УДК 519.816 https://doi.org/10.15407/itm2022.02.077

В. М. МАМЧУК

ПОБУДОВА МУЛЬТИПЛІКАТИВНО-АДИТИВНОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ В ПРОСТОРІ КІЛЬКІСНИХ І ЯКІСНИХ ПОКАЗНИКІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРІОРИТЕТНОСТІ ПРОЄКТІВ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: 53mamval@gmail.com

Однією з основних задач організації наукової діяльності на конкурсній основі є удосконалення методів оцінювання та визначення пріоритетності науково-технічних проєктів. Рівень пріоритетності проєктів можна визначити за допомогою підходів, заснованих на методах багатокритеріальної теорії корисності (MAUT), розвитку якої присвячено багато наукових досліджень і публікацій. Незважаючи на велику кількість робіт з цієї проблематики, створення науково-обґрунтованого математичного інструментарію для полікритеріального оцінювання проєктів досі залишається актуальною і складною проблемою. Складність розробки методів визначення пріоритетності проєктів обумовлена труднощами побудови єдиної оціночної шкали, за допомогою якої вимірюється цінність показників проєктів, що мають різний фізичний зміст та різну розмірність. Тобто складною є структуризація переваг особи, що приймає рішення (ОПР), і формалізація вимірювань цих переваг. Складною також є задача побудови критеріально-цільової моделі, що адекватно відображає систему переваг ОПР у вигляді скалярної функції цінності, яку називають згорткою критеріїв, інтегральним критерієм або інтегральною функцією цінності (ІФЦ). Обчислювальні алгоритми, що базуються на методах MAUT, широко використовують процедури спільного шкалювання критеріїв, в яких застосовується операція заміщення одного показника якості іншим. Зазначені алгоритми мають роздільну силу, яка дорівнює одиниці, але оперують тільки з кількісними критеріями, що істотно звужує область їх застосування. Іншим недоліком цих алгоритмів є відсутність простих способів визначення функції цінності в точках байдужості (рівності переваг ОПР). Метою даної роботи є усунення зазначених недоліків в мультиплікативно-адитивній моделі ІФЦ. Для досягнення цієї мети було вирішено наступні задачі. Встановлено функціональні зв’язки між перевагами ОПР і показниками якості альтернатив, на підставі яких отримано аналітичні вирази для обчислення значень локальних функцій цінності в точках байдужості. Розроблено метод побудови мультиплікативно-адитивної згортки критеріїв для оцінювання і ранжирування альтернатив в просторі кількісних і якісних показників. Розроблено алгоритм визначення пріоритетності проєктів, що дозволяє ранжирувати альтернативи з роздільною силою, яка дорівнює одиниці. В роботі використовувалися методи теорії прийняття рішень, багатокритеріальної теорії корисності і вербального аналізу рішень. Отримані результати можуть бути використані при оцінюванні ефективності науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт, при конкурсному відборі проєктів і формуванні складу космічних програм в ракетно-космічній галузі.

Ключові слова: *кількісні та якісні критерії, функція цінності, згортка критеріїв, ранжирування альтернатив.*

One of the main problems in scientific activity organization on a competitive basis is to improve methods of R&D project evaluation and priority determination. The project priority level may be determined using approaches based on the multi-attribute utility theory (MAUT), whose development is the subject matter of many studies and publications. Despite of the large number of publications on the subject, the development of a scientifically substantiated mathematical apparatus for multicriteria project evaluation is still a topical and challenging problem. The complexity of the development of project priority determination methods is due to difficulties in the construction of a unified rating scale that would allow one to measure the value of project indices differing in physical content and dimension. That is, what is difficult is the structurization of a decision-making person (DMP)’s preferences and the formalization of preference evaluation. It is also difficult to construct a criterion-target model that would adequately represent the system of DMP preferences in the form of a scalar value function, which is termed a criteria convolution, an integral criterion, or an integral value function (IVF). MAUT-based computational algorithms widely use procedures of common criteria scaling, in which one quality index is replaced with another. Such algorithms have a resolution equal to one; however, they operate with quantitative criteria alone, thus significantly narrowing their application area. Another drawback of theirs is the lack of simple methods to determine the value function at indifference (DMP preference equality) points. The aim of this work is to eliminate these drawbacks in a multiplicative-additive IVF model. To do this, the following was done. Functional relationships between DMP preferences and alternative quality indices were established to give analytical expressions for evaluating local value functions at indifference points. A method was developed for constructing a multiplicative-additive criteria convolution to evaluate and rank alternatives in the space of quantitative and qualitative indices. An algorithm was developed to determine the priority of projects; the algorithm allows one to rank alternatives with a resolution equal to one. In this work, decision theory, multicriteria utility theory, and verbal decision analysis methods were used. The results obtained may be used in R&D efficiency evaluation, competitive project selection, and space program formation in the rocket space industry.

Keywords: *quantitative and qualitative criteria, value function, criteria convolution, alternative ranking.*

Дієвим способом управління розвитком космічної науки і техніки в Україні є розробка державних цільових програм з науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт на основі конкурсного відбору проєктів, що забезпечує максимальну ефективність реалізації пріоритетних напрямків досліджень і раціональне використання коштів державного бюджету [1]. Важливою задачею організації наукової діяльності на конкурсній основі є удосконалення методів оцінювання та визначення пріоритетності науково-технічних проєктів.

Рівень пріоритетності науково-технічних проєктів можна визначити за допомогою підходів, заснованих на методах багатокритеріальної теорії корисності, розвитку якої присвячено багато наукових досліджень. Опис найбільш відомих методів і прикладів їх застосування міститься в [2 – 6]. Основні властивості і порівняльні характеристики багатокритеріальних методів наведені в [7 – 9]. Незважаючи на велику кількість практичних напрацювань з цієї проблематики [10 – 17], створення науково-обґрунтованого математичного інструментарію і відповідних технологій для полікритеріального оцінювання проєктів є вельми актуальним.

Складність розробки методів визначення пріоритетності проєктів обумовлена труднощами побудови для множини критеріїв єдиної оціночної шкали, за допомогою якої вимірюють цінність показників, що мають різний фізичний зміст і різну розмірність [2 – 4, 17], тобто складною є задача структуризації переваг особи, що приймає рішення (ОПР), і формалізації вимірювань її цінностей. Складною також є задача побудови критеріально-цільової моделі, що адекватно відображає систему переваг ОПР. Проблемним етапом розробки такої моделі є формулювання оціночних правил і подання їх у вигляді скалярної функції, яку називають згорткою критеріїв, інтегральним критерієм або інтегральною функцією цінності (ІФЦ).

В залежності від особливостей критеріїв і їх взаємовпливів можливість представлення системи переваг ОПР аналітичним виразом визначається наборами певних умов і припущень. Існує кілька аксіом, за допомогою яких можна побудувати інтегральну функцію цінності в тій чи іншій формі. Найбільш загальною формою ІФЦ є нормальна форма, найбільш простою – адитивна [3]. Відомо, що чим жорсткішим вимогам задовольняють критерії, тим простішою є форма ІФЦ. Безумовно, однією з найбільш обмежувальних вимог є умова незалежності критеріїв по перевазі, яка забезпечує представлення ІФЦ в адитивній формі [2]. В разі якщо ця вимога не виконується, ІФЦ можна представити у формі мультиплікативно-адитивної згортки:

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \omega_k(u_k), \tag{1}$$

де φ – інтегральна функція цінності; $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор локальних критеріїв в просторі показників U^n; u_k – k-й локальний критерій (k-я компонента вектора u); n – кількість локальних критеріїв; $\omega_k(u_k)$ – дійсна додатна локальна функція цінності (ЛФЦ) для критерію $u_k \in u$.

Мультиплікативно-адитивна модель ІФЦ є менш обмежувальна, ніж адитивна. Вона допускає використання критеріїв, які мають певний вплив один на одного, та надає можливість враховувати певну взаємозалежність переваг

ОПР на заданій множині показників. Це розширює коло практичних задач, які можна вирішити за допомогою мультиплікативно-адитивної згортки, математична коректність якої забезпечується за умови незалежності критеріїв по приросту [3].

Визначення. Критерій u_k не залежить по приросту від інших критеріїв, якщо відносини переваги між приростами цього критерію не залежать від значень компонент вектора $u(\overline{k})$, де $u(\overline{k}) = (u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n)$ – доповнення критерію u_k.

Обчислювальні алгоритми, що базуються на методах багатокритеріальної теорії корисності, часто використовують підходи, в основі яких лежать процедури спільного шкалювання критеріїв, що застосовують операцію заміщення одного показника якості іншим [2 – 4, 18]. Зазначені алгоритми мають роздільну силу, яка дорівнює одиниці, але оперують тільки з кількісними критеріями, що істотно звужує область їх застосування. Іншим недоліком традиційних алгоритмів є відсутність простих способів визначення функції цінності в точках байдужості (еквівалентності по перевазі) [3]. Усунемо зазначені недоліки в мультиплікативно-адитивній моделі ІФЦ.

Метод побудови мультиплікативно-адитивної згортки критеріїв.

Етап 1. Виділимо області допустимих значень $[u_{k\,\min}, u_{k\,\max}] \subset U_k$ і задамо граничні значення u_k^0 і u_k^r для критеріїв u_k, $k = \overline{1,n}$:

- нехай буде $u_k^0 = u_{k\,\min}$, $u_k^r = u_{k\,\max}$ при $u_{k\,\min} \prec u_{k\,\max}$, якщо критерій задовольняє принципу «чим більше – тим краще»;

- нехай буде $u_k^0 = u_{k\,\max}$, $u_k^r = u_{k\,\min}$ при $u_{k\,\min} \succ u_{k\,\max}$, якщо критерій задовольняє принципу «чим менше – тим краще».

Тут і далі символ $\prec$ означає «менш прийнятний, ніж»; символ $\succ$ означає «більш прийнятний, ніж»; символ $\sim$ означає «еквівалентні по перевазі».

В результаті отримаємо вектори $u^0 = (u_1^0, u_2^0,..., u_n^0)$ і $u^r = (u_1^r, u_2^r,..., u_n^r)$, що характеризують нижню і верхню опорні ситуації [17].

Етап 2. Для обґрунтованого використання методу, що розглядається, способом, зазначеним у [3], перевіримо виконання умов незалежності по приросту всіх n локальних критеріїв, серед яких l кількісних і $n-l$ якісних критеріїв, де $l \geq 2$.

Перевірку незалежності критерію u_k можна здійснити шляхом опитування ОПР та виявлення її переваг при різних приростах цього критерію. Фіксуючи доповнення $u(\overline{k})$ на рівні $u'(\overline{k})$ і порівнюючи два приросту критерію u_k, ОПР визначає вид відношення між ними – переваги чи еквівалентності по перевазі. Якщо, на думку ОПР, це відношення зберігається при будь-якому іншому значенні $u''(\overline{k})$, то можна припустити, що u_k не залежить від доповнення $u(\overline{k})$. Для повної впевненості перевірку потрібно проводити в усьому діапазоні зміни критерію u_k, а щоб зменшити кількість перевірок рекомендується фіксувати компоненти векторів $u'(\overline{k})$ і $u''(\overline{k})$ на двох найбільш контрастних за якістю рівнях – на нижній і верхній опорних ситуаціях.

Природно, що така перевірка не є повною, але у більшості випадків їй можна довіряти. У разі порушення умов незалежності скористаємося рекомендаціями [17] і переформулюємо задачу так, щоб новий набір критеріїв не тільки зберігав найбільш суттєві для ухвалення рішень показники, але й задовольняв усім вимогам даного методу. Таким чином, перш ніж будувати інтегральний критерій (1), треба переконатися в справедливості умов незалежності по приросту критеріїв u_k, $k=\overline{1,n}$.

Етап 3. Для всіх $k=\overline{1,n}$ задамо початкові значення функцій $\omega_k(u_k)$:

$$\omega_k(u_k^0)=1 . \tag{2}$$

Тим самим встановимо початок відліку цінності так, що найгіршій альтернативі u^0 відповідатиме $\varphi(u^0)=n$. Задавати в (2) нульові значення ЛФЦ немає сенсу, оскільки при $\omega_1(u_1)=0$ інтегральний критерій (1) перетворюватиметься на нуль незалежно від інших значень $\omega_k(u_k)$, $k\neq 1$. У зв'язку з цим, в якості початкових значень ЛФЦ слід брати додатні числа.

Етап 4. Виберемо в якості базового критерію будь-який кількісний критерій і на його шкалі задамо одиницю виміру цінності. Оскільки те і інше можна робити довільно, вважатимемо базовим критерієм u_1. Попросимо ОПР зафіксувати таке значення u_1^1 критерію u_1, при якому, на її думку, вектор $(u_1^1,u_2^0,...,u_n^0)$ буде помітно краще за вектор $(u_1^0,u_2^0,...,u_n^0)$, але при цьому приріст $\Delta_1=\left|u_1^1-u_1^0\right|$ буде малий в порівнянні з модулем різниці $\left|u_{1\max}-u_{1\min}\right|$. Зафіксованому значенню u_1^1 поставимо у відповідність наступне значення функції $\omega_i(u_i)$:

$$\omega_1(u_1^1)=2 . \tag{3}$$

Вибір значення u_1^1 дозволяє встановити одиницю виміру ЛФЦ і шкалювати критерії на основі аналізу переваг ОПР (див. рис. 1).

Відповідно до мультиплікативно-адитивної форми інтегрального критерію (1) і в силу (2), (3) матимемо

$$\varphi(u_1^1,u^0(\bar{1}))=\omega_1(u_1^1)\left(1+\sum_{m=2}^{n}\prod_{i=2}^{m}\omega_i(u_i^0)\right)=2n , \tag{4}$$

де $u^0(\bar{1})=(u_2^0,u_3^0,...,u_n^0)$ – доповнення критерію u_1 у нижньої опорної ситуації.

Етап 5. Для кожного кількісного критерію u_i, $i=\overline{2,l}$, визначимо значення u_i^1, еквівалентне по перевазі значенню u_1^1, що забезпечить в цих точках рівність значень функції $\varphi(u)$: $\varphi(u_i^1,u^0(\bar{i}))=\varphi(u_1^1,u^0(\bar{1}))=2n.$

З цією метою застосуємо відомі прийоми квантифікації переваг ОПР [2, 18] і порівняємо два вектори $a=(u_1^1,u_i^0,u^0(\overline{1},\bar{i}))$ і $b=(u_1^0,u_i^1,u^0(\overline{1},\bar{i}))$.

Попросимо ОПР задати таке значення $u_i^1 \in (u_i^0, u_i^r]$ у векторі b, при якому, на її думку, буде справедливе відношення еквівалентності по перевазі, тобто $b \sim a$ (див. рис. 1):

$$(u_1^0, u_i^1, u^0(\bar{1}, \bar{i})) \sim (u_1^1, u_i^0, u^0(\bar{1}, \bar{i})), \; i = \overline{2, l} . \qquad (5)$$

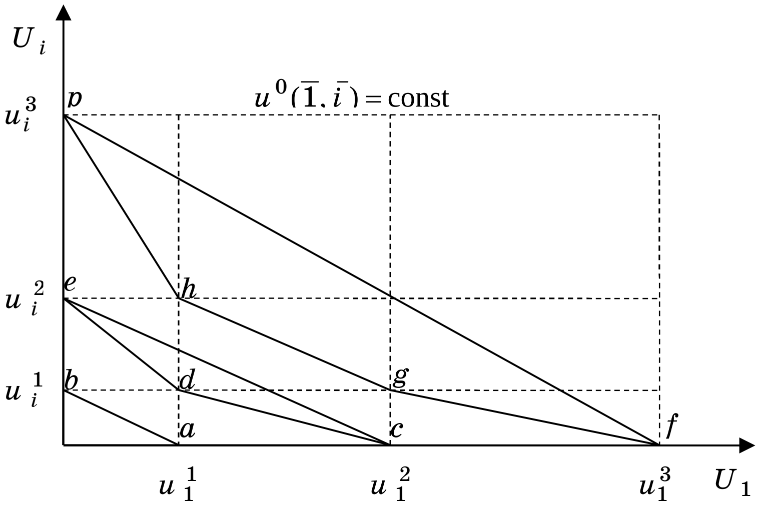

Рис. 1 – Шкалювання кількісних критеріїв u_i, $i = \overline{1, l}$.

Використовуючи форму інтегрального критерію (1), замінимо векторне відношення (5) його аналітичним аналогом

$$\sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=1}^{m} \omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^1) \sum_{m=i}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \omega_k(u_k^0) = \omega_1(u_1^1)\left(1 + \sum_{m=2}^{n} \prod_{k=2}^{m} \omega_k(u_k^0)\right). \qquad (6)$$

З рівняння (6) з урахуванням (2), (3) та (4) для всіх $i = \overline{1, l}$ отримаємо

$$\omega_i(u_i^1) = \left(2n - \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=1}^{m} \omega_k(u_k^0)\right) \Bigg/ \sum_{m=i}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \omega_k(u_k^0) = (2n + 1 - i)/(n + 1 - i). \; (7)$$

Із компонент векторів $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$ і $u^1 = (u_1^1, u_2^1, ..., u_l^1, u_{l+1}^0 ..., u_n^0)$ можна тепер сформувати нові пари векторів критеріїв та визначити значення u_i^2 з векторних рівнянь

$$(u_k^2, u_i^0, u^0(\bar{k}, \bar{i})) \sim (u_k^1, u_i^1, u^0(\bar{k}, \bar{i})), \; k, i = \overline{1, l}, \; i \neq k .$$

В подальшому це дозволить визначити шукані значення функції $\omega_i(u_i)$ в точках u_i^2, $i = \overline{1, l}$. Реалізуємо ці можливості на наступних етапах методу.

Етап 6. Визначимо компоненту u_1^2, еквівалентну по перевазі двом компонентам u_1^1, u_i^1. З цією метою запропонуємо ОПР порівняти два вектори $d = (u_1^1, u_i^1, u^0(\bar{1}, \bar{i}))$ і $c = (u_1^2, u_i^0, u^0(\bar{1}, \bar{i}))$. Попросимо ОПР призначити

$u_1^2 \in (u_1^1, u_1^r]$ у векторі c так, щоб було справедливе відношення $c \sim d$ (див. рис. 1):

$$(u_1^2, u_i^0, u^0(\overline{1}, \overline{i})) \sim (u_1^1, u_i^1, u^0(\overline{1}, \overline{i})), \ 2 \le i \le l \ . \qquad (8)$$

Замінимо векторне рівняння (8) його аналітичним аналогом

$$\omega_1(u_1^2)\left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) = \omega_1(u_1^1)\left(1 + \sum_{m=2}^{i-1}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^1)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=2\\k\ne i}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right).$$

Звідси з урахуванням (2) і (7) отримаємо

$$\omega_1(u_1^2) = \omega_1(u_1^1)\left(1 + \sum_{m=2}^{i-1}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^1)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=2\\k\ne i}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) \Bigg/ \left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) = 2[1 + i - 2 + (2n + 1 - i)(n + 1 - i)/(n + 1 - i)]/n = 4.$$

Етап 7. Для кожного кількісного критерію u_i визначимо значення u_i^2, еквівалентне по перевазі значенню u_1^2. Для цього розглянемо вектори $c = (u_1^2, u_i^0, u^0(\overline{1}, \overline{i}))$ і $e = (u_1^0, u_i^2, u^0(\overline{1}, \overline{i}))$. Попросимо ОПР призначити $u_i^2 \in (u_i^1, u_i^r]$ у векторі e так, щоб було справедливе відношення $e \sim c$ (див. рис. 1), тобто

$$(u_1^0, u_i^2, u^0(\overline{1}, \overline{i})) \sim (u_1^2, u_i^0, u^0(\overline{1}, \overline{i})), \ i = \overline{2, l} \ .$$

Представимо це відношення в аналітичному виді

$$\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^2)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m}\omega_k(u_k^0) = \omega_1(u_1^2)\left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right).$$

З останнього рівняння для всіх $i = \overline{1, l}$ отримаємо

$$\omega_i(u_i^2) = \left(4n - \sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) \Bigg/ \sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m}\omega_k(u_k^0) = (4n + 1 - i)/(n + 1 - i). \qquad (9)$$

Етап 8. Визначивши $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$, $u^1 = (u_1^1, u_2^1, ..., u_l^1, u_{l+1}^0 ..., u_n^0)$ і $u^2 = (u_1^2, u_2^2, ..., u_l^2, u_{l+1}^0 ..., u_n^0)$, з компонент цих векторів можна побудувати вектор $(u_k^2, u_i^1, u^0(\overline{k}, \overline{i}))$, сума верхніх індексів якого дорівнює трьом, та визначити для нього значення ІФЦ по відомих значеннях ЛФЦ в точках u_k^2 і

$u_i^1,\ i \neq k$. Потім з відношення $(u_k^3, u_i^0, u^0(\overline{k}, \bar{i})) \sim (u_k^2, u_i^1, u^0(\overline{k}, \bar{i}))$ можна визначити значення u_k^3 , еквівалентне по перевазі u_k^2 і u_i^1 .

Щоб вирішити цю задачу побудуємо пару векторів $g = (u_1^2, u_i^1, u^0(\overline{1}, \bar{i}))$ і $f = (u_1^3, u_i^0, u^0(\overline{1}, \bar{i}))$. Попросимо ОПР у векторі f задати таке значення $u_1^3 \in (u_1^2, u_1^r]$, при якому буде справедливо $f \sim g$ (див. рис. 1), тобто

$$(u_1^3, u_i^0, u^0(\overline{1}, \bar{i})) \sim (u_1^2, u_i^1, u^0(\overline{1}, \bar{i})),\ 2 \le i \le l\ . \tag{10}$$

Відношення (10) замінимо аналітичним аналогом

$$\omega_1(u_1^3)\left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) = \omega_1(u_1^2)\left(1 + \sum_{m=2}^{i-1}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^1)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=2\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right).$$

Звідси з урахуванням (2), (7) та (9) отримаємо

$$\omega_1(u_1^3) = \omega_1(u_1^2)\left(1 + \sum_{m=2}^{i-1}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^1)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=2\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right)\Bigg/$$

$$\Bigg/\left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right) = 4[1 + i - 2 + (2n + 1 - i)(n + 1 - i)/(n + 1 - i)]/n = 8.$$

Знайдемо значення інших компонент з верхнім індексом «три». А саме, для всіх $i = \overline{2, l}$ побудуємо вектори $f = (u_1^3, u_i^0, u^0(\overline{1}, \bar{i}))$ і $p = (u_1^0, u_i^3, u^0(\overline{1}, \bar{i}))$. У векторі p за допомогою ОПР визначимо компоненту $u_i^3 \in (u_i^2, u_i^r]$, еквівалентну по перевазі компоненті u_1^3 з відношення $p \sim f$, тобто

$$(u_1^0, u_i^3, u^0(\overline{1}, \bar{i})) \sim (u_1^3, u_i^0, u^0(\overline{1}, \bar{i})),\ i = \overline{2, l}\ . \tag{11}$$

Представимо векторне рівняння (11) в аналітичному виді

$$\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^3)\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0) = \omega_1(u_1^3)\left(1 + \sum_{m=2}^{n}\prod_{k=2}^{m}\omega_k(u_k^0)\right).$$

З останнього рівняння для всіх $i = \overline{1, l}$ отримаємо

$$\omega_i(u_i^3) = \left(8n - \sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)\right)\Bigg/\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0) = (8n + 1 - i)/(n + 1 - i). \tag{12}$$

Етап 9. Після визначення значень $\omega_i(u_i)$ в точках u_i^1 , u_i^2 і u_i^3 для всіх $i = \overline{1, l}$ аналогічно знайдемо $u_i^4, u_i^5, \ldots, u_i^{q_i}$ і відповідні їм значення ЛФЦ (вочевидь, що введені індекси q_i для різних i можуть відрізнятися в останніх точках $u_i^{q_i}$ на шкалах відліку різних критеріїв u_i). У випадку, якщо $u_i^{q_i}$ не співпадає з u_i^r , то на правій межі інтервалу зміни u_i значення ЛФЦ можна визначити шляхом апроксимації і екстраполяції функції $\omega_i(u_i)$ в точці u_i^r .

Для узагальнення отриманих результатів позначимо через t поточне значення верхнього індексу точки u_i^t , в якій потрібно визначити значення функції $\omega_i(u_i^t)$. Використовуючи введені позначення, перетворимо наведені вище формули в явні аналітичні вирази для обчислення значень ЛФЦ в точках u_i^t .

На підставі (7), (9), (12) та за допомогою методу математичної індукції для $t = \overline{1, q_i}$ отримаємо

$$\omega_i(u_i^t) = n\left(\frac{2^{t-1}\omega_1(u_1^1) - 1}{n + 1 - i}\right) + 1 . \qquad (13)$$

Вираз (13) є узагальненою формулою для кількісних критеріїв $u_i, i = \overline{1, l}$. За цією формулою легко знайти значення функції цінності $\omega_i(u_i^t)$ у будь-якій точці u_i^t , що визначається за допомогою ОПР з відношення байдужості. Найбільш простого вигляду формула (13) набирає для двох значень індексу i : коли $i = 1$ і $i = l = n$. Тобто

$$\omega_1(u_1^t) = 2^{t-1}\omega_1(u_1^1), \qquad (14)$$

$$\omega_n(u_n^t) = n[2^{t-1}\omega_1(u_1^1) - 1] + 1 . \qquad (15)$$

Встановлюючи в (13) значення $\omega_1(u_1^1) = 2$ (див. етап 4), для індексів $t = \overline{0, q_i}$ та $i = \overline{1, l}$ отримаємо:

$$\omega_i(u_i^t) = n\left(\frac{2^t - 1}{n + 1 - i}\right) + 1 . \qquad (16)$$

Аналогічно, при $\omega_1(u_1^1) = 2$ з (14), (15) для $t = \overline{0, q_i}$ отримаємо:

$$\omega_1(u_1^t) = 2^t , \qquad (17)$$

$$\omega_n(u_n^t) = n(2^t - 1) + 1 . \qquad (18)$$

Звідси видно, що в задачі з двома кількісними критеріями ($n = 2$) для обчислення значень ЛФЦ в усіх шуканих точках її визначення достатньо мати дві формули (17) і (18).

Етап 10. Побудуємо графіки функцій $\omega_i(u_i)$, $i = \overline{1, l}$, для кількісних критеріїв. З цією метою через знайдені точки $\omega_i(u_i^t)$, $i = \overline{1, l}$, проведемо гладкі криві або шляхом апроксимації цих точок отримаємо аналітичні вирази ЛФЦ.

Після побудови ЛФЦ для кількісних критеріїв далі побудуємо ЛФЦ для якісних критеріїв. При цьому слід мати на увазі, що вербальні значення якісних критеріїв $u_j^0, u_j^1, u_j^2, \ldots, u_j^{q_j}$ дискретні, фіксовані і заздалегідь відомі (задані у початкових даних).

Етап 11. Заданому значенню u_j^1 якісного критерію u_j, $j = \overline{l+1, n}$, поставимо у відповідність еквівалентне по перевазі значення $u_i^{1_j}$ кількісного критерію u_i $(1 \le i \le l)$. Для цього розглянемо два вектори $a = (u_i^0, u_j^1, u^0(\bar{i}, \bar{j}))$ і $b = (u_i^{1_j}, u_j^0, u^0(\bar{i}, \bar{j}))$. Попросимо ОПР у другому векторі задати таке значення $u_i^{1_j} \in (u_i^0, u_i^r]$ кількісного критерію u_i, при якому, на її думку, буде справедливе відношення байдужості $b \sim a$ (рис. 2), тобто

$$(u_i^{1_j}, u_j^0, u^0(\bar{i}, \bar{j})) \sim (u_i^0, u_j^1, u^0(\bar{i}, \bar{j})). \tag{19}$$

Вочевидь, відношення (19) матиме місце тільки якщо $u_i^0 < u_i^{1_j} \le u_i^r$, тобто коли $u_i^{1_j}$ лежатиме в області допустимих значень критерію u_i.

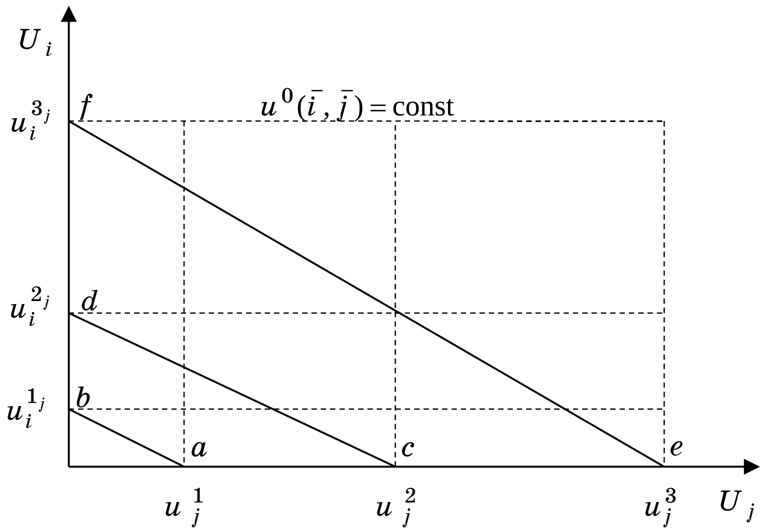

Рис. 2 – Шкалювання якісних критеріїв u_j, $j = \overline{l+1, n}$.

При виконанні цієї умови визначимо значення побудованої на етапі 10 локальної функції цінності $\omega_i(u_i)$ у точці $u_i^{1_j}$. Потім, використовуючи форму інтегрального критерію (1), замінимо векторне рівняння (19) його аналітичним аналогом

$$\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_i(u_i^{1_j})\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m}\omega_k(u_k^0) = \sum_{m=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0) + \omega_j(u_j^1)\sum_{m=j}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{m}\omega_k(u_k^0).$$

З цього рівняння з урахуванням (2) для всіх $j = \overline{l+1, n}$ отримаємо

$$\omega_j(u_j^1)=\left(\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_i(u_i^{1_j})\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0)-\sum_{m=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)\right)\Bigg/$$

$$\Bigg/\left(\sum_{m=j}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right)=[\omega_i(u_i^{1_j})(n+1-i)+i-j]/(n+1-j),\ 1\le i\le l. \tag{20}$$

Етап 12. Заданому значенню u_j^2 якісного критерію u_j, $j=\overline{l+1,n}$, поставимо у відповідність еквівалентне по перевазі значення $u_i^{2_j}$ кількісного критерію u_i ($1\le i\le l$). Для цього розглянемо два вектори $c=(u_i^0,u_j^2,u^0(\bar{i},\bar{j}))$ і $d=(u_i^{2_j},u_j^0,u^0(\bar{i},\bar{j}))$. Задамо у векторі d таке значення $u_i^{2_j}\in(u_i^{1_j},u_i^r]$ критерію u_i, при якому на думку ОПР буде справедливе відношення байдужості $d\sim c$ (див. рис. 2):

$$(u_i^{2_j},u_j^0,u^0(\bar{i},\bar{j}))\sim(u_i^0,u_j^2,u^0(\bar{i},\bar{j})). \tag{21}$$

Дотримуючись умови $u_i^{1_j}<u_i^{2_j}\le u_i^r$ і використовуючи ЛФЦ, побудовану на етапі 10, визначимо значення $\omega_i(u_i)$ в точці $u_i^{2_j}$. Після цього запишемо відношення байдужості (21) в аналітичному виді

$$\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_i(u_i^{2_j})\sum_{m=i}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0)=\sum_{m=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_j(u_j^2)\sum_{m=j}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\omega_k(u_k^0).$$

З останнього рівняння з урахуванням (2) для всіх $j=\overline{l+1,n}$ отримаємо

$$\omega_j(u_j^2)=[\omega_i(u_i^{2_j})(n+1-i)+i-j]/(n+1-j),\ 1\le i\le l. \tag{22}$$

У разі порушення умови $u_i^{1_j}<u_i^{2_j}\le u_i^r$ замінимо у векторі d компоненту u_j^0 на компоненту u_j^1 (метою такої заміни є забезпечення належності $u_i^{2_j}$ області допустимих значень критерію u_i). Після заміни компоненти попросимо ОПР задати значення $u_i^{2_j}\in(u_i^0,u_i^r]$, при якому, на її думку, буде справедливо

$$(u_i^{2_j},u_j^1,u^0(\bar{i},\bar{j}))\sim(u_i^0,u_j^2,u^0(\bar{i},\bar{j})). \tag{23}$$

Знайшовши з відношення (23) точку $u_i^{2_j}$, значення $\omega_i(u_i)$ в цій точці отримаємо за допомогою побудованої на етапі 10 ЛФЦ. Потім представимо (23) в аналітичному виді і визначимо функцію $\omega_j(u_j)$ в точці u_j^2

$$\sum_{m=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_i(u_i^{2_j})\left(\sum_{m=i}^{j-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_j(u_j^1)\sum_{m=j}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{m}\omega_k(u_k^0)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{m}\omega_k(u_k^0)+\omega_j(u_j^2)\sum_{m=j}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\omega_k(u_k^0).$$

З цього рівняння з урахуванням (2) для всіх $j=\overline{l+1,n}$ матимемо

$$\omega_j(u_j^2)=\{\omega_i(u_i^{2_j})[\omega_j(u_j^1)(n+1-j)+j-i]+i-j\}/(n+1-j),\quad 1\le i\le l. \quad (24)$$

Узагальнюючи отримані результати, дамо універсальну формулу для визначення ЛФЦ в довільних точках байдужості. Позначимо через u_j^t і $u_i^{t_j}$ – поточне значення j-го якісного та відповідне значення i-го кількісного критеріїв у відносинах байдужості, де $t=\overline{1,q_j}$. З вище наведеного видно, що відносини байдужості (21) і (23), що використовуються при пошуку $u_i^{2_j}$, відрізняються набором компонент в лівих частинах цих відносин. Враховуючи це, векторні відносини байдужості (21), (23), а також (19) для всіх $j=\overline{l+1,n}$ в заданих позначеннях можна представити одним виразом

$$(u_i^{t_j},u_j^h,u^0(\bar{i},\bar{j}))\sim(u_i^0,u_j^t,u^0(\bar{i},\bar{j})),\ 0\le h<t,\ 1\le i\le l, \quad (25)$$

де h – порядковий номер заданого значення u_j^h якісного критерію u_j, що забезпечує належність точки $u_i^{t_j}$ області допустимих значень кількісного критерію u_i.

Замінимо рівняння (20), (22) і (24) для всіх $j=\overline{l+1,n}$ єдиною формулою

$$\omega_j(u_j^t)=\{\omega_i(u_i^{t_j})[\omega_j(u_j^h)(n+1-j)+j-i]+i-j\}/(n+1-j), \quad (26)$$

де $u_i^{t_j}\in(u_i^0,u_i^r],\ 0\le h<t,\ 1\le i\le l$.

Таким чином, у точці u_j^0 маємо $\omega_j(u_j^0)=1$ (див. етап 3), а у будь-якій іншій точці u_j^t, $t=\overline{1,q_j}$, значення функції $\omega_j(u_j)$ можна визначити за універсальною формулою (26) на основі загального відношення байдужості (25). Скористаємося цим на наступних етапах методу і, зокрема, при визначенні значення $\omega_j(u_j^3)$.

Етап 13. Побудуємо векторне рівняння $f\sim e$ (рис. 2). Потім за допомогою ОПР знайдемо таке значення $u_i^{3_j}$, при якому, на її думку, для векторів f і e буде справедливе відношення байдужості (25), тобто

$$(u_i^{3_j},u_j^h,u^0(\bar{i},\bar{j}))\sim(u_i^0,u_j^3,u^0(\bar{i},\bar{j})),\ 0\le h<3,\ 1\le i\le l. \quad (27)$$

Вочевидь, що в процесі визначення $u_i^{3_j}$ може виникнути ситуація, в якій обмеження, що накладається на цю величину, порушуватиметься. Наприклад, в лівій частині (27) для u_j^0 може не існувати відповідного значення $u_i^{3_j}$, що лежить в $(u_i^0, u_i^r]$ і забезпечує еквівалентність по перевазі векторів f і e. У подібних випадках діятимемо наступним чином. Якщо компонента u_j^h не забезпечує належність $u_i^{3_j} \in (u_i^0, u_i^r]$, будемо збільшувати h в межах від нуля до двох, поки не доб'ємося виконання цієї умови. Таким чином, зазначену проблему можна вирішити заміною і підбором відповідної компоненти u_j^h.

Визначивши $u_i^{3_j}$ з дотриманням накладених обмежень, за допомогою побудованої на етапі 10 ЛФЦ знайдемо значення $\omega_i(u_i^{3_j})$. Підставимо це значення у формулу (26) і визначимо шукану величину $\omega_j(u_j^3)$:

$$\omega_j(u_j^3) = \{\omega_i(u_i^{3_j})[\omega_j(u_j^h)(n+1-j)+j-i]+i-j\}/(n+1-j),$$

де $u_i^{3_j} \in (u_i^0, u_i^r]$, $0 \le h < 3$, $1 \le i \le l$.

Виконаємо зазначені операції для всіх $j = \overline{l+1, n}$.

Етап 14. Після обчислення значень $\omega_j(u_j)$ в точках u_j^1, u_j^2 і u_j^3, $j = \overline{l+1, n}$, знайдемо аналогічно значення ЛФЦ в усіх інших точках визначення $u_j^4, u_j^5, \ldots, u_j^{q_j}$.

Етап 15. За знайденими значеннями ЛФЦ побудуємо графіки дискретних функцій $\omega_j(u_j)$, $j = \overline{l+1, n}$, для якісних критеріїв.

Етап 16. Побудуємо інтегральний критерій для оцінювання альтернатив за кількісними і якісними критеріями

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m \le l} \omega_i(u_i) \prod_{j=l+1}^{m > l} \omega_j(u_j) \right), \tag{28}$$

де $\omega_i(u_i)$ – ЛФЦ кількісного критерію u_i, що визначається за формулою (13) або (16), або за побудованим на етапі 10 графіком; $\omega_j(u_j)$ – ЛФЦ якісного критерію u_j, що визначається за формулою (26) або за побудованим на етапі 15 графіком; $\sum_{m_1}^{m_2}$ и $\prod_{m_1}^{m_2}$ – оператори суми і добутку, що мають силу тільки при $m_2 \ge m_1$.

Отримана згортка критеріїв є комбінацією n функцій однієї змінної, які значно простіші, ніж функція багатьох змінних – ІФЦ нормального виду [3]. Отже якщо локальні критерії задовольняють умові незалежності по приросту, то інтегральний критерій доцільно представляти в мультиплікативно-адитивній формі. Зауважимо, що мультиплікація значень n локальних функцій (28) часто призводить до великих значень інтегральної функції. Цю проблему можна вирішити заміною функції $\varphi(u)$ на стратегічно еквівалентну функцію $\psi(u)$ [2].

Визначення. Якщо дві функції цінності $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ однаково упорядковують по перевазі будь-які пари векторів критеріїв $u', u'' \in U^n$, то ці функції стратегічно еквівалентні: $\varphi(u) \sim \psi(u)$.

Стратегічно еквівалентну функцію можна отримати монотонним перетворенням однієї функції в іншу. Наприклад, скориставшись перетворенням $\psi(u) = \varphi(u)/c$, де $c > 0$, можна як завгодно зменшити значення ІФЦ, підібравши відповідне значення c. Застосування функції $\psi(u)$ замість функції $\varphi(u)$ ранжирування альтернатив не поміняє. На практиці зручно користуватися перетворенням $\psi(u) = [\varphi(u)/n - 1]/c$, де n – кількість критеріїв, $c > 0$, яке не лише зменшує ІФЦ, але і поміщає початок відліку цінності в нульову точку $\psi(u^0) = 0$.

Визначення пріоритетності проєктів. За допомогою експертів охарактеризуємо проєкти. Тобто кожному проєкту поставимо у відповідність вектор оцінок, використовуючи шкали локальних критеріїв. Для компонентів цього вектору визначимо значення відповідних ЛФЦ (наприклад, за графіками, що побудовані на етапах 10 і 15). Підставивши ці значення в згортку (28), отримаємо інтегральну оцінку цінності альтернативи за сукупністю усіх локальних критеріїв – значення ІФЦ для окремого проєкту. Після оцінювання усіх проєктів за формулою (28) проведемо їх ранжирування, тобто розставимо їх у ряд в порядку зменшення значень ІФЦ. На підставі цього ранжирування визначимо рівень пріоритетності кожного проєкту по його порядковому номеру в побудованому ряду.

Основні результати і висновки.

1. Отримано аналітичні вирази для визначення значень локальних функцій цінності в точках байдужості.
2. Розроблено метод побудови мультиплікативно-адитивної згортки критеріїв в просторі кількісних і якісних показників для ранжирування альтернатив з роздільною силою, що дорівнює одиниці.
3. Мультиплікативно-адитивна згортка критеріїв є ефективним інструментом для багатокритеріального оцінювання альтернатив. Усі операції з переробки інформації, що застосовуються в процесі побудови критеріально-цільової моделі, є психологічно коректними і доступними для людини.
4. Послаблення вимог щодо умов незалежності, спільне шкалювання критеріїв в просторі кількісних і якісних показників та аналітичне представлення значень ЛФЦ в точках байдужості значно розширюють можливості практичного застосування запропонованого методу.
5. Отримані результати можуть бути використані при техніко-економічному обґрунтуванні науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт, при конкурсному відборі проєктів і формуванні програм наукових досліджень в ракетно-космічній галузі.

1. *Пилипенко О. В., Переверзев Е. С., Алпатов А. П., Марченко В. Т., Хорольський П. П., Печеневская О. К.* Эффективность научно-технических проектов и программ. Днепропетровск: Пороги, 2008. 509 с.

2. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
3. *Николаев В. И., Брук В. М.* Системотехника: методы и приложения. Л.: Машиностроение, 1985. 199 с.
4. *Петровский А. Б.* Теория принятия решений. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 400 с.
5. *Тоценко В. Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. К.: Наукова думка, 2002. 381 с.
6. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. 208 с.
7. *Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.* Системный анализ стратегических решений в инноватике. Математические, эвристические и интеллектуальные методы системного анализа и синтеза инноваций. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 304 с.
8. *Подиновский В. В., Потапов М. А.* Методы анализа и системы поддержки принятия решений: учебное пособие (МФТИ). М.: Спутник плюс, 2003. 329 с.
9. *Лотов А. В., Поспелова И. И.* Многокритериальные задачи принятия решений: учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
10. *Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.* Методология, методы и цифровые технологии принятия управленческих решений для повышения качества оптимизационных моделей ракетно-космической промышленности. М.: РИОР, 2019. 418 с. https://doi.org/10.29039/02019-7
11. *Voronin A.* Multi-criteria evaluation of Space Activity Projects. International Journal «Information Technologies & Knowledge». 2014. V. 8, No 1. P. 14–21.
12. *Petrovsky A., Boychenko V., Zaboleeva-Zotova A., Shitova T.* Multi-Criteria Methods of Competitive Selection of Projects in the Science Foundation. International Journal «Information Technologies & Knowledge». 2015. V. 9, No 1. P. 59–71.
13. *Лисецкий Ю. М., Снитюк В. Е.* Формирование интегрального критерия эффективности в задачах выбора оптимального проектного варианта. Математичні машини і системи. 2015. № 1. С. 157–163.
14. *Руденко С. В., Гловацкая С. Н.* Модель формирования портфеля проектов международной деятельности вуза. Вісник НТУ «ХПІ». 2016. № 2 (1174). С. 36–40. https://doi.org/10.20998/2413-3000.2016.1174.8
15. *Семенов С. С., Харчев В. Н., Иоффин А. И.* Оценка технического уровня образцов вооружения и военной техники. М.: Радио и связь, 2004. 552 с.
16. *Безрук В. М., Чеботарева Д. В., Скорик Ю. В.* Многокритериальный анализ и выбор средств телекоммуникаций. Харьков: Компания СМИТ, 2017. 268 с.
17. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах. М.: Логос, 2006. 392 с.
18. *Мамчук В. М.* Визначення пріоритетності науково-технічних проектів за допомогою алгоритму шкалювання критеріїв. Технічна механіка. 2020. № 1. С. 91–105. https://doi.org/10.15407/itm2019.04.091

Отримано 18.03.2022,
в остаточному варіанті 11.04.2022