $F_0, \Omega -$ амплітуда та частота збуджуючої сили; $\delta(x - x_0, y - y_0) -$ дельта-функція.

У цьому розділі виведено рівняння коливань оболонки при геометрично нелінійному деформуванні. Нелінійні коливання розкладаються за формами власних коливань, які розглянуто вище. Ці розкладення представимо таким чином:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_w(i-1)+j} W_{i,j}(x,y)\,; \phi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 1}} q_{3N_w+N_{\phi 1}(i-1)+j} X_{i,j}(x,y);$$
$$\phi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 2}} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+N_{\phi 2}(i-1)+j} Y_{i,j}(x,y); u^{(i)}$$
$$= \sum_{j=1}^{N_u} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+3N_{\phi 2}+N_u(i-1)+j} U_{i,j}(x,y);$$
$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+3N_{\phi 2}+3N_u+N_v(i-1)+j} V_{i,j}(x,y); i = 1, \dots, 3, \qquad (15)$$

де $W_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}, U_{i,j}, V_{i,j}$ − власні форми коливань; i – номер шару; j – номер власної форми; $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_{\square}})$; $N_{\square} = 3N_w + 3N_{\phi 1} + 3N_{\phi 2} + 3N_u + 3N_v$; $\mathbf{q}$ − вектор узагальнених координат.

Для отримання узагальнених сил обчислимо віртуальну роботу: $\delta = -\int_D F\ w^{(1)} d$. Узагальнена сила Q_j, яка відповідає узагальненій координаті $q_j; j = 1, \dots, N_w$, має такий вигляд: $Q_j = H_j \cos(\Omega\ )$, де $H_j = -F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)$.

Розкладення (15) підставляються в кінетичну та потенційну енергії (10)–(12). Кінетична енергія представляється у вигляді квадратичної форми відносно узагальнених швидкостей: $T_\Sigma = T_\Sigma(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_{\square}})$. Потенційна енергія конструкції може бути представлена таким чином:

$$U_\Sigma = U_\Sigma^{(2)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}}) + U_\Sigma^{(3)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}}) + U_\Sigma^{(4)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}}), \qquad (16)$$

де $U_\Sigma^{(2)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}})$ − квадратичні доданки відносно вектора узагальнених координат; $U_\Sigma^{(3)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}})$ − кубічні доданки відносно вектора узагальнених координат; $U_\Sigma^{(4)}(q_1, \dots, q_{N_{\square}})$ − доданки четвертого степеня відносно вектора узагальнених координат. З кінетичної та потенційної енергій конструкції випливають рівняння Лагранжа II типу, які мають таку матричну форму:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_1} & \mathbf{M_1} \\ \mathbf{M_2} & \mathbf{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K_1} & \mathbf{K_1} \\ \mathbf{K_2} & \mathbf{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} \\ \mathbf{q_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) \\ \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega\ ), \qquad (17)$$

де $\mathbf{H} = [H_1, \dots, H_{N_w}, 0, 0, \dots]$; $\mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}), \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2})$ − вектор-функції, які складаються з квадратичних поліномів відносно узагальнених координат; $\mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}), \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2})$ − вектор-функції кубічних поліномів. Оскільки лицьові шари конструкції є тонкими та густина гомогенізованої моделі стільникового заповнювача є малою, всі елементи матриць $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_2}$ є близькими до нуля. В подальшому аналізі ці доданки вважаються нульовими. Тоді динамічна система (17) представляється таким чином:

$$\mathbf{M_1}\ \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K_1}\ \mathbf{q_1} + \mathbf{K_1}\ \mathbf{q_2} + \mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = \mathbf{H} \cos(\Omega\ );$$
$$\mathbf{K_2}\ \mathbf{q_1} + \mathbf{K_2}\ \mathbf{q_2} + \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = 0. \qquad (18)$$

Розглянемо друге матричне рівняння. На першому етапі його розв’язання відкинемо нелінійні доданки та запишемо його розв’язок таким чином: $\mathbf{q_2} = \mathbf{R}\ _1; \mathbf{R} = -\mathbf{K_2^{-1}}\mathbf{K_2}$. Цей розв’язок введемо в друге рівняння (18). Отримані співвідношення представимо так: $\mathbf{q_2} = \mathbf{R}\ _1 + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1})$, де $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1}) = -\mathbf{K_2^{-1}}\left[\mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{R}\ _1) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q_1}, \mathbf{R}\ _1)\right]$. Цей розв’язок підставляється в перше матричне рівняння (18). В результаті отримано таку систему диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N_1} m_{i} \ddot{q}_j + \beta_i \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{N_1} K_{i} q_j$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_\nu^{(i)} q_\nu q_j + \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu\ j_1}^{(i)} q_\nu q_j q_{j_1} = H_i \cos(\Omega\ ), \qquad (19)$$

де $N_1 = \dim(\mathbf{q_1})$; m_{i} − елементи матриці мас; $K_1^{(\Sigma)} = \{K_{i}\}$ − матриця жорсткості, елементи якої знайдено з матричного рівняння $\mathbf{K_1^{(\Sigma)}} = \mathbf{K_1} - \mathbf{K_1}\ \mathbf{K_2^{-1}}\mathbf{K_2}$; $\alpha_\nu^{(i)}, \beta_{\nu\ j_1}^{(i)}$ − коефіцієнти нелінійних доданків динамічної системи.

Динамічну систему (19) представимо відносно безрозмірних змінних та параметрів:

$$\vartheta_j = \frac{q_j}{h_c};\ \tau = \omega_1 t;\ \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_1};\ \tau_1 = \bar{\Omega}\tau; \bar{m}_{i} = \frac{m_{i}}{m_0};\ \bar{\beta_i} = \frac{\beta_i}{m_0\omega_1^2};\ \bar{K}_{i}$$
$$= \frac{K_{i}}{m_0\omega_1^2};\ \bar{\alpha}_\nu^{(i)} = \frac{\alpha_\nu^{(i)} h_c}{m_0\omega_1^2};$$
$$\overline{\beta}_{\nu\ j_1}^{(i)} = \frac{\beta_{\nu\ j_1}^{(i)} h_c^2}{m_0\omega_1^2};\ \bar{H}_i = \frac{H_i}{m_0\omega_1^2 h_c} = \frac{F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)}{m_0\omega_1^2 h_c} = \bar{F}_0 W_{1,j}(x_0, y_0)\ ; m_0 =$$
$$= \rho_c h_c a\ , \qquad (20)$$

де ω_1 − перша власна частота коливань конструкції. Динамічна система (20) відносно безрозмірних змінних та параметрів набуває такого вигляду:

$$\bar{\Omega}^2 \sum_{j=1}^{N_1} \bar{m}_{i} \vartheta_j'' + \bar{\Omega}\bar{\beta_i}\vartheta_j' + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{K}_{i} \vartheta_j + \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu} \bar{\alpha}_\nu^{(i)} \vartheta_\nu \vartheta_j +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{j_1=1}^{j} \overline{\beta}_{\nu\ j_1}^{(i)} \vartheta_\nu \vartheta_j \vartheta_{j_1} = \bar{H}_i co\ (\tau_1). \qquad (21)$$

3. Чисельний аналіз лінійних коливань. Розглянемо результати чисельного моделювання лінійних коливань сферичної оболонки $(R_1 = R_2)$. Значення параметрів стільникового заповнювача є наступними (рис. 1,б)):

$$l_1 = 6.1054 \text{ мм}; l_2 = 3.0527 \text{ мм}; \theta = 60^\circ; l_c = 10 \text{ мм}; \bar{h}_c = 0.4 \text{ мм}, \qquad (22)$$

де $\bar{h}_c$ − товщина стінок чарунок; l_c − висота стільникового заповнювача. Гомогенізований ортотропний серединний шар має такі механічні характеристики:

$$E_1 = 2.91 \text{ МПа};\ E_2 = 2.91 \text{ МПа}; E_3 = 215.10 \text{ МПа};$$
$$\nu_1 = 0.972;\ \nu_2 = 0.0051; \nu_1 = 0.0042;\ G_1 = 1.118 \text{ МПа}; \qquad (23)$$
$$G_2 = 39.1 \text{ МПа}; G_1 = 39.1\ M\ ; \rho_c = 253.189\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Верхній та нижній шари конструкції виготовлено з вуглепластику. Його механічні характеристики є такими:

$$E_x = 160 \cdot 10^9 \text{Па};\ E_y = 6.8 \cdot 10^9 \text{Па};\ \nu_x = 0.32;\ \nu_y = 0.0136;$$
$$G_x = 800 \cdot 10^9 \text{ Па};\ G_x = G_y = 4 \cdot 10^9 \text{Па};\ \rho_t = \rho_b = 1400\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}. \qquad (24)$$

Геометричні параметри конструкції:

$$a = 0.22 \text{ м}; b = 0.33 \text{ м};\ R_1 = R_2 = 1 \text{ м};\ h_t = h_b = 10^{-3} \text{ м};\ h_c = 10^{-2} \text{ м}. \qquad (25)$$

Розглянемо конструкцію, яку защекнено по всьому контуру та яка задовольняє граничним умовам (7). Результати аналізу збіжності наведено в табл. 1. У першому стовпчику наведено кількість доданків в співвідношенні (14) та розмірність проблеми власних значень для розрахунку власних частот лінійних коливань. У всіх інших стовпчиках табл. 1 наведено результати аналізу збіжності перших дев'яти власних частот. При збільшенні числа доданків у розкладенні (14) власні значення зменшуються. У передостанньому рядку табл. 1 наведено результати розрахунку власних частот, які отримано методом скінченних елементів (МСЕ) в комерційній програмі ANSYS. В останньому рядку таблиці наведено відносну різницю результатів, які отримано МСЕ та методом Релея–Рітца з $N_i^{(u)} = 9$.

Таблиця 1 – Результати розрахунків власних частот

$N_i^{(u)}$	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
5; 375	1748.1	1963.9	2395.7	2581.3	2869.4	3423.1	3502.3	3988.4	4660.3
6 540	1721.9	1935.14	2368.81	2389.29	2789.49	3086.80	3287.72	3334.84	3703.30
7 735	1715.3	1899.5	2307.7	2352.4	2718.5	3000.4	3057.2	3253.7	3649.9
8 960	1701.9	1884.9	2288.5	2299.8	2695.7	2965.2	2971.8	3192.4	3549.3
9 1215	1699.8	1870.7	2268.3	2276.8	2653.7	2890.9	2956.7	3151.5	3530.2
МСЕ	1666.6	1808.4	2192.1	2218.	2590.7	2841.5	2860.9	3040.7	3470.8
δ	0.019	0.03	0.03	0.026	0.024	0.017	0.03	0.036	0.017

Досліджено залежність власних частот від радіусу кривизни сферичної оболонки $(R_1 = R_2)$. Результати розрахунків наведено в табл. 2, де наведено залежність перших дев'яти власних частот від радіусу кривизни оболонки. У першому стовпчику табл. 2 наведено радіус кривизни оболонки. В інших стовпчиках наведено власні частоти коливань конструкції. При зменшенні радіусу кривизни власні частоти збільшуються, що пов'язано зі зростанням жорсткості оболонкової конструкції.

Таблиця 2 – Залежність власних частот від радіуса кривизни сферичної оболонки $R_1 = R_2$, м

$R_1 = R_2$, м	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
1.0	1699.80	1870.73	2268.37	2276.88	2653.71	2890.95	2956.78	3151.56	3530.25
0.9	1807.82	1930.90	2307.66	2376.02	2716.98	2908.72	3042.34,	3181.22	3592.31
0.8	1937.14	2009.16	2358.72	2518.51	2801.99	2934.83	3158.05	3222.07	3639.41
0.7	2080.37,	2112.04	2455.87	2712.15	2919.25	2975.75	3280.59	3319.55	3656.00
0.6	2214.02	2247.18	2652.11	2983.18	3045.61	3085.39	3369.34	3553.70	3684.64

Досліджено оболонку в формі гіперболічного параболоїда $(R_1/R_2 = -1)$. Геометричні параметри стільникового заповнювача відповідають (22), а механічні характеристики гомогенізованого шару – (24). Ескіз оболонки наведено на рис. 2.

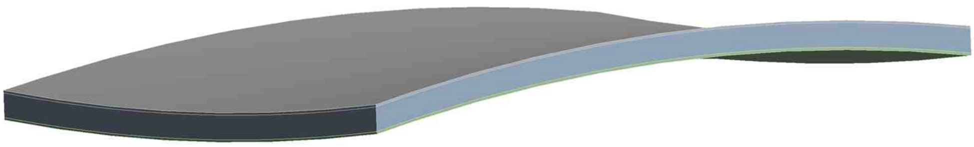


Рис. 2 – Оболонка у вигляді гіперболічного параболоїда

Проаналізовано збіжність власних частот коливань оболонки. Результати аналізу збіжності наведено в табл. 3. У першому стовпчику табл. 3 наведено параметри кількості доданків в розкладенні (14). В інших стовпчиках наведено перші дев’ять власних частот коливань. З табл. 3 випливає, що при збільшенні кількості доданків розкладення (14) власні частоти зменшуються. В шостому рядку табл. 3 наведено результати скінченно-елементного моделювання тришарової конструкції в комерційному програмному комплексі ANSYS. Відносна різниця власних частот, які отримано методом Релея–Рітца та МСЕ, наведено в останньому рядку табл. 3. Результати, які отримано різними методами, є близькими.

Таблиця 3 – Аналіз збіжності власних частот коливань

$N_i^{(u)}$	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
8	1616.63	1838.41	2211.49	2271.10	2613.03	2914.14	2961.51	3145.91	3465.41
9	1614.53	1824.26	2180.19	2259.83	2570.43	2880.51	2906.19	3103.84	3446.00
10	1607.04	1814.97	2176.02	2223.19	2562.48	2855.55	2868.39	3072.66	3388.94
11	1606.17	1808.04	2158.08	2218.79	2534.69	2825.36	2852.56	3046.47	3379.50
МСЕ	1573	1752	2089	2104	2424	2676	2706	2894	3283
δ	0.02	0.03	0.03	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.03

4. Чисельний аналіз нелінійних коливань в зоні основних резонансів. Дослідимо чисельно вимушені коливання при геометрично нелінійному деформуванні защекненої сферичної оболонки $(R_1 = R_2)$ зі стільниковим заповнювачем, який створено адитивними технологіями FDM. У цьому розділі досліджено вимушені коливання в зонах основних резонансів. Розглянемо вимушені нелінійні коливання, які описуються системою нелінійних диференціальних рівнянь (21). Для чисельного отримання цієї системи кількість доданків в рівнянні (15) дорівнювала $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 2$. Динамічна система (18) у цьому випадку має розмірність $N_{\square} = 30$. Редукована динамічна система (21) має 6 ступенів свободи. Дослідимо вимушені коливання конструкції, власні частоти якої наведено в табл. 2. Параметр збурюючого впливу $\bar{F}_0$ приймався $\bar{F}_0 = 0.003$. Поперечну збурюючу силу було застосовано в точці $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$.

Спочатку було досліджено сферичну оболонку з радіусами кривизни $R_1 = R_2 = 1$ м. Для дослідження нелінійних періодичних коливань застосовано поєднання методу продовження та методу пристрілки [12]. Отримані періодичні коливання динамічної системи (21) $\vartheta_j(\tau_1); j = 1, \dots, 6$ розкладено в ряд Фур’є. Результати гармонійного аналізу свідчать, що періодичні коливання в зонах основних резонансів є близькими до моногармонічних з переважанням першої гармоніки ряду Фур’є. Результати розрахунку коливань наведено на частотному відгуку (рис. 3), де показано залежність першої гармоніки ряду Фур’є періодичних коливань $\vartheta_1(\tau_1)$ від безрозмірної частоти $\bar{\Omega}$. Стійкі коливання зображено суцільною лінією, а нестійкі – пунктиром. Частотний відгук демонструє жорстку поведінку конструкції.

Досліджено збіжність результатів розрахунку періодичних коливань (рис. 3). Параметри розкладення (15) було прийнято такими: $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 3$. Динамічна система (18) має $N_{\square} = 45$ степенів свободи. Редукована динамічна система (21) має 9 степенів вільності. Результати розрахунку наведено маркерами на рис. 3. Близькість результатів розрахунків, отриманих різними методами, свідчить про збіжність розв’язків.

Слід зазначити, що значення поперечних переміщень $w^{(i)}$, які відповідають $\vartheta_1 \sim 12$, є невеликими. Оскільки $\max(W_{i,j}) \sim 0.01$, оцінка амплітуди поперечних переміщень має вигляд $w^{(i)} \sim 0.12 h_c$. Цей висновок є справедливим для всіх частотних відгуків, які наведено нижче.

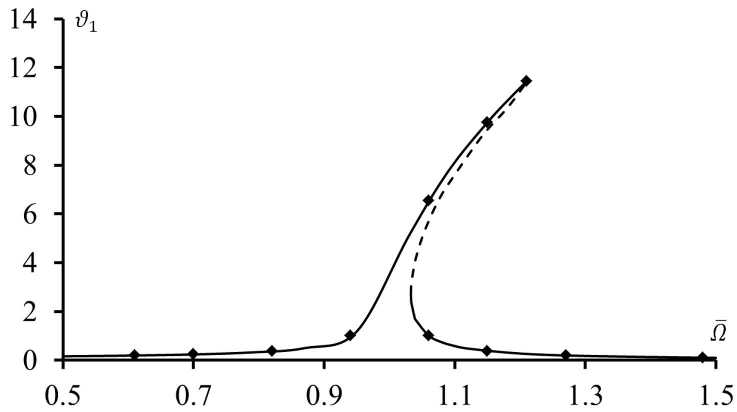


Рис. 3 – Частотний відгук нелінійних вимушених коливань сферичної оболонки з $R_1 = R_2 = 1$

Досліджено вплив кривизни сферичної оболонки $R_1 = R_2$ на результати розрахунків їхніх нелінійних коливань. Результати цього аналізу наведено на рис. 4, 5. На рис. 4 наведено два частотні відгуки, які отримано при $R_1 = R_2 = 1$ та $R_1 = R_2 = 0.8$, а на рис. 5 – частотні відгуки, які отримано при $R_1 = R_2 = 0.8$ та $R_1 = R_2 = 0.6$. Вздовж осі ординат на цих рисунках відкладається перша гармоніка ряду Фур’є періодичних коливань $\vartheta_1(\tau_1)$. Як видно з цих рисунків, при зменшенні радіусів кривизни конструкція стає жорсткішою, про що свідчить збільшення частот $\bar{\Omega}$ резонансних коливань при зменшенні $R_1 = R_2$. При зменшенні $R_1 = R_2$ спостерігається зменшення амплітуд резонансних періодичних коливань. Як свідчить проведене моделювання, при зміні радіусу кривизни конструкції якісна картина амплітудно-частотної характеристики поблизу резонансу не змінюється.

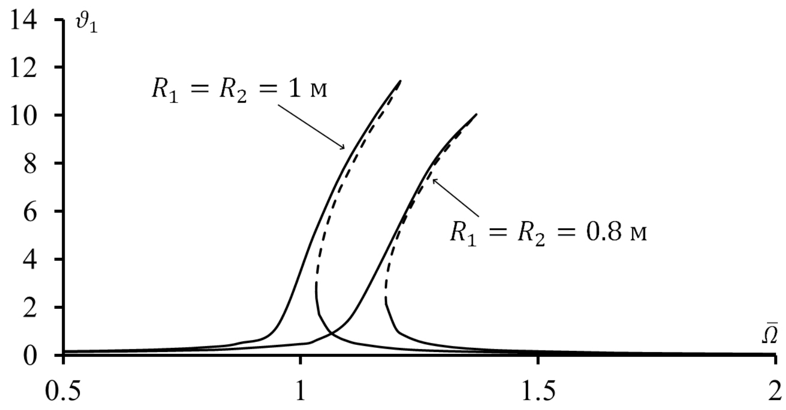


Рис. 4 – Частотні відгуки нелінійних вимушених коливань сферичних оболонок з $R_1 = R_2 = 1$ та $R_1 = R_2 = 0.8$

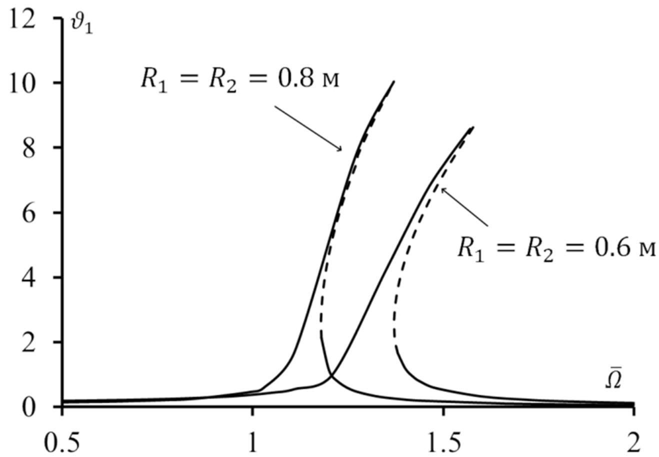


Рис. 5 – Частотні відгуки нелінійних вимушених коливань сферичних оболонок з $R_1 = R_2 = 0.8$ та $R_1 = R_2 = 0.6$

Розглянемо результати аналізу вимушених нелінійних коливань защекненої оболонки в формі гіперболічного параболоїда $(R_1/R_2 = -1)$. Лінійні коливання таких обобонок розглянуто в попередньому розділі статті. Для отримання моделі нелінійних коливань в розкладенні (15) приймались $N_w = N_{\phi1} = N_{\phi2} = N_u = N_v = 2$. Динамічна система (18) містить 30 степенів вільності, а редукована динамічна система (21) – 6 степенів вільності. Отриману динамічну систему було чисельно досліджено за алгоритмом продовження. Параметр збурюючого впливу приймався $\bar{F}_0 = 0.003$. Поперечну збурюючу силу було прикладено в точці $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$.

Результати розрахунків частотних відгуків наведено на рис. 6. Показано відгуки вимушених коливань для значень радіусів кривизни конструкції $R_1 = -R_2 = 0.6$ та $R_1 = -R_2 = 0.8$. Вздовж вісі ординат відкладено першу гармоніку ряду Фур'є узагальненої координати $\vartheta_1(\tau_1)$, а вздовж осі абсцисс – частоту збурюючого впливу $\bar{\Omega}$. Резонансні коливання конструкції є близькими до моногармонічних. У ряді Фур'є переважає перша гармоніка. Частотний відгук для конструкції при $R_1 = -R_2 = 0.6$ розташований правіше, оскільки ця конструкція є більш жорсткою, ніж конструкція з радіусом кривизни $R_1 = -R_2 = 0.8$. Резонансні амплітуди конструкції при

$R_1 = -R_2 = 0.8$ є більшими, ніж у конструкції з $R_1 = -R_2 = 0.6$. Частотні відгуки, які наведено на рис. 6, є жорсткими.

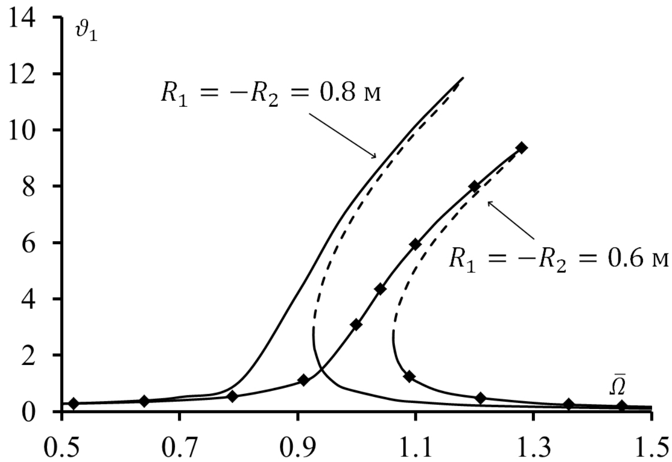


Рис. 6 – Частотні відгуки нелінійних вимушених коливань оболонки в формі гіперболічного параболоїда з $R_1 = -R_2 = 0.8$ та $R_1 = -R_2 = 0.6$

Досліджено збіжність отриманих розв'язків для конструкції при $R_1 = -R_2 = 0.6$. У розкладенні (15) приймалось $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 3$. Динамічна система (18) містить 45 степенів вільності, а редукована динамічна система (21) – 9 степенів вільності. Отриману динамічну систему було досліджено чисельно за допомогою алгоритмів продовження. Результати розрахунків наведені маркерами на рис. 6. Близькість результатів, які отримано розв'язанням задачі різної розмірності, свідчить про їхню збіжність.

Розглянемо вимушені коливання тришарової панелі з радіусами кривизни $R_1 = -R_2 = 0.6$ м, до якої прикладається зосереджена поперечна сила в точці $(x_0, y_0) = (b, a)/3$. Параметр збурюючої сили $F_0 = 0.009$. Результати розрахунку вимушених коливань наведено на рис. 7. Показано залежність поперечних переміщень верхнього шару $w^{(1)}$ в точці $(x_0, y_0) = (b, a)/2.5$ від частоти збурення. Частотний відгук містить дві седло-вузлові біфуркаційні точки S_1 и S_2. Частотний відгук має два екстремума, що свідчить про те, що в малому частотному діапазоні збурення міститься два резонанси. Це пов'язано з наявністю в конструкції двох близьких власних частот коливань $\omega_1 = 2038.74\ Гц$ та $\omega_2 = 2132.98\ Гц$.

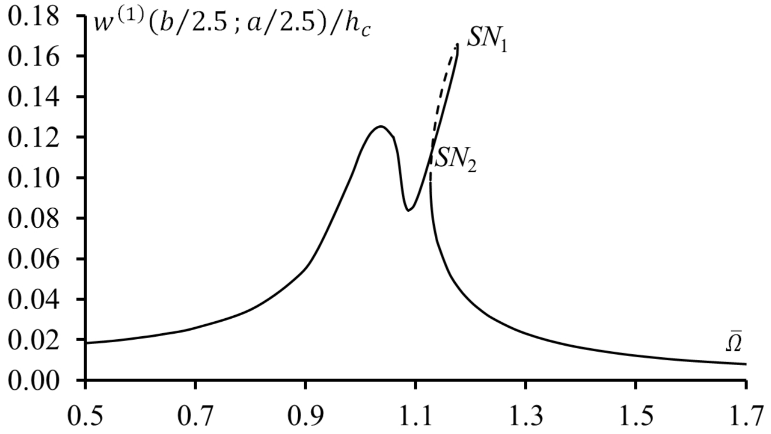


Рис. 7 – Частотний відгук тришарової оболонки при $F_0\ =\ 0.009$

При збільшенні параметру збурення до $F_0 = 0.09$ частотний відгук якісно змінюється. Його наведено на рис. 8.

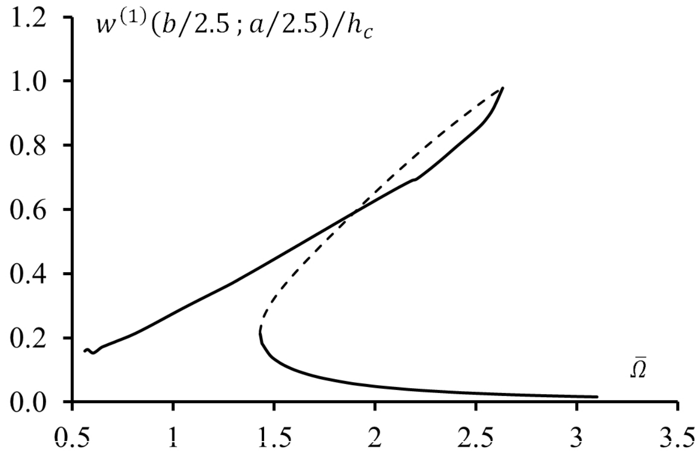


Рис. 8 – Частотний відгук тришарової панелі з с $R_1\ =\ -R_2\ =\ 0.6$ м та $F_0\ =\ 0.09$

Висновки. Отримано нову математичну модель нелінійних коливань тришарових оболонок подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем, який виготовлено адитивними технологіями FDM. Деформований стан оболонки описується теорією зсуву високого порядку. Динамічна поведінка кожного шару оболонки описується п’ятьма змінними (три проєкції переміщень та два кути обертання нормалі до серединної поверхні). Усього динамічна поведінка оболонки описується п’ятнадцятьма змінними.

За допомогою методу заданих форм отримано систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нелінійні коливання тришарових оболонок. Оскільки верхній та нижній шари є тонкими, а густина стільникового заповнювача – малою, частина матриці мас має елементи, які близькі до нуля. Внаслідок цього частина узагальнених координат має квазістатичну поведінку. Вони виражаються через інші узагальнені координати, які описують високочастотні коливання. Такий підхід дозволив скоротити розмірність динамічної системи, яка описує нелінійні коливання.

Для моделювання періодичних коливань чисельно досліджено отриману систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь за допомогою підходу, який поєднує метод продовження та метод пристрілки. В результаті отримано частотні відгуки коливань та досліджено біфуркації періодичних коливань.

З чисельного аналізу нелінійних коливань тришарових оболонок в широкому діапазоні значень радіусів кривизни конструкції випливає, що в області основних резонансів при застосуванні збурення в центрі тяжіння оболонки всі частотні відгуки є якісно близькими. Вони містять дві седло-вузлові біфуркаційні точки та характеризуються жорсткою поведінкою. Такі коливання є близькими до моногармонійних з переважаючою першою гармонікою ряду Фур'є. При зменшенні радіусів кривизни оболонки частотні відгуки зміщуються праворуч, а резонансні амплітуди зменшуються.

При застосуванні поперечного навантаження не в центрі тяжіння оболонки спостерігається інтенсивна взаємодія між формами власних коливань. Оскільки форми власних коливань мають близькі частоти, при малому значенні амплітуди збурення частотний відгук має два близьких екстремума в області основного резонансу. При значному підвищенні амплітуди збурення спостерігається один екстремум в області основного резонансу, який описує жорстку поведінку конструкції.

Дослідження було частково профінансовано Національним фондом досліджень України (номер договору 128/02.2020).

1. *Xu M, Liu D, Wang P, Zhang Z, Jia H, Lei H, Fang D.* In-plane compression behavior of hybrid honeycomb metastructures: Theoretical and experimental studies. Aerospace Science and Technology. 2020. Vol. 106. 106081. https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106081
2. *Chen Y, Li T, Jia Z, Scarpa F, Yao C, Wang L.* 3D printed hierarchical honeycombs with shape integrity under large compressive deformations. Materials & Design. 2018. Vol. 137. P. 226–234. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.10.028
3. *Parsons E. M.* Lightweight cellular metal composites with zero and tunable thermal expansion enabled by ultrasonic additive manufacturing: Modeling, manufacturing, and testing. Composite Structures. 2019. Vol. 223. 110656. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.031
4. *Matthews N.* Additive metal technologies for aerospace sustainment. Aircraft Sustainment and Repair. Elsevier, 2018. P. 845–862. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100540-8.00015-7
5. *Boparai K. S., Singh R.* Advances in fused deposition modeling. Reference Module in Materials Science and Materials Engineering. Elsevier, 2017. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.04166-7
6. *Karimiasla M., Ebrahimia F., Maheshb V.* Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. Thin-Walled Structures. 2019. Vol. 143. 106152. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.044
7. *Karimiasla M., Ebrahimia F.*. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. Thin-Walled Structures. 2019. Vol. 144. 106128. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.020
8. *Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R.* Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 510. 116283. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116283
9. *Quyen N. V., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D.* Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. Thin-Walled Structures. 2021. Vol. 162. 107571. https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571
10. *Catapano A., Montemurro M.* A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. Composite Structures. 2014. Vol. 118. P. 664–676. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057
11. *Reddy J. N.* A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME Journal of Applied Mechanics. 1984. Vol. 51. P. 745–752. https://doi.org/10.1115/1.3167719
12. *Amabili M.* Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials. Cambridge University Press, 2018. https://doi.org/10.1017/9781316422892
13. *Meirovitch L.* Fundamentals of Vibrations. Mc Graw Hill, 1970.

Отримано 19.09.2022,
в остаточному варіанті 25.11.2022