УДК 537.84

Н. Ф. ПАЦЕГОН, С. И. ПОЦЕЛУЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ФЕРРОЖИДКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ И МЕХАНИЧЕСКИХ ВИБРАЦИЙ

Рассмотрена устойчивость слоя вязкой нелинейно намагничивающейся феррожидкости в произвольно ориентированном к свободной поверхности нестационарном однородном магнитном поле при наличии механических вибраций слоя. В случае магнитного поля, состоящего из постоянной и гармонически изменяющейся со временем частей, при условии рациональности отношений частот электромагнитных и вибрационного воздействий, задача приводится к исследованию бесконечной системы линейных уравнений для коэффициентов ряда Фурье амплитуды возмущений свободной поверхности феррожидкости. Матрица этой системы представляет квадратичный пучок известных матриц, параметром которого выступает амплитуда параметрического воздействия. Задача сведена к линейной спектральной задаче, в которой амплитуда параметрического воздействия является собственным значением. Определены нейтральные кривые устойчивости, установлено, что изменение угла ориентации магнитного поля и увеличение его стационарной составляющей может приводить к возникновению бикритических точек и переходу от гармонических к субгармоническим колебаниям. Влияние стационарного наклонного магнитного поля на критическую амплитуду механических вибраций носит немонотонный характер и зависит не только от ориентации магнитного поля, но и от толщины слоя жидкости. Уменьшение толщины слоя феррожидкости приводит к повышению порога возникновения параметрической неустойчивости и к возбуждению на ее поверхности волн меньшей длины при потере устойчивости. Исследованы различия вибрационного и электромагнитного механизмов в развитии параметрической неустойчивости свободной поверхности, обусловленные двухчастотной модуляцией магнитного поля.

Розглянуто стійкість шару в'язкої нелінійно намагнічуваної ферорідини в довільно орієнтованому до вільної поверхні нестаціонарному однорідному магнітному полі при наявності механічних вібрацій шару. У випадку магнітного поля, що складається з постійної і гармонійно змінюваної з часом частин, за умови раціональності співвідношень частот електромагнітних і вібраційного впливів, задача зводиться до дослідження нескінченної системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів ряду Фур'є амплітуди збурень вільної поверхні ферорідини. Матриця цієї системи представляє квадратичний пучок відомих матриць, параметром якого виступає амплітуда параметричного впливу. Задача зведена до лінійної спектральної задачі, в якій амплітуда параметричного впливу є власним значенням. Визначено нейтральні криві стійкості, встановлено, що зміна кута орієнтації магнітного поля і збільшення його стаціонарної складової може призводити до виникнення бікритичних точок і переходу від гармонічних до субгармонічних коливань. Вплив стаціонарного нахиленого магнітного поля на критичну амплітуду механічних вібрацій носить немонотонний характер і залежить не тільки від орієнтації магнітного поля, а й від товщини шару рідини. Зменшення товщини шару ферорідини призводить до підвищення порогу виникнення параметричної нестійкості і до збудження на її поверхні хвиль меншої довжини при втраті стійкості. Досліджено відмінності вібраційного і електромагнітного механізмів у розвитку параметричної нестійкості вільної поверхні, обумовлені двочастотною модуляцією магнітного поля.

The stability of a layer of a viscous nonlinearly magnetizing ferrofluid in the non-stationary uniform magnetic field oriented arbitrary to a free surface is considered with provision for the mechanical vibrations of the layer. In case of the magnetic field composing of a constant portion and a harmonically time-varied portion, providing the rationality of relations between electromagnetic frequencies and those of the vibratory effects, the problem reduces to the study of an infinite system of the linear equations for the Fourier series of the amplitude of disturbances of a free surface of the ferrofluid. The matrix of this system is a square bunch of the known matrices whose parameter is the amplitude of the parametric effects. The problem is reduced to a linear spectral problem in which the amplitude of the parametric effects is the eigenvalue. Neutral curves of the stability are found. It is established that variations in angle of orientation of the magnetic field and an increase in its stationary component may result in the bicritical points and the transfer from the harmonic oscillation to the subharmonic oscillation. The effects of the stationary inclined magnetic field on a critical amplitude of the mechanical vibrations are nonmonotonic and depend on not only the orientation of the magnetic field but on the thickness of the fluid layer. A decrease in the thickness of the ferrofluid layer can result in an increase in the threshold of the initiation of a parametric instability and excitation of waves of a lower length at its surface when losing the stability. Distinctions of the vibratory and electromagnetic mechanisms in evolution of the parametric instability of a free surface resulted from two-frequency modulation of the magnetic field are studied.

Ключевые слова: *параметрический резонанс, осциллирующее магнитное поле, механические вибрации, магнитная жидкость.*

Введение. Ферромагнитные жидкости, движением которых можно управлять внешним магнитным полем, находят широкое применение в различных областях науки и техники [1]. Среди наиболее распространенных технических приложений следует отметить магнитожидкостные уплотнители, герметизаторы и сепараторы. Слой феррожидкости, пребывая в контакте с агрессивными жидкостями или газами, позволяет изолировать окружающую среду от влияния этих опасных веществ. В связи с широкой распространенностью в технике периодических воздействий различной природы (колебания температуры, механические вибрации, звуковые и электромагнитные поля и т. д.), исследование устойчивости поверхности раздела магнитной жидкости, в частности устойчивости свободной поверхности, в однородных нестационарных полях представляется актуальной задачей.

Наиболее часто рассматриваемой системой является безграничный в горизонтальном направлении слой феррожидкости, контактирующий сверху с жидкой или газообразной немагнитной средой, а снизу ограниченный твердой стенкой. В отсутствие поля неустойчивость Фарадея [2] поверхности раздела жидкости при механических вибрациях исследовалась во многих работах [3, 4]. С целью интенсификации процессов в промышленности активно изучается влияние вибраций на тепло- и массообменные процессы [5]. Исследованию устойчивости свободной поверхности феррожидкости в стационарном магнитном поле посвящены работы [6, 7], а в комбинации с механическими вибрациями – работы [8, 9]. Устойчивость слоя ферромагнитной жидкости в осциллирующем магнитном поле изучалась экспериментально в [10, 11] и теоретически в [12, 13] при нормальной или тангенциальной ориентации поля по отношению к поверхности.

В настоящей работе исследуется неустойчивость свободной поверхности слоя вязкой феррожидкости при воздействии механических вибраций, а также стационарной и осциллирующей компонент магнитного поля при его произвольной ориентации. Совместное воздействие механических вибраций и нестационарного магнитного поля может обусловливать как появление дополнительных областей неустойчивости, так и изменять их структуру, проявляя эффект стабилизации, в зависимости от соотношений параметров воздействий.

Постановка задачи. Рассматривается слой вязкой ферромагнитной жидкости толщины h, расположенный на твердой немагнитной пластине и ограниченный сверху воздухом, влиянием которого на движение жидкости пренебрегается (см. рис. 1). Область, занятую жидкостью, обозначим Ω_1, воздухом – Ω_2, твердой подложкой – Ω_3. В дальнейшем нижние индексы при соответствующих величинах будут обозначать области, к которым они относятся.

Предполагается, что жидкость находится в произвольно ориентированном к ее свободной горизонтальной поверхности однородном нестационарном магнитном поле $\vec{H}(t)$, а пластина совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a_g и частотой ω_g. Введем неинерциальную, поступательно движущуюся систему координат (x,y,z) с началом в точке *0* на первоначально невозмущенной поверхности $z=0$ жидкости, $z=\zeta(t,x,y)$ – уравнение возмущенной свободной поверхности.

Феррожидкость считаем вязкой, несжимаемой, непроводящей и для нее принят нелинейный закон намагничивания: $\mu_1=\mu(\rho,H)$, $\mu_2=\mu_3=1$.

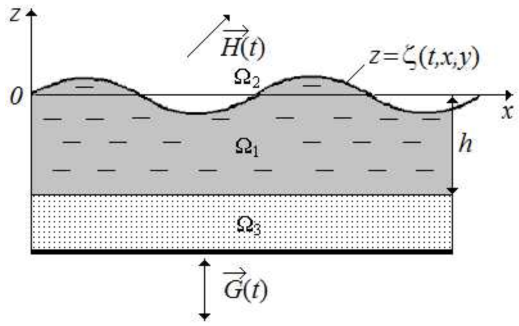


Рис. 1 – К постановке задачи

Основная система уравнений феррогидродинамики имеет вид [6,14]:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0\,, \qquad (1)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\left(p_0 + \psi^{(\rho)}\right) + M\nabla H + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{G}\,, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \operatorname{rot}\vec{H} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\vec{B} = \mu(\rho, H)\vec{H}\,, \qquad (4)$$

где $\vec{G}(\mathrm{t}) = (-g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g\, \mathrm{t}))\vec{\mathrm{e}}_z$, g – гравитационное ускорение, $\vec{\mathrm{e}}_z$ – единичный орт оси (z).

Система уравнений (1) – (4) дополняется граничными условиями, которые включают:
кинематическое условие

$$v_n = -\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_x^2+\zeta_y^2}} \quad \text{при} \quad z=\zeta\,; \qquad (5)$$

условия баланса напряжений на свободной поверхности

$$< P_{jk}\tau_{1j}n_k >= 0, < P_{jk}\tau_{2j}n_k >= 0 \ \text{ при } \ z=\zeta\,, \qquad (6)$$

$$< P_{nn} >= -\sigma\operatorname{div}\vec{n} \quad \text{при} \quad z=\zeta\,; \qquad (7)$$

условие прилипания на твердой стенке

$$\vec{v} = 0 \quad \text{при} \quad z=-h\,; \qquad (8)$$

условия для электромагнитного поля

$$< \vec{B}\cdot\vec{n} >= 0, < \vec{H}\cdot\vec{\tau} >= 0 \quad \text{при} \quad z=\zeta\,,\, z=-h\,; \qquad (9)$$

граничные условия на бесконечности

$$\vec{H} = \vec{H}_\infty \quad \text{при} \ |z| \to \infty\,. \qquad (10)$$

Компоненты P_{jk} тензора напряжений вязкой феррожидкости имеют вид:

$$P_{jk} = -\left(p_0 + \psi^{(\rho)} + \frac{H^2}{8\pi} \right)\delta_{jk} + \frac{H_j B_k}{4\pi} + 2\eta v_{jk}. \qquad (11)$$

В (1) – (11) введены следующие обозначения: $\vec{v}$ – скорость среды, ρ – плотность, p_0 – механическое давление, $\psi^{(\rho)} = \int_0^H \left(M - \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \right) dH$ – магнитострикционное давление, M – намагниченность среды, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, η – динамическая вязкость, $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ – магнитная индукция, μ – магнитная проницаемость, σ – коэффициент поверхностного натяжения, v_{jk} – компоненты тензора скоростей деформаций, δ_{jk} – символ Кронекера, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к свободной поверхности, $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ – касательные векторы к свободной поверхности (τ_{1j} и τ_{2j} – их компоненты), $< ... >$ – скачок величин, заключенных в скобки, на поверхностях раздела. По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах их изменения.

В силу второго уравнения (3), напряженность магнитного поля представим в виде: $\vec{H} = \nabla\Phi$, где Φ – потенциал напряженности магнитного поля. Тогда из первого уравнения (3) получаем:

$$\Delta\Phi = -4\pi \operatorname{div}\left(\frac{M(\rho, |\nabla\Phi|)}{|\nabla\Phi|} \nabla\Phi \right). \qquad (12)$$

Граничные условия (9), (10) для электромагнитного поля примут вид:

$$< \mu \frac{\partial\Phi}{\partial z} > = \zeta_x < \mu \frac{\partial\Phi}{\partial x} > + \zeta_y < \mu \frac{\partial\Phi}{\partial y} > \text{ при } z = \zeta, \qquad (13)$$

$$< \frac{\partial\Phi}{\partial x} > + \zeta_x < \frac{\partial\Phi}{\partial z} > = 0, < \frac{\partial\Phi}{\partial y} > + \zeta_y < \frac{\partial\Phi}{\partial z} > = 0 \text{ при } z = \zeta, \qquad (14)$$

$$< \mu \frac{\partial\Phi}{\partial z} > = 0, \quad < \Phi > = 0 \quad \text{при} \quad z = -h, \qquad (15)$$

$$\nabla\Phi = \vec{H}_\infty \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \qquad (16)$$

Нелинейная постановка задачи для безграничного слоя жидкости в терминах функции тока и потенциала напряженности магнитного поля сформулирована в работе [15].

Система (1) – (16) имеет решение

$$\vec{v}^0 = 0, \quad \zeta^0 = 0, \quad \nabla\Phi_1^0 = \vec{H}_0(\mathrm{t}), \quad \nabla\Phi_j^0 = \vec{H}_\infty(\mathrm{t}), \quad j = 2,3, \qquad (17)$$

$$H_{0x} = H_{\infty x}, \quad H_{0y} = H_{\infty y}, \quad \mu H_{0z} = H_{\infty z},$$

соответствующее однородному равновесному состоянию феррожидкости с горизонтальной свободной поверхностью, находящейся в произвольном на бесконечности поле $\vec{H}_\infty(\mathrm{t})$.

Для исследования устойчивости горизонтальной поверхности $z=0$ линеаризуем сформулированную задачу. Малые отклонения от равновесного состояния (17) зададим в виде:

$$\zeta' = \zeta - \zeta^0, \quad v' = v - v^0, \quad \nabla\Phi' = \nabla\Phi - \vec{H}_0, \tag{18}$$

где штрихами обозначены возмущения соответствующих величин. Предполагая малой амплитуду волн по сравнению с их длиной, а также малыми возмущения магнитного поля $|\vec{H}'| = |\nabla\Phi - \nabla\Phi^0|$ по сравнению с $|\nabla\Phi^0|$, в случае нелинейного закона намагничивания (4) для возмущения намагниченности $\vec{M}'$ однородной несжимаемой жидкости получим:

$$\vec{M}' = \left(\frac{M}{H}\vec{H}\right)' = \frac{1}{H^2}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_0 - \left(\frac{M}{H}\right)_0\right](\vec{H}_0\vec{H}')\vec{H}_0 + \frac{M_0}{H_0}\vec{H}'. \tag{19}$$

Здесь коэффициенты при возмущениях напряженности магнитного поля вычисляются в равновесном состоянии (17), определяемом значениями параметров феррожидкости.

Задача для потенциала напряженности магнитного поля (12) – (16) в линейном приближении записывается в виде (штрихи над возмущенными величинами в дальнейшем опускаются):

$$\Delta\Phi_j = 0 \text{ в } \Omega_j, \quad j = \overline{2,3}. \tag{20}$$

$$\Delta\Phi_1 + c_0\vec{H}_0\nabla(\vec{H}_0\nabla\Phi_1) = 0 \text{ в } \Omega_1, \tag{21}$$

$$\mu\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + c_0H_{0z}(\vec{H}_0\nabla\Phi_1) = (\vec{H}_0\nabla\zeta)(\mu-1) \quad \text{при} \quad z=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = \frac{(\mu-1)}{\mu}H_{0z}\zeta_x, \; \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = \frac{(\mu-1)}{\mu}H_{0z}\zeta_y \text{ при } z=0, \tag{23}$$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \mu\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} + c_0H_{0z}(\vec{H}_0\nabla\Phi_1) = 0 \quad \text{при} \quad z=-h, \tag{24}$$

$$\nabla\Phi_j = 0, \; \text{j} = 2,3 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \tag{25}$$

где $c_0 = \dfrac{4\pi}{H_0^2}\left(\dfrac{\partial M}{\partial H} - \dfrac{M}{H}\right)_0$.

Применив дважды операцию ротор к обеим частям уравнения (2), после проектирования на ось z, получим уравнение для вертикальной компоненты скорости $v_z = W$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta W = 0 \quad \text{при} \quad -h < z < 0, \tag{26}$$

где ν – кинематическая вязкость.

Граничные условия на твердой стенке следующие:

$$W=0,\ \frac{\partial W}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h\,. \qquad (27)$$

Первое является условием прилипания для скорости, а второе следует из уравнения неразрывности (1) и равенств $\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$ при $z=-h$.

В линейном приближении кинематическое граничное условие (5) примет вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=W \quad \text{при} \quad z=0\,. \qquad (28)$$

Из условия отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности (6), получаем:

$$\eta\left(\Delta_\Gamma-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)W=0 \quad \text{при} \quad z=0, \qquad (29)$$

где $\Delta_\Gamma=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для нормальной компоненты тензора напряжений (11), пренебрегая величинами второго порядка малости, можем записать:

$$\left\langle P_{zz}\right\rangle=\sigma\Delta\zeta \quad \text{при} \quad z=0\,. \qquad (30)$$

Отсюда определяется давление на свободной поверхности

$$p_0=\left\langle -\frac{H^2}{8\pi}+\frac{H_zB_z}{4\pi}\right\rangle_{z=0}-\psi^{(\rho)}+2\eta\frac{\partial W}{\partial z}-\sigma\Delta\zeta \qquad (31)$$

$$-\left\langle\frac{H^2}{8\pi}\right\rangle+\frac{B_n}{4\pi}\left\langle H_n\right\rangle=-2\pi\left\langle M_n^2\right\rangle.$$

Применив оператор $\nabla_\Gamma=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}$ к линеаризованному уравнению движения (2), получим

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\frac{\partial W}{\partial z}=\Delta_\Gamma\left(p_0+\psi^{(\rho)}-\int_0^H MdH-\rho G\zeta\right).$$

Используя (31), исключим отсюда давление p_0 и получим граничное условие, замыкающее систему (20) – (29)

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta-2\eta\Delta_\Gamma\right)\frac{\partial W}{\partial z}=-\left(\rho G(t)+\sigma\Delta\right)\Delta_\Gamma\zeta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta_\Gamma\left\langle(\mu-1)^2H_{0z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\vec{H}_0\nabla\zeta\right)+(\mu-1)(1+c_0H_{0z}^2)(\vec{H}_0\nabla\Phi)\right\rangle_{z=0}. \qquad (32)$$

Сформулированная задача позволяет исследовать неустойчивость свободной поверхности жидкости с нелинейным законом намагничивания $\mu=\mu(\rho,H)$, учитывая эффекты вязкой диссипации и конечной глубины слоя жидкости.

Метод решения. Решение задачи (20) – (29), (32) отыскивается в виде:

$$W(t,x,y,z)=w(t,z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})},\ \zeta(t,x,y)=\xi(t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})},$$
$$\Phi_j^0(t,x,y,z)=\phi_j(t,z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})},\ \ j=\overline{1,3},\quad \vec{k}=(k_x,k_y),\vec{r}=(x,y), \tag{33}$$

где $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ – волновое число возмущений, распространяющихся по свободной поверхности.

Основные качественные особенности этих решений проследим в случае линейного закона намагничивания жидкости: $\mu=\text{const}$, т. е. $c_0=0$.

Решения задач для потенциала магнитного поля (20), (21) в каждой из областей с учетом (33) будут иметь вид:

$$\phi_1=a_1e^{kz}+b_1e^{-kz},\ \phi_2=a_2e^{-kz},\ \phi_3=a_3e^{kz}, \tag{34}$$

а неизвестные коэффициенты находятся из граничных условий (22) – (25)

$$a_1=\frac{(\mu-1)^2e^{-kh}(H_{0z}/\mu+iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2e^{kh}-(\mu-1)^2e^{-kh}},\quad b_1=\frac{(\mu-1)(\mu+1)e^{kh}(H_{0z}/\mu+iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2e^{kh}-(\mu-1)^2e^{-kh}},$$
$$a_3=\frac{\left((\mu-1)^2+(\mu-1)(\mu+1)\right)e^{kh}(H_{0z}/\mu+iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2e^{kh}-(\mu-1)^2e^{-kh}} \tag{35}$$
$$a_2=\frac{\left((\mu-1)^2e^{-kh}-(\mu-1)(\mu+1)e^{kh}\right)H_{0z}+\left((\mu-1)^2e^{-kh}+(\mu-1)(\mu+1)e^{kh}\right)iH_\tau}{(\mu+1)^2e^{kh}-(\mu-1)^2e^{-kh}}\xi.$$

После подстановки выражений (33) – (35) в граничное условие (32) получим:

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}-\eta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+3\eta k^2\right)\frac{\partial w}{\partial z}=\Big(\rho G(t)k^2-\sigma k^4-$$
$$-\frac{(\mu-1)^2k^3}{4\pi\left((\mu^2+1)\operatorname{th}(kh)+2\mu\right)}\left[H_{0z}^2(t)\left(\operatorname{th}(kh)+\frac{1}{\mu}\right)-H_{0\tau}^2(t)\left(\operatorname{th}(kh)+\mu\right)\right]\Big)\xi, \tag{36}$$

где $H_{0\tau}=\left(\vec{H}_0\cdot\vec{k}\right)/k$ – эффективная горизонтальная компонента напряженности магнитного поля.

Пусть θ – угол ориентации магнитного поля, так что

$$H_{0z}=H_0\sin(\theta),\quad H_{0\tau}=H_0\cos(\theta). \tag{37}$$

Наклонное магнитное поле зададим таким образом, чтобы оно состояло из постоянной и осциллирующей частей

$$H_0(t)=H_{00}+m_H\cos(\omega_Ht). \tag{38}$$

Частоту механических вибраций ω_g и осциллирующего магнитного поля ω_H запишем в виде:

$$\omega_g=n_g\omega,\quad \omega_H=n_H\omega, \tag{39}$$

где n_g, n_H – целые числа. Тогда правая часть уравнения (36) будет периодической функцией с периодом $2\pi/\omega$. Следовательно, возмущения w и ξ могут быть представлены в форме Флоке:

$$w(t,z)=e^{\gamma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(z)e^{in\omega t},\quad \xi(t)=e^{\gamma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{in\omega t},\qquad (40)$$

где $\gamma = s+i\alpha$ показатель Флоке.

Тогда гидродинамическая задача (26) приводится к виду [4]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-q_n^2\right)w_n=0 \quad \text{при} \quad -h<z<0,\qquad (41)$$

где $q_n^2=k^2-\dfrac{s+i(\alpha+n)\omega}{\nu}$.

Общее решение уравнения (41) имеет вид:

$$w_n(\mathrm{z})=P_n\,\mathrm{ch}(kz)+Q_n\,\mathrm{sh}(kz)+R_n\,\mathrm{ch}(q_nz)+S_n\,\mathrm{sh}(q_nz),\qquad (42)$$

а неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий (27) – (29)

$$P_n=\nu\left(q_n^2+k^2\right)\xi_n,\quad R_n=-2\nu k^2\xi_n,$$

$$S_n=\frac{(kP_n+R_n\left[k\,\mathrm{ch}(q_nh)\,\mathrm{ch}(kh)-q_n\,\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{ch}(kh)\right])}{q_n\,\mathrm{ch}(q_nh)\,\mathrm{sh}(kh)-k\,\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{ch}(kh)},\qquad (43)$$

$$Q_n=\frac{R_n}{k}\left[q_n\,\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{ch}(kh)-k\,\mathrm{ch}(q_nh)\,\mathrm{sh}(kh)\right]-$$
$$-\frac{S_n}{k}\left[q_n\,\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{ch}(kh)-k\,\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{sh}(kh)\right].$$

Подставляя решение гидродинамической задачи (42), (43) в уравнение (36), получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\xi_n e^{\left[s+i(\alpha+n)\omega\right]t}=0,\qquad (44)$$

где

$$F_n=\frac{\nu^2}{q_n\,\mathrm{cth}(q_nh)-k\,\mathrm{cth}(kh)}\left\{k\left(4q_n^2k^2+(q_n^2+k^2)^2\right)-\right.$$
$$\left.-q_n\left[4k^4+\left(q_n^2+k^2\right)^2\right]\mathrm{cth}(q_nh)\,\mathrm{cth}(kh)+\frac{4q_nk^2(q_n^2+k^2)}{\mathrm{sh}(q_nh)\,\mathrm{sh}(kh)}\right\}-\rho G(t)k-\sigma k^3+\qquad (45)$$
$$+\frac{(\mu-1)^2k^2H_0^2(t)}{4\pi\left((\mu^2+1)\,\mathrm{tg}(kh)+2\mu\right)}\left[\sin^2(\theta)\left(\mathrm{th}(kh)+\frac{1}{\mu}\right)-\cos^2(\theta)\left(\mathrm{th}(kh)+\mu\right)\right].$$

После подстановки выражений для $H_0(t)$ и $G(t)$ в (45), из равенства (44) получим рекуррентное соотношение относительно ξ_n для расчета нейтральных кривых устойчивости.

Результаты. Отметим основные отличия в параметрическом воздействии механических вибраций и осциллирующего магнитного поля. Механические колебания входят в равенство (44) линейно с коэффициентом k, тогда как магнитное поле вносит квадратичный вклад в развитие неустойчивости с коэффициентом k^2. Таким образом, для случая механических вибраций и колебаний магнитного поля при потере устойчивости будут возникать волны различной длины; кроме того, для магнитного поля имеет место двухчастотное параметрическое воздействие:

$$H_0^2(t) = H_{00}^2 + \frac{m_H^2}{2} + 2H_{00}m_H \cos\left(n_H \omega t\right) + \frac{m_H^2}{2}\cos\left(2n_H \omega t\right). \qquad (46)$$

Подставив выражения для $H_0(t)$ и $G(t)$ в (44), получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\left[s+i(\alpha+n)\omega\right]t} \Big((F_n^{\nu} - F_n^H H_{00}^2)\xi_n - F_n^H H_{00} m_H (\xi_{n-n_H} + \xi_{n+n_H}) - $$
$$- \frac{F_n^H m_H^2}{4}(2\xi_n + \xi_{n-2n_H} + \xi_{n+2n_H}) - \frac{k\omega_g^2 a_g}{2}(\xi_{n-n_g} + \xi_{n+n_g}) \Big) = 0, \qquad (47)$$

где

$$F_n^{\nu} = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{\nu^2}{q_n \operatorname{cth}(q_n h) - k \operatorname{cth}(kh)} \left\{ \frac{4q_n k^2 (q_n^2 + k^2)}{\operatorname{sh}(q_n h)\operatorname{sh}(kh)} - q_n \Big[4k^4 + \right.$$
$$\left. + (q_n^2 + k^2)^2 \Big] \operatorname{cth}(q_n h)\operatorname{cth}(kh) + k\left(4q_n^2 k^2 + (q_n^2 + k^2)^2\right) \right\}, \qquad (48)$$

$$F_n^H = \frac{(\mu-1)^2 k^2 \left[\sin^2(\theta)\left(\operatorname{th}(kh) + \frac{1}{\mu} \right) - \cos^2(\theta)\left(\operatorname{th}(kh) + \mu \right) \right]}{4\pi\rho\left((\mu^2+1)\operatorname{th}(kh) + 2\mu \right)}.$$

Выражения (47), (48) описывают случай совместного воздействия механических вибраций и осциллирующего наклонного магнитного поля с различными амплитудами и частотами. Зафиксировав часть параметров, из (47) можно получить задачу на собственные значения для одной из амплитуд параметрического воздействия.

Рассмотрим частный случай воздействия наклонного магнитного поля, состоящего из постоянной и осциллирующей частей, при отсутствии механических вибраций. Этот случай интересен тем, что стационарная составляющая горизонтального магнитного поля оказывает стабилизирующее влияние на свободную поверхность [7], тогда как осциллирующее горизонтальное поле может приводить к возникновению параметрической неустойчивости, т. е. образованию волнистой структуры на свободной поверхности жидкости [11]. В вертикальном магнитном поле, помимо параметрической неустойчивости, может возникать статическая неустойчивость (неустойчивость Розенцвейга), с образованием пикообразной формы свободной поверхности, если напряженность поля превышает критическое значение [6] (при $h \to \infty$):

$$H_R^2 = \frac{8\pi\sqrt{\sigma\rho g}\,\mu\left(\mu+1\right)}{(\mu-1)^2}. \qquad (49)$$

Поэтому, представляет интерес изучение влияния наклонного нестационарного магнитного поля на устойчивость свободной поверхности феррожидкости.

Поскольку коэффициенты ряда Фурье (47) равны нулю, то отсюда следуют реккурентные соотношения для неизвестных коэффициентов ξ_n. Вводя вектор-столбец $\xi = (\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots)^T$, эти соотношения можно записать в виде матричного уравнения:

$$\left(m_H^2 C + m_H B + A\right)\xi = 0, \qquad (50)$$

где A – диагональная матрица с элементами $A_{n,n} = F_n^{\nu} - F_n^H H_{00}^2$, а B и C – симметрические двух- и трехдиагональные матрицы с отличными от нуля элементами (при $n_H = 1,\ \omega_H = \omega$):

$$B_{n,n-1} = B_{n-1,n} = -F_n^H H_{00},\ C_{n,n} = -\frac{F_n^H}{2},\ C_{n,n-2} = C_{n-2,n} = \frac{1}{2} C_{n,n}.$$

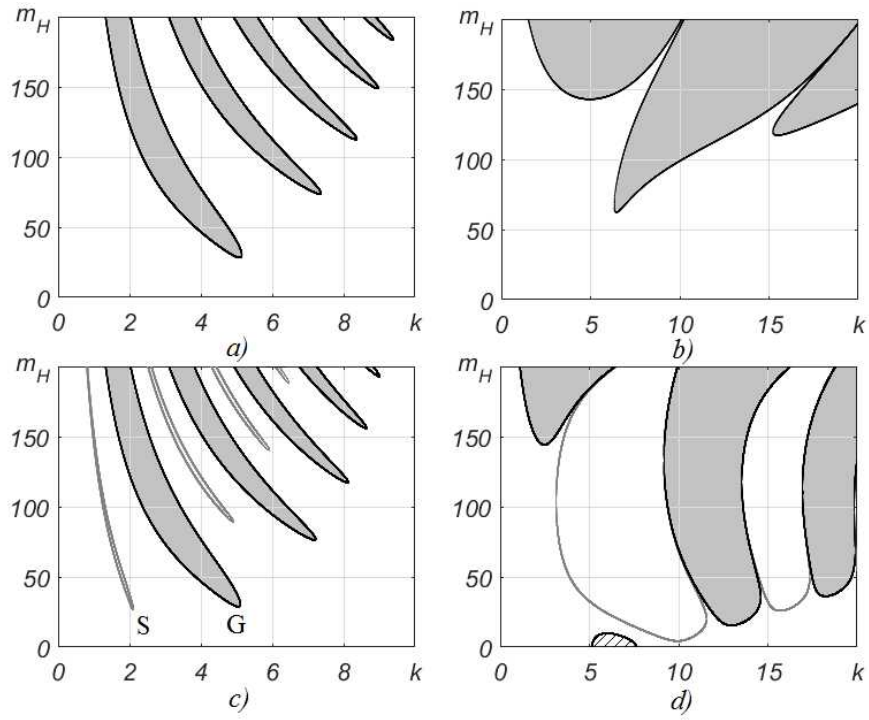
В дальнейшем удобно перейти к линейной алгебраической задаче. Введем вектор-столбец $\tilde{\xi} = m_H \xi$. Тогда задача (50) сводится к задаче на собственные значения для матрицы с увеличенным вдвое размером:

$$\begin{pmatrix} -C^{-1}B & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \xi \end{pmatrix} = m_H \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad (51)$$

где I – единичная матрица такого же размера, как A, B и C. Амплитуда осциллирующего магнитного поля m_H является собственным значением задачи (51).

Для расчетов будем использовать метод работы [4]. Матрицы A, B и C обрезаются до размеров, обеспечивающих необходимую точность вычислений. Показатель Флоке $\gamma = s + i\alpha$ фиксируется на значениях $s = 0$ и $\alpha = 0\ (\alpha = 1/2)$, что соответствует случаю гармонических (субгармонических) колебаний. При изменении параметра k решается задача на собственные значения (51) и определяется наименьшее или несколько наименьших вещественных собственных значений m_H. Таким образом, в плоскости (k, m_H) строятся нейтральные кривые устойчивости, которые образуют области ("языки"), значения параметров вне (внутри) этих областей соответствуют устойчивости (неустойчивости). Абсолютный минимум переходных кривых отвечает критической амплитуде m_{Hc} и критическому волновому числу k_c, при которых наступает неустойчивость.

Для расчетов использовались типичные для магнитных жидкостей значения параметров [11]: $\nu = 0{,}1$ П; $\mu = 5$; $\sigma = 30$ эрг/см^2; $\rho = 1{,}2$ г/см^3.

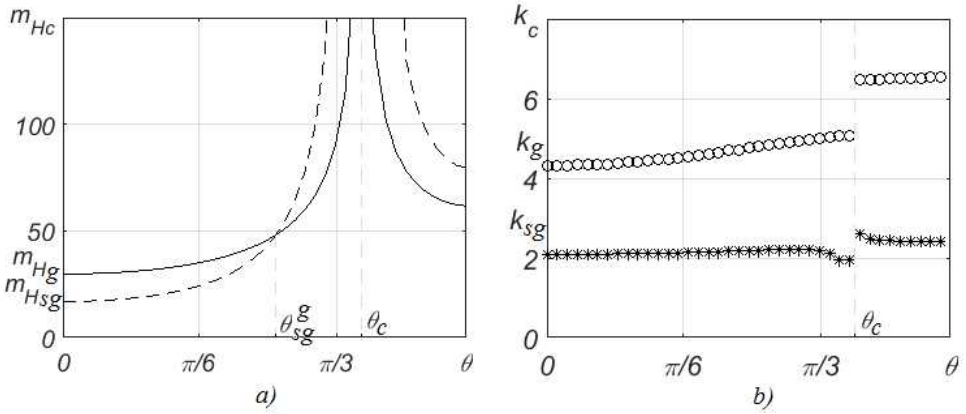


$a)\ H_{00} = 0,\ \theta = 0$;
$b)\ H_{00} = 0,\ \theta = \pi/2$;
$c)\ H_{00} = 4.5$ Э, $\theta = 0$;
$d)\ H_{00} = 95$ Э, $\theta = \pi/2$.

Рис. 2 – Нейтральные кривые устойчивости для слоя магнитной жидкости в осциллирующем магнитном поле при значениях параметров: $h = 1$ см, $\omega = 100$ Гц

В отличие от механических вибраций, для только осциллирующего магнитного поля наиболее опасными являются гармонические колебания. Им отвечают области неустойчивости, закрашенные серым цветом (см. рис. 2a) и рис. 2b)). В этом случае имеет место периодическое воздействие (46) с одной частотой $2\omega_H$ ($\omega_H = n_H \omega$). С добавлением стационарного поля H_{00}, поскольку оно входит в одну из амплитуд двухчастотного параметрического воздействия (46), начинают проявляться зоны субгармонической неустойчивости (незакрашенные "языки" на рис. 2c) и рис. 2d)). Увеличение стационарного поля приводит к возникновению бикритических точек (S и G на рис. 2c)), т. е. одной критической амплитуде поля соответствуют два различных волновых числа. Дальнейшее увеличение поля H_{00} приводит к тому, что субгармонические колебания становятся более опасными. При этом, если вертикальная компонента поля превосходит значение H_R, определяемое из (49), возникает дополнительная (заштрихованная) область, отвечающая неустойчивости Розенцвейга (см. рис. 2d)).

Отметим, что параметрическую неустойчивость проще возбудить осциллирующим тангенциальным к свободной поверхности магнитным полем, т. к. для этого нужно приложить поле меньшей амплитуды, чем для случая перпендикулярного к поверхности поля, как это видно из рис. 2a) и рис. 2b). При этом из (46), (49), следует, что в случае поля, нормального к поверхности, может наблюдаться переход от параметрической к статической неустойчивости в только осциллирующем поле, если его амплитуда превысит значение $m_H > \sqrt{2}H_R$ [11, 13].



a) $H_{00} = 7$ Э; *b*) $H_{00} = 20$ Э.

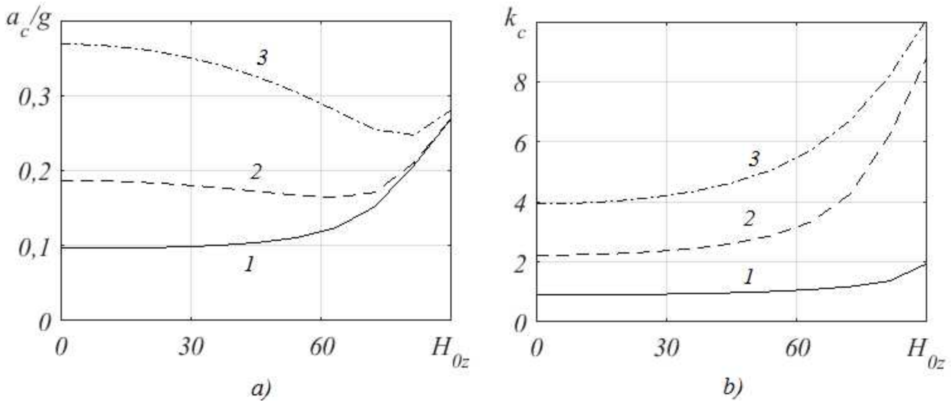
Рис. 3 – Зависимость критической амплитуды магнитного поля (a) и критического волнового числа (b) от угла ориентации поля при значениях параметров $h = 1$ см, $\omega = 100$ Гц

Пунктирные кривые на рис. 3a) отвечают критической амплитуде m_{Hsg} субгармонической неустойчивости, а сплошные – гармонической m_{Hg}. Кружочками (звездочками) на рис. 3b) обозначены критические волновые числа гармонической k_g (субгармонической k_{sg}) неустойчивости соответственно. Из рис. 3a) видно, что при отклонении поля от вертикального или горизонтального положения для возбуждения неустойчивости нужно приложить поле большей амплитуды m_{Hc}. При этом вертикальная и горизонтальная составляющие магнитного поля могут компенсировать действие друг друга при ориентации поля:

$$\theta_c = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\mu^2}{1+2\mu\,\mathrm{th}(kh)+\mu^2}\right). \qquad (52)$$

Изменение ориентации поля также может привести к смене мод колебаний (см. рис. 3a)). При угле наклона θ^g_{sg} возникают бикритические точки, т. е. критические амплитуды m_{Hsg} и m_{Hg} совпадают. Поэтому вблизи этой точки может осуществляться переход от гармонических к субгармоническим колебаниям. Критические волновые числа при изменении ориентации поля незначительно отличаются от тех, что соответствуют параметрической неустойчивости в только вертикальном или горизонтальном поле. Однако, в точке θ_c происходит скачкообразное изменение критических волновых чисел, что обусловливает изменение длин возникающих на поверхности волн (см. рис. 3b)).

Случай вертикального магнитного поля, состоящего из постоянной и осциллирующей частей, рассматривался нами для безграничного слоя жидкости в работе [15]. Этот случай также изучался в [12], однако как упрощение предполагалось, что стационарное поле значительно больше осциллирующего ($H_{0z} >> m_H$), что сводилось к случаю одночастотного воздействия.



$a)\ \omega = 100$ Гц; $1 - h = 1$ см; $2 - h = 0{,}5$ см; $3 - h = 0{,}3$ см;

$b)\ h = 5$ см; $1 - \omega = 60$ Гц; $2 - \omega = 100$ Гц; $3 - \omega = 150$ Гц

Рис. 4 – Зависимость критической амплитуды механических вибраций (a) и критического волнового числа (b) от величины стационарного вертикального магнитного поля

В работе [8] было показано, что за счет механических вибраций можно повысить порог возникновения неустойчивости Розенцвейга в стационарном вертикальном магнитном поле. Однако влияние стационарного магнитного поля, в частности наклонного, на параметрическую неустойчивость при механических вибрациях не было до конца исследовано. Из рис. 4b) видно, что при вертикальной ориентации магнитного поля увеличение напряженности $H_{0z} < H_R$ приводит к повышению критического волнового числа k_c. Таким образом, при неустойчивости Фарадея будут возникать волны меньшей длины, чем в отсутствие магнитного поля, что было подтверждено экспериментально в работе [10]. Горизонтальное стационарное магнитное поле оказывает обратный эффект, и увеличение его напряженности приводит к повышению длины волн при параметрической неустойчивости.

Влияние стационарного магнитного поля на критическую амплитуду a_g механических вибраций имеет более сложный характер и зависит не только от ориентации магнитного поля, но и от толщины слоя жидкости. Для относительно толстых слоев (>1 см в наших расчетах) наложение вертикального магнитного поля $H_{0z} < H_R$ увеличивает критическую амплитуду a_g механических вибраций, т. е. повышает порог возникновения параметрической неустойчивости, а для более тонких слоев это влияние немонотонно (кривые 2 и 3 на рис. 4a)). Таким образом, для тонких слоев феррожидкости в слабом вертикальном магнитном поле критическая амплитуда a_g понижается, а в сильном – увеличивается. Для случая горизонтальной ориентации поля, который рассматривался в [9], было показано, что для толстых слоев феррожидкости стационарное магнитное поле понижает критическую амплитуду механических вибраций, а для тонких – приводит к такой же немонотонной зависимости.

В предельном случае слоя бесконечной глубины задача (47) сводится к ранее изученной в работе [15], где также рассматривались различные комбинации осциллирующих магнитных полей и механических вибраций при определенных значениях отношений амплитуд и частот параметрического воздействия. Необходимо отметить, что переменное однородное магнитное поле может приводить к параметрической неустойчивости покоящихся объемов магнитной жидкости и возбуждению в них периодических волн малой амплитуды [16].

Заключение. Изучена задача параметрической устойчивости свободной поверхности слоя вязкой магнитной жидкости конечной глубины при воздействии механических вибраций и произвольно ориентированного нестационарного магнитного поля. Рассмотрены отличия между механическими и магнитными периодическими воздействиями, обусловливающими параметрическую неустойчивость. В случае магнитного поля, состоящего из постоянной и осциллирующей частей, задача в линейном приближении сведена к уравнению для квадратичного пучка матриц, где в качестве параметра выступает амплитуда осцилляций поля. Установлено, что изменение угла ориентации магнитного поля и увеличение его стационарной составляющей может приводить к возникновению бикритических точек и переходу от гармонических к субгармоническим колебаниям. Уменьшение толщины слоя жидкости приводит к повышению порога возникновения параметрической неустойчивости и к возбуждению на ее поверхности волн меньшей длины при потере устойчивости.

1. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids / *S. Odenbach, W. Beiglbock, J. Ehlers* et al. – Berlin : Springer, 2009. – 430 p.
2. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces / *M. Faraday* // Phil. Trans. of the Royal Society of London. – 1831. – Vol. 121. – Pp. 319 – 346.
3. *Ibrahim R. A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / *R. A. Ibrahim*. – Cambridge University Press, 2005. – 947 p.
4. *Kumar K.* Linear Theory of Faraday Instability in Viscous Fluids. / *K. Kumar* // Proc. Roy. Soc. London. – 1996. – Vol. 452, № 1948. – Pp. 1113 – 1126.
5. Тепломассообмен и вибрация / *Присняков В., Бондаренко С., Луценко В.* и др. – Одесса : Нептун-Технология, 2001. – 208 с.
6. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика / *Р. Розенцвейг*, пер. с англ. *В. В. Кирюшина*. – М. : Мир, 1989. – 356 с.
7. *Tarapov I. E.* Surface waves and the stability of the free surface of a magnetizable fluid / *I. E. Tarapov* // J. Appl. Mech. and Techn. Phys. – 1974. – Vol. 15, № 4. – Pp. 465 – 469.
8. *Muller H. W.* Parametrically driven surface waves on viscous ferrofluids / *H. W. Muller* // Phys. Rev.E. – 1998. – Vol. 58, №5. – Pp. 6199 – 6205.
9. *Mekhonoshin V. V.* Faraday instability on viscous ferrofluids in a horizontal magnetic field: Oblique rolls of arbitrary orientation. / *V. V. Mekhonoshin, A. Lange* // Phys. Rev.E. – 2002. – Vol. 65. – Pp. 061509-1 – 061509-7.
10. *Bashtovoi V. G.* Excitation and study of subcritical waves on a magnetic fluid surface / *V. G. Bashtovoi, R. E. Rosensweig* // J. Magn. Magn. Mater. – 1993. – Vol. 122, № 1 – 3. – Pp. 234 – 240.
11. *Блум Э. Я.* Магнитные жидкости / *Э. Я. Блум, М. М. Майоров, А. О. Цеберс*. – Рига : Зинатне, 1989. – 386 с.
12. *Bajaj R.* Parametric instability of the interface between two viscous magnetic fluids / *R. Bajaj, S. K. Malik //* J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – Vol. 253, № 1 – 2. – pp. 35 – 44.
13. *Hennenberg M.* On the Hill Equation Describing Oscillations of a Ferrofluid Free Surface in a Vertical Magnetic Field / *M. Hennenberg, S. Slavtchev, G.Valchev* // Microgravity Sci. Technol. – 2010. – Vol. 22, № 3. – Pp. 455 – 460.
14. *Тарапов И. Е.* Механика сплошной среды. В 3 частях. Часть 2 : Общие законы кинематики и динамики / *И. Е. Тарапов*. – Харьков : Золотые страницы, 2002. – 516 с.
15. *Пацегон Н. Ф.* Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / *Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев* // Прикладная гидромеханика. – 2014. – Т.16, №3. – С. 36 – 51.
16. *Patsegon N. F.* The volumetric parametric resonance in magnetizable medium / *N. F. Patsegon, S. I. Potseluiev* // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 81. – Pp 12 – 27.

Харьковский национальный
университет имени В. Н. Каразина,
факультет математики и информатики

Получено 09.02.2016,
в окончательном варианте 23.06.2016