

АВТОКОЛИВАННЯ ТРИШАРОВОЇ УСІЧЕНОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ СТІЛЬНИКОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ, ВИГОТОВЛЕНИМ АДИТИВНИМИ ТЕХНОЛОГІЯМИ

¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,

вул. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail; admi@ipmach.kharkov.ua

² Харківський національний університет радіоелектроніки
пр. Науки, 14, 61166, Харків, Україна; info@nure.ua

Отримано нелінійну математичну модель автоколивань тришарових конічних оболонок із стільниковим заповнювачем, виготовленим за допомогою адитивних технологій. Коливання конструкції описуються п'ятнадцятьма невідомими. Кожен шар конструкції описується п'ятьма невідомими: трьома проєкціями переміщень середньої поверхні шару та двома кутами повороту нормалі середньої поверхні шару. Використовуються додаткові умови, що виражають безперервність переміщень під час переходу від одного шару до іншого. Для опису деформаційного стану конструкції використовується теорія зсуву високого порядку. Розглядається випадок взаємодії тришарової конічної оболонки з надзвуковим газовим потоком. Внаслідок цієї взаємодії в оболонковій конструкції виникають автоколивання. Для аналізу таких автоколивань враховується геометрично нелінійне деформування конструкції. Для отримання рівнянь руху конструкції застосовується метод заданих форм, який використовує кінетичну та потенційну енергію конструкції. Автоколивання представляються як розкладання за формами власних коливань. Ці розкладання містять набір узагальнених координат. Отримано систему нелінійних автономних звичайних диференціальних рівнянь щодо вектора узагальнених координат. Для дослідження автоколивань використовується поєднання методу пристрілювання та алгоритму продовження розв'язків за параметром. Для дослідження стійкості періодичних коливань та їх біфуркацій розраховуються мультиплікатори. За допомогою числового моделювання досліджуються характеристики динамічної нестійкості тривіального стану рівноваги конструкції. Докладно досліджено властивості періодичних, квазіперіодичних та хаотичних автоколивань конструкцій, які защемлені з двох сторін, та консольних.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, тришарова конічна оболонка, автоколивання, квазіперіодичні коливання, хаос.

This paper presents a nonlinear mathematical model of self-vibrations of conical sandwich shells with a honeycomb core made by additive technologies. The vibrations of the structure are described by fifteen unknowns. Each layer of the structure is described by five unknowns: three projections of the displacements of the layer middle surface and two rotation angles of the middle surface normal. Displacement continuity conditions at the layer interfaces are used. The higher-order shear theory is used to describe the stress-strain state of the structure. The case of conical sandwich shell – supersonic gas flow interaction is considered. Due to this interaction, self-vibrations of the shell structure are set up. In their analysis, the geometrical nonlinearity of the structure is accounted for. Motion equations of the structure are derived using the assumed-mode method, which uses the kinetic and the potential energy of the structure. The self-vibrations are represented as eigenmode expansions, which contain a set of generalized coordinates. A system of nonlinear autonomous ordinary differential equations in the generalized coordinates is derived. The self-vibrations are studied using a combination of the shooting technique and the parameter continuation method. Multipliers are calculated to analyze the stability of periodic vibrations and their bifurcations. The dynamic instability of the structure's trivial equilibrium is studied by numerical simulation. For clamped-clamped and cantilever shells, the properties of their periodic, quasiperiodic, and chaotic motions are analyzed in detail.

Keywords: nonlinear dynamical system, conical sandwich shell, self-sustained vibrations, quasiperiodic vibrations, chaos.

Вступ. Тонкостінні конструкції із стільниковим заповнювачем часто використовуються в літаках і ракетах-носіях внаслідок їх високої міцності та жорсткості. Тому багато зусиль вжито для дослідження тришарових конструкцій із стільниковим заповнювачем. Нелінійні коливання багат шарової оболонки подвійної кривизни з магніореологічним шаром вивчаються в [1]. Нелінійні коливання багат шарової оболонки подвійної кривизни та з п'єзоелектричним шаром вивчаються в [2]. Нелінійна динаміка пологої оболонки із стільниковим заповнювачем, що має від'ємний коефіцієнт Пуассона, вивчається в [3]. Геометрично нелінійні вимушені коливання багат шарової циліндричної оболонки із стільниковим заповнювачем з використанням теорії зсуву високого порядку розглядаються

в [4]. У цій конструкції верхній та нижній шари виготовлені з нанокompозиту. В [5] досліджуються нелінійні вимушені коливання багат шарової циліндричної панелі з нанокompозитними шарами в температурному полі під дією вибухового навантаження. Нелінійні рівняння руху багат шарової оболонки із стільниковим заповнювачем отримані в [6] за допомогою варіаційних принципів Гамільтона та теорії Редді третього порядку. Метод скінченних елементів використовується для дослідження нелінійних коливань з помірними амплітудами багат шарових пластин [7, 8]. Деякі фундаментальні питання теорій оболонок та діагностування неоднорідних конструкцій та матеріалів розглядаються в роботах [9 – 11].

У цій статті побудовано нову математичну модель геометрично нелінійних автоколивань три шарових конічних оболонок із стільниковим заповнювачем, надрукованим адитивними технологіями FDM. Деформаційний стан кожного шару описується п'ятьма невідомими, до яких входять три проєкції переміщень серединної поверхні кожного шару і два кути повороту нормалі серединної поверхні шару. Для опису напружено-деформованого стану конструкції використовується теорія зсуву високого порядку. Отримано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь великої розмірності щодо узагальнених координат, яка описує автоколивання конструкції. Чисельно досліджено властивості періодичних, квазіперіодичних і хаотичних автоколивань конструкції. Показано, що амплітуди квазіперіодичних та хаотичних коливань значно більші за амплітуди періодичних автоколивань.

Формулювання задачі та потенційна енергія конструкції. Три шарова конічна оболонка, що досліджується, наведена на рис. 1. Середній шар оболонки є стільниковим заповнювачем, виготовленим FDM технологіями з матеріалу ULTEM 9085. Верхній і нижній шари виготовлені з вуглепластику. Основні геометричні параметри стільників такі: l_1, l_2, h_c, ψ , де h_c – товщина стінки стільника.

Розглядаються автоколивання три шарової конічної оболонки, що виникають внаслідок взаємодії надзвукового газового потоку з тонкостінною конструкцією. Внаслідок динамічної нестійкості спостерігається зростання амплітуд коливань тонкостінної конструкції. Тоді в математичну модель істотний внесок вносить геометрична нелінійність, яка обмежує зростання амплітуд коливань. Внаслідок цього обмеження виникають періодичні автоколивання. Тому в цій роботі враховуватиметься геометрично нелінійне деформування конструкції. Введемо три криволінійні системи координат, які будуть пов'язані із серединними поверхнями кожного шару. Криволінійні координати верхніх, нижніх шарів і стільників позначимо так: $(s_t, \theta, z_t), (s_c, \theta, z_c), (s_b, \theta, z_b)$, де (s_t, s_c, s_b) – поздовжні координати, спрямовані вздовж твірних серединних поверхонь відповідного шару (рис. 1); θ – обводова координата; (z_t, z_c, z_b) – поперечні координати шарів. Ліва торцева сторона конічної оболонки (з меншим радіусом) має такі значення координат s_t, s_c, s_b : s_t^1, s_c^1, s_b^1 . Права торцева сторона (з великим радіусом) має такі координати: s_t^2, s_c^2, s_b^2 . Введемо одну поздовжню координату ξ для всієї багат шарової конструкції: $\xi = s_t - s_i^1$; $i = t, b, c$. Тоді деформування конструкції вивчатиметься в таких системах координат $z_i; \xi; \theta$; $i = t, c, b$. Довжину конічної оболонки позначимо через L : $L = s_i^{(2)} - s_i^{(1)}$; $i = t, c, b$. Радіуси

кривизни серединних поверхонь шарів позначимо через $R_0^{(j)}$; $R_s^{(j)}$; $j = t, c, b$, а параметри Ляме позначимо так: $A_s^{(j)}$; $A_0^{(j)}$. Ці величини визначаються так:

$$R_0^{(j)} = s_j^{-1} + \xi \tan \varphi ; R_s^{(j)} = \infty; j = t, c, b; A_s^{(j)} = 1; A_0^{(j)} = s_j^{-1} + \xi \sin(\varphi).$$

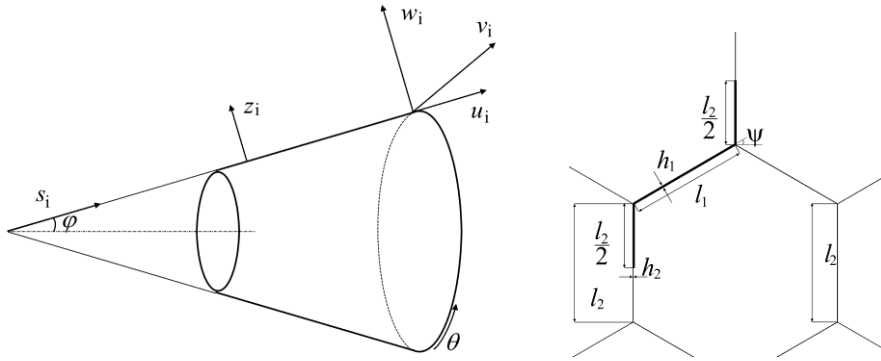


Рис. 1 – Ескіз конічної оболонки та комірки стільникового заповнювача

Стільниковий заповнювач перетворюється на еквівалентне ортотропне середовище в результаті процедури гомогенізації [12, 13], яка включає скінченно-елементне моделювання стільників в пакеті програм ANSYS. Закон Гука для цього ортотропного середовища набуває такого вигляду:

$$\begin{matrix} \sigma_{ss}^c & C_{11} & C_{12} & C_{13} & \varepsilon_{ss}^c \\ \sigma_{\theta\theta}^c & C_{21} & C_{22} & C_{23} & \varepsilon_{\theta\theta}^c \\ \sigma_{zz}^c & C_{31} & C_{32} & C_{33} & \varepsilon_{zz}^c \end{matrix} ; \sigma_{\theta z}^c = C_{44} 2\varepsilon_{\theta z}^c ; \sigma_{sz}^c = C_{55} 2\varepsilon_{sz}^c ; \sigma_{s\theta}^c = C_{66} 2\varepsilon_{s\theta}^c.$$

Закон Гука для верхніх та нижніх шарів, виготовлених з вуглепластику, такий:

$$\begin{matrix} \sigma_{ss}^j & C_{11} & C_{12} & \varepsilon_{ss}^j \\ \sigma_{\theta\theta}^j & C_{12} & C_{22} & \varepsilon_{\theta\theta}^j \end{matrix} ; \sigma_{s\theta}^j = 2C_{33}\varepsilon_{s\theta}^j ; \sigma_{sz}^j = 2C_{44}\varepsilon_{sz}^j ; \sigma_{\theta z}^j = 2C_{55}\varepsilon_{\theta z}^j ; j = b, t, \quad (1)$$

де $\sigma_{ss}^t, \sigma_{\theta\theta}^t, \sigma_{s\theta}^t, \sigma_{sz}^t, \sigma_{\theta z}^t, \varepsilon_{ss}^t, \varepsilon_{\theta\theta}^t, \varepsilon_{s\theta}^t, \varepsilon_{sz}^t, \varepsilon_{\theta z}^t, \sigma_{ss}^b, \sigma_{\theta\theta}^b, \sigma_{s\theta}^b, \sigma_{sz}^b, \sigma_{\theta z}^b, \varepsilon_{ss}^b, \varepsilon_{\theta\theta}^b, \varepsilon_{s\theta}^b, \varepsilon_{sz}^b, \varepsilon_{\theta z}^b$ – елементи тензорів напружень та деформацій для верхнього та нижнього шарів.

Проекції переміщень верхнього та нижнього шарів $u_1^{(i)}$; $u_2^{(i)}$; $u_3^{(i)}$ подаються у вигляді наступних розкладань за поперечною координатою:

$$u_1^i = u^i + z_i \square_1^i + z_i^2 \psi_1^i ; u_2^i = 1 + \frac{z_i}{s_i^{-1} + \xi \tan(\varphi)} v^i + z_i \square_2^i + z_i^2 \psi_2^i ; u_3^i = w^{(i)} ; i = t, b, \quad (2)$$

де u^i, v^i, w^i – проекції переміщень точок серединних поверхонь на координатні осі; \square_1^i, \square_2^i – кути повороту нормалі до серединних поверхонь; ψ_1^i, ψ_2^i – параметри, що підлягають визначенню.

Проекції переміщень серединного шару $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, u_3^{(c)}$ такі:

$$u_1^{(c)} = u^c + z_c \square_1^c + z_c^2 \psi_1^c + z_c^3 \gamma_1^c; u_3^{(c)} = w^{(c)} + z_c w_1^{(c)} + z_c^2 w_2^{(c)};$$

$$u_2^{(c)} = 1 + \frac{z_c}{s_c^1 + \xi \tan(\varphi)} v^c + z_c \square_2^c + z_c^2 \psi_2^c + z_c^3 \gamma_2^c, \quad (3)$$

де $\psi_1^c, \psi_2^c, \gamma_1^c, \gamma_2^c, w_1^{(c)}, w_2^{(c)}$ – параметри, що підлягають визначенню.

Для визначення параметрів розкладання (2) запишемо граничні умови на верхній та нижній поверхнях оболонки:

$$\varepsilon_{sz} z_i = 0.5 h_i = \varepsilon_{\theta z} z_i = 0.5 h_i = 0; \quad \varepsilon_{sz} z_b = -0.5 h_b = \varepsilon_{\theta z} z_b = -0.5 h_b = 0, \quad (4)$$

де h_t, h_b – товщини верхнього та нижнього шарів.

Умову безперервності переміщень між шарами представимо так:

$$u_i^t z_i = -0.5 h_i = u_i^c z_c = 0.5 h_c; u_i^b z_b = 0.5 h_b = u_i^c z_c = -0.5 h_c; i=1,2,3, \quad (5)$$

де h_c – товщина середнього шару.

З умов (4, 5) визначаються параметри розкладань (2), (3) $\psi_1^t, \psi_2^t, \psi_1^b, \psi_2^b, \psi_1^c, \psi_2^c, \gamma_1^c, \gamma_2^c, w_1^{(c)}, w_2^{(c)}$. Формули, що визначають ці параметри, є громіздкими. Тому вони тут не наводяться.

Скористаємося загальним випадком геометрично нелінійних співвідношень у криволінійних координатах [14]. Ці співвідношення пов'язують деформації із переміщеннями. У ці співвідношення введемо (2), (3). Зв'язок між деформаціями та переміщеннями представимо у вигляді розкладань за поперечною координатою так:

$$\varepsilon_{SS}^{(i)} = \varepsilon_{S,0}^{(i)} + z_i k_{s,0}^{(i)} + z_i^2 k_{s,1}^{(i)} + z_i^3 k_{s,2}^{(i)}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + z_i k_{\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta,2}^{(i)}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{S\theta}^{(i)} = \varepsilon_{S\theta,0}^{(i)} + z_i k_{S\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{S\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{S\theta,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{SZ}^{(i)} = \varepsilon_{SZ,0}^{(i)} + z_i k_{SZ,0}^{(i)} + z_i^2 k_{SZ,1}^{(i)} + z_i^3 k_{SZ,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{\theta Z}^{(i)} = \varepsilon_{\theta Z,0}^{(i)} + z_i k_{\theta Z,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta Z,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta Z,2}^{(i)}; i = t, c, b;$$

$$\varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{z,0}^{(c)} + z_c k_{z,0}^{(c)};$$

$$\text{де } \varepsilon_{s,0}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} + 0.5 \frac{\partial u^{(i)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(i)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial w^{(i)2}}{\partial \xi};$$

$$\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} = \frac{1}{(s_i^1 + \xi) \sin(\varphi)} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)} + \frac{w^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)} + 0.5 \frac{1}{(s_i^1 + \xi) \sin(\varphi)} \frac{\partial u^{(i)2}}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{(s_i^1 + \xi) \sin(\varphi)} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)} + \frac{w^{(i)2}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)} +$$

$$+ \frac{1}{(s_i^1 + \xi) \sin \varphi} \frac{\partial w^i}{\partial \theta} + \frac{v^{(i)2}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)}; i = t, b, c;$$

$$\varepsilon_{S\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{1}{(s_i^1 + \xi) \sin(\varphi)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{v^i}{(s_i^1 + \xi)} + \frac{\partial u^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \partial \xi} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} - v^i +$$

$$+ \frac{\partial v^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \partial \xi} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\tan(\varphi)} - \frac{\partial w^i}{(s_i^1 + \xi) \partial \xi} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial w^i}{\partial \theta} + \frac{v^i}{\tan \varphi};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{SZ,0}^{(i)} &= \square_1^{(i)} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} \square_1^{(i)} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi} \square_2^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{(s_i^{-1} + \xi) \tan(\varphi)} ; i = t, b; \\ \varepsilon_{\theta z,0}^{(i)} &= \square_2^{(i)} + \frac{1}{(s_i^{-1} + \xi) \sin \varphi} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{1}{(s_i^{-1} + \xi) \sin \varphi} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\tan \varphi} \times \\ &\times \frac{v^{(i)}}{(s_i^{-1} + \xi) \tan(\varphi)} + \square_2^{(i)} + \frac{\square_1^{(i)}}{(s_i^{-1} + \xi) \sin \varphi} \frac{1}{\partial \theta} - v^{(i)} ; i = t, b. \end{aligned}$$

Геометрично нелінійна поведінка оболонок зумовлена значним розтягненням та зсувом серединної поверхні. Тому нелінійні доданки щодо переміщень у розкладанні (6) є доданками при нульовому степені z_i : $\varepsilon_{s,0}^{(i)}, \varepsilon_{\theta,0}^{(i)}, \varepsilon_{S\theta,0}^{(i)}, \varepsilon_{SZ,0}^{(i)}, \varepsilon_{\theta z,0}^c$. Ці нелінійні доданки представлені вище. Решта доданків розкладань (6) є лінійними функціями від переміщень. Вони надзвичайно громіздкі і не наводяться у тексті статті.

Потенційну енергію верхніх і нижніх шарів кінчної оболонки представимо так:

$$\begin{aligned} U_i = 0.5 \int_{A_i} & C_{11} \varepsilon_{SS}^{i2} + C_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^{i2} + 2C_{12} \varepsilon_{SS}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + 2C_{55} \varepsilon_{\theta Z}^{i2} + 2C_{44} \varepsilon_{SZ}^{i2} + 2C_{33} \varepsilon_{S\theta}^{i2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{z_i}{s_i^{-1} + \xi} \right) \sin \varphi d\xi d\theta dz_i ; i = t, b, \end{aligned} \quad (7)$$

де A_i – об'єм, який займає шар.

Розкладання (6) вводиться у (7) і здійснюється інтегрування за z_i . Тоді потенційна енергія набуває такого вигляду:

$$U_i = 0.5 \int_{A_i} \Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(4)} (s_i^{-1} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta ; i = t, b, \quad (8)$$

де $\Pi_i^{(0)} = C_{11}^{(0)} \varepsilon_{S,0}^{(i)2} + C_{22}^{(0)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)2} + 2C_{12}^{(0)} \varepsilon_{S,0}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + 2C_{55}^{(0)} \varepsilon_{\theta Z,0}^{(i)2} + 2C_{44}^{(0)} \varepsilon_{SZ,0}^{(i)2} + 2C_{33}^{(0)} \varepsilon_{S\theta,0}^{(i)2}$;

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(2)} = C_{11}^{(2)} & k_{S,0}^{(i)2} + 2k_{s,1}^{(i)} \varepsilon_{s,0}^{(i)} + \frac{2k_{s,0}^{(i)} \varepsilon_{s,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + C_{22}^{(2)} k_{\theta,0}^{(i)2} + 2k_{\theta,1}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + \frac{2k_{\theta,0}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + \\ & + 2C_{12}^{(2)} k_{S,0}^{(i)} k_{\theta,0}^{(i)} + k_{S,1}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + k_{\theta,1}^{(i)} \varepsilon_{S,0}^{(i)} + \frac{k_{s,0}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + \frac{k_{\theta,0}^{(i)} \varepsilon_{s,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + \\ & + 2C_{55}^{(2)} k_{\theta Z,0}^{(i)2} + 2k_{\theta z,1}^{(i)} \varepsilon_{\theta z,0}^{(i)} + \frac{2k_{\theta z,0}^{(i)} \varepsilon_{\theta z,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + 2C_{44}^{(2)} k_{SZ,0}^{(i)2} + \frac{2k_{sz,0}^{(i)} \varepsilon_{sz,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} + \\ & + 2C_{33}^{(2)} k_{S\theta,0}^{(i)2} + 2k_{s\theta,1}^{(i)} \varepsilon_{s\theta,0}^{(i)} + \frac{2k_{s\theta,0}^{(i)} \varepsilon_{s\theta,0}^{(i)}}{s_i \tan(\varphi)} ; \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_{ij}^{(k)} = \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} C_{ij} z^k dz.$$

Потенційна енергія гомогенізованого середнього шару набуває наступного вигляду:

$$U_c = 0.5 \int_{A_i} C_{11} \varepsilon_{SS}^c{}^2 + C_{22} \varepsilon_{00}^c{}^2 + C_{33} \varepsilon_{zz}^c{}^2 + 2C_{12} \varepsilon_{SS}^c \varepsilon_{00}^c + 2C_{13} \varepsilon_{SS}^c \varepsilon_{ZZ}^c + 2C_{23} \varepsilon_{00}^c \varepsilon_{ZZ}^c + 2C_{44} \varepsilon_{\theta Z}^c{}^2 + 2C_{55} \varepsilon_{SZ}^c{}^2 + 2C_{66} \varepsilon_{S\theta}^c{}^2 \times \\ \times \int_0^{z_c} \int_{s_c^1 + \xi}^{s_c^1 + \xi + \tan \varphi} d\xi d\theta dz_c. \quad (10)$$

Якщо розкладання (2, 3) ввести у (10) і зробити інтегрування за z_c , то потенційну енергію гомогенізованого шару можна представити у вигляді (8). В цьому випадку доданки $\Pi_i^{(0)}, \Pi_i^{(2)}, \Pi_i^{(4)}$ відрізняються від (9). Вони не наводяться для стислості викладу.

Кінетичну енергію кожного шару окремо можна представити у наступному вигляді:

$$T_i = 0.5 \int_{s_i^1 - 0.5h_i}^{s_i^2 + 0.5h_i} \rho_i (u_1^i{}^2 + u_2^i{}^2 + u_3^i{}^2) \int_0^{z_i} \int_{s_i^1 + \xi}^{s_i^1 + \xi + \tan \varphi} d\xi d\theta dz_i, \quad i = t, c, b, \quad (11)$$

де ρ_i – густина матеріалу конструкції; $u_1^i = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}$.

Розкладання (2), (3) введемо в кінетичні енергії (11) і зробимо інтегрування за z_i . В результаті отримаємо такі вирази для кінетичних енергій:

$$T_i = 0.5 \int_{s_i^1}^{s_i^2} (\Lambda_0^{(i)} + \Lambda_2^{(i)} + \Lambda_4^{(i)}) (s_i^1 + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta; \quad i = t, c, b, \quad (12)$$

де $\Lambda_0^{(i)} = \rho_i^{(0)} (u^{(i)2} + v^{(i)2} + w^{(i)2}); \quad i = t, c, b;$

$$\Lambda_2^{(c)} = \rho_c^{(2)} \left[\square_1^c{}^2 + 2u^{(c)}\psi_1^{(c)} + \frac{2u^{(c)}\square_1^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \frac{v^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(c)2} + 2v^{(c)}\psi_2^{(c)} + \frac{2v^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} \frac{v^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(c)} + w_1^c{}^2 + 2w^c w_2^c + \frac{2w^c w_1^c}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} \right]; \\ \Lambda_4^{(c)} = \rho_c^{(4)} \left[\psi_1^c{}^2 + 2\square_1^{(c)}\gamma_1^{(c)} + \frac{2u^{(c)}\gamma_1^{(c)} + 2\square_1^{(c)}\psi_1^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \psi_2^{(c)2} + 2\gamma_2^{(c)} \frac{v^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(c)} + \frac{2v^{(c)}\gamma_2^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \frac{2\psi_2^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} \frac{v^{(c)}}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(c)} + w_2^c{}^2 + \frac{2w_1^c w_2^c}{(s_c^1 + \xi)\tan(\varphi)} \right]; \\ \Lambda_2^{(i)} = \rho_i^{(2)} \left[\square_1^i{}^2 + 2u^{(i)}\psi_1^{(i)} + \frac{2u^{(i)}\square_1^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \frac{v^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(i)2} + 2v^{(i)}\psi_2^{(i)} + \frac{2v^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)\tan(\varphi)} \frac{v^{(i)}}{(s_i^1 + \xi)\tan(\varphi)} + \square_2^{(i)} \right];$$

$$\Lambda_4^{(i)} = \rho_c^{(4)} \Psi_1^{i2} + \frac{2 \square_1^{(i)} \Psi_1^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)} + \Psi_2^{(i)2} + \frac{2 \Psi_2^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)} \frac{v^{(i)}}{(s_i^1 + \xi) \tan(\varphi)} + \square_2^{(i)} ; i = t, b;$$

$$\rho_i^{(k)} = \rho_i z_i^k dz_i ; i = t, c, b.$$

$$-0.5h_i$$

Тиск, що діє на кінчну оболонку p в надзвуковому газовому потоці, описується поршневою теорією так [15]:

$$p = \frac{\gamma p_\infty M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \xi} \cos \beta + \frac{\partial w^{(t)}}{R(\xi) \partial \theta} \sin \beta + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w^{(t)}}{Ma_\infty} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial t} - \frac{w^{(t)}}{2R(\xi) M^2 - 1} , \quad (13)$$

де β – кут атаки; p_∞, M, γ – тиск потоку, число Маха і показник адіабати; a_∞ – швидкість звуку; $R \xi = (s_i^1 + \xi) \sin \varphi$.

Для аналізу автоколивань застосовується метод заданих форм [16]. Тоді задовольняються кінематичні граничні умови, а природні граничні умови не враховуються. Граничні умови на затиснутій стороні $s_i = s_i^1$ виглядають наступним чином:

$$w \Big|_{s_i = s_i^1} = v \Big|_{s_i = s_i^1} = u \Big|_{s_i = s_i^1} = \square_1 \Big|_{s_i = s_i^1} = \square_2 \Big|_{s_i = s_i^1} = 0. \quad (14)$$

Рівняння автоколивань. Виведемо нелінійну динамічну систему із скінченним числом степенів вільності, яка визначає автоколивання досліджуваної конструкції. Автоколивання розкладемо за власними формами лінійних коливань конструкції так:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} W_{i,j}(\xi) q_{i,j} t \cos n\theta + q_{i,j+N_w} t \sin n\theta + \sum_{j=1}^{N_w} W_{i,2j-1} \xi q_{i,2N_w+j} t ;$$

$$\square_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\square 1}} X_{i,j}(\xi) q_{i,N^w+j}(t) \cos n\theta + q_{i,N^w+N_{\square 1}+j}(t) \sin n\theta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_{\square 1}} X_{i,2j-1} \xi q_{i,N^w+2N_{\square 1}+j}(t);$$

$$\square_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\square 2}} Y_{i,j}(\xi) q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+j}(t) \cos n\theta + q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_{\square 2}+j}(t) \sin n\theta ;$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} U_{i,j}(\xi) q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_2^{(\square)}+j}(t) \cos n\theta + q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_2^{(\square)}+N_u+j}(t) \sin n\theta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_u} U_{i,2j-1}(\xi) \xi q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_2^{(\square)}+2N_u+j} t ; \quad (15)$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} V_{i,j} \xi \times$$

$$\times q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_2^{(\square)}+N_u+j} t \cos n\theta + q_{i,N^w+N_1^{(\square)}+N_2^{(\square)}+N_u+j} t \sin n\theta ,$$

$$i = t, c, b,$$

де \mathbf{q} – вектор узагальнених координат;

$$\mathbf{q} = q_{1,1}, \dots, q_{1,N^w + N_1^{\square} + N_2^{\square} + N^u + N^v}, \dots, q_{3,1}, \dots, q_{3,N^w + N_1^{\square} + N_2^{\square} + N^u + N^v} = q_1, \dots, q_{N^*};$$

N^* – число ступенів вільності конструкції; $N^{(w)} = 2N_w + N_w$; $N_1^{(\square)} = 2N_{\square 1} + N_{\square 1}$;

$N_2^{(\square)} = 2N_{\square 2}$; $N^{(u)} = 2N_u + N_u$; $N^{(v)} = 2N_v$; $W_{ij} \xi, X_{ij} \xi, Y_{ij} \xi, U_{ij} \xi, V_{ij} \xi$ –

власні форми коливань конструкції.

Підкреслимо, що в автоколиваннях (15) крім сполучених форм коливань присутні осесиметричні форми коливань. Вони завжди спостерігаються при геометричному нелінійному деформуванні конструкції [17].

Розкладання (15) введемо в (8), (10) і зробимо необхідне інтегрування. В результаті потенційну енергію отримаємо у вигляді полінома щодо узагальнених координат. Цей поліном представимо так:

$$U_{\Sigma} = \mathfrak{L}_2 \mathbf{q} + \mathfrak{L}_3 \mathbf{q} + \mathfrak{L}_4 \mathbf{q}, \quad (16)$$

де $\mathfrak{L}_i \mathbf{q}$ – сума поліномів степеня i щодо узагальнених координат. Подання (15) введемо до (12) і зробимо інтегрування. Тоді кінетична енергія набуде наступного вигляду:

$$T_{\Sigma} = \mathfrak{S}_2 \mathbf{q}, \quad (17)$$

де $\mathfrak{S}_2 \mathbf{q}$ – квадратичний поліном щодо узагальнених швидкостей.

Знайдемо узагальнені сили, що відповідають аеродинамічному тиску (13). Віртуальну роботу представимо так:

$$\delta A = - \int_0^{s_t^1} \delta w^t s_t^1 + \xi \sin \varphi d\theta d\xi = \sum_{j=1}^{N^w} Q_j \delta q_j, \quad (18)$$

де δw^t – віртуальне переміщення; Q_j – узагальнена сила.

Подання (15) введемо до (18). Тоді узагальнені сили представимо у такому вигляді:

$$Q_{1,j_1} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1,j}^1 q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1,j}^1 q_{1,j}; Q_{1,j_1+N_w} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1+N_w,j}^1 q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1+N_w,j+N_w}^1 q_{1,j+N_w};$$

$$j_1 = 1, \dots, N_w;$$

$$Q_{1,2N_w+j_1} = \sum_{j=1}^{N_w} G_{2N_w+j_1,2N_w+j}^{(1)} q_{1,2N_w+j} + \Gamma_{2N_w+j_1,2N_w+j}^{(1)} q_{1,2N_w+j}; j_1 = 1, \dots, N_w.$$

Використовуємо співвідношення (16) – (18). Тоді рівняння Лагранжа запишемо так:

$$m_{ij} q_j + K_{ij} q_j = \sum_{v=1}^{N^*} \alpha_{vj}^{(i)} q_v q_j + \sum_{v=1}^{N^*} \sum_{j_1=1}^v \beta_{vj_1}^{(i)} q_v q_j q_{j_1} + Q_i, \quad (19)$$

де m_{ij} , K_{ij} – матриці мас і жорсткості; $\alpha_{vj}^{(i)}$, $\beta_{vj_1}^{(i)}$ – величини, що залежать від параметрів конструкції.

Динамічну систему (19) представимо у наступному матричному вигляді:

$$\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathfrak{R}_2 \mathbf{q} + \mathfrak{R}_3 \mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{q}, \quad (20)$$

де \mathbf{G} – матриця аеродинамічної жорсткості; $\mathbf{\Gamma}$ – матриця аеродинамічного демпфування; $\mathfrak{R}_2 \mathbf{q}$, $\mathfrak{R}_3 \mathbf{q}$ – суми квадратичних та кубічних поліномів щодо узагальнених координат.

Як показують результати числового моделювання системи (20), більшість елементів матриці \mathbf{M} є близькими до нуля. Це пов'язано з тим, що верхній і нижній шари дуже тонкі, а середній шар має малу густину. Щоб описати цей факт, основні матриці та вектори системи (20) представимо так:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}; \mathbf{q} = \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2^T; \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2^T; \\ \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_3^T.$$

Тоді наступні елементи матриці, які дуже малі, можна вважати нульовими: $\mathbf{M}_{21} \equiv \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_{22} \equiv \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}$. Систему рівнянь (20) представимо так:

$$\mathbf{M}_{11}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{q}_2 = \mathfrak{R}_2 \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + \mathfrak{R}_3 \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{q}; \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{q}_2 = \mathfrak{R}_2 \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + \mathfrak{R}_3 \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2. \quad (22)$$

З рівнянь (22) впливає такий зв'язок між узагальненими координатами:

$$\mathbf{q}_2 = \beta(\mathbf{q}_1) = \mathbf{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{R}_2 \mathbf{q}_1; -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{R}_3 \mathbf{q}_1; -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 \quad (23)$$

Співвідношення (23) введемо у динамічну систему (21). В результаті отримаємо:

$$\mathbf{M}_{11}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathfrak{R}_2 \mathbf{q}_1 + \mathfrak{R}_3 \mathbf{q}_1 + \mathbf{G}\mathbf{q}_1 + \mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_1, \quad (24)$$

де $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}$.

Для дослідження періодичних автоколивань динамічної системи (24) скористаємося поєднанням методу пристрілювання та методу продовження [18]. З використанням цього підходу чисельно досліджуємо періодичні коливання та їх біфуркації. Для аналізу стабільності періодичних коливань розраховуються мультиплікатори [18].

Числовий аналіз автоколивань. Розглянемо консольну оболонкову конструкцію. На затиснутій стороні виконуються граничні умови (15), а на вільній стороні – силові граничні умови. Їх можна не враховувати у подальшому аналізі [16]. Стільниковий заповнювач виготовлений за допомогою адитивних технологій FDM з матеріалу ULTEM 9085. Механічні параметри матеріалу ULTEM 9085 визначалися експериментально. Результати цих експериментів представлені у статті [19]. Стільниковий заповнювач (рис. 1) замінювався ортотропним гомогенізованим середовищем. Проводилося скінченно-елементне моделювання стільникового заповнювача для визначення механічних властивостей ортотропного гомогенізованого середовища. Це моделювання докладно описано у роботах [12, 13]. Тут ми не будемо розглядати цей підхід, а наведемо результати моделювання механічних властивостей. Геометричні параметри комірки стільникового заповнювача (рис. 1) приймалися такими:

$$l_1=6.1054 \text{ мм}; l_2=3.0527 \text{ мм}; \theta=60^\circ; l_c=10 \text{ мм}; h_c=0.4 \text{ мм},$$

де h_c – товщина стінки стільникового заповнювача; l_c – висота стільникового заповнювача.

Механічні характеристики гомогенізованого стільникового заповнювача приймають такі числові значення:

$$E_{11}=2.91 \text{ МПа}; E_{22}=2.91 \text{ МПа}; E_{33}=215.10 \text{ МПа}; \nu_{12}=0.972; \nu_{23}=0.0051; \\ \nu_{13}=0.0042; G_{12}=1.118 \text{ МПа}; G_{23}=39.1 \text{ МПа}; G_{13}=39.1 \text{ МПа}; \rho_c=253.189 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Верхній та нижній шари виготовлялися з вуглепластику, який відповідає закону Гука у формі (1). Інженерні константи цього матеріалу такі:

$$E_x=160 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_y=6.8 \cdot 10^9 \text{ Па}; \nu_{xy}=0.32; \nu_{yx}=0.0136; G_{xy}=800 \cdot 10^9 \text{ Па}; \\ G_{xz}=G_{yz}=4 \cdot 10^9 \text{ Па}; \rho_t=\rho_b=1400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Геометричні параметри конструкції приймалися такими:

$$\varphi=\frac{\pi}{12}; s_t^{(1)}=2.354 \text{ м}; s_c^{(1)}=2.33 \text{ м}; s_b^{(1)}=2.313 \text{ м}; h_t=h_b=10^{-3} \text{ м}; h_c=10^{-2} \text{ м}.$$

Параметри надзвукового потоку (13) такі: $\gamma=1.4$; $a_\infty=213.36 \text{ м с}$; $\beta=0$.

Розглянемо результати числового моделювання автоколивань, що виникають при взаємодії надзвукового потоку з тришаровою конічною оболонкою при її геометричному нелінійному деформуванні. При числовому аналізі нелінійних коливань у розкладанні (15) приймалося $N_w=N_{\square_1}=N_{\square_2}=N_u=N_v=3$; $N_w=N_{\square_1}=N_u=1$. Нелінійна динамічна система (24), що описує автоколивання, містить 21 степінь вільності. Ця динамічна система досліджується чисельно за допомогою алгоритму, в якому поєднується метод пристрілювання та алгоритм продовження розв'язку. Результати моделювання усталеної динамічної поведінки конструкції показуються на біфуркаційній діаграмі (рис. 2), де представлена залежність $\max(q_1, h_c)$ від p_∞ . Стійкі усталені стани позначені суцільною лінією, а нестійкі – пунктирною.

Розглянемо динамічну поведінку конструкції (рис. 2). За будь-якого значення p_∞ спостерігається тривіальний стан рівноваги, який описується прямою AB . У точці H спостерігається біфуркація Хопфа [18]. Внаслідок цієї біфуркації стійкий стан рівноваги AH перетворюється на нестійку рівновагу HV та відокремлюються стійкі автоколивання, які описуються кривою HN_s . В точці N_s спостерігається біфуркація Неймарка–Сакера [18]. Тоді стійкий граничний цикл стає нестійким і у точці N_s відокремлюються стійкі квазіперіодичні коливання. Амплітуди таких квазіперіодичних коливань описуються кривою N_sD . Квазіперіодичні коливання при $p_\infty = 13 \cdot 10^5 \text{ Па}$ показуються на рис. 3.

Для аналізу квазіперіодичних коливань розраховуються перерізи Пуанкаре. Для цього будуються точки перерізу траєкторій у фазовому просторі динамічної системи (24) з поверхнею Σ : $\Sigma = \{q_1, \dots, q_{21}, q_1, \dots, q_{21} \in R^{42} \mid q_1=0; q_1>0\}$. Переріз Пуанкаре квазіперіодичної траєкторії при $p_\infty = 10 \cdot 10^5 \text{ Па}$ на площині q_9, q_9 представлений на рис. 4. Вид перерізів Пуанкаре свідчить про те, що у системі спостерігається

інваріантний тор. Такий інваріантний тор спостерігається на всій ділянці $N_S D$ квазіперіодичних рухів.

Як впливає з рис. 2, амплітуди квазіперіодичних коливань значно більші за амплітуди періодичних коливань. Тому такі квазіперіодичні коливання можуть бути більш небезпечні з точки зору втомної міцності конструкції, ніж періодичні.

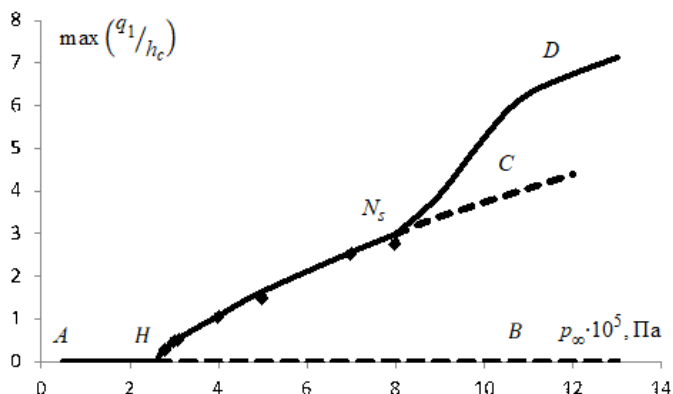


Рис. 2 – Біфуркаційна діаграма автоколивань консольної оболонки при $M=1.5$



Рис. 3 – Коливання $q_1(t)$ при $p_\infty = 13 \cdot 10^5$ Па

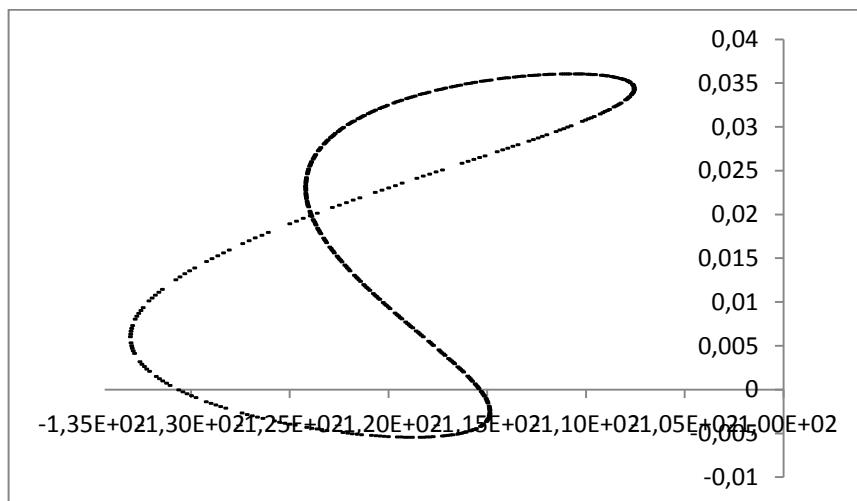


Рис. 4 – Перерізи Пуанкаре при $p_\infty = 10 \cdot 10^5$ Па

Проводилося числове моделювання автоколивань при $p_\infty = 9 \cdot 10^5$ Па та зміні числа Маха M . Біфуркаційна діаграма таких автоколивань наводиться на рис. 5, де показується залежність $\max q_1/h_c$ від числа Маха. В точці NS_* спостерігалася біфуркація Неймарка–Сакера, внаслідок якої нестійкі автоколивання A_*NS_* перетворюються на стійкі NS_*C_* та відокремлюються стійкі квазіперіодичні коливання. Амплітуди таких автоколивань позначаються кривою NS_*B_* . При зменшенні числа Маха стійкі квазіперіодичні коливання трансформуються на хаотичні. Хаотичні автоколивання $q_1(t)$ при $M=1.45$ показуються на рис. 6. Дивний атрактор таких автоколивань на площині q_9, q_9 вказується на рис. 7. Як впливає з рис. 5, в області квазіперіодичних та хаотичних автоколивань спостерігається різке збільшення амплітуд автоколивань.

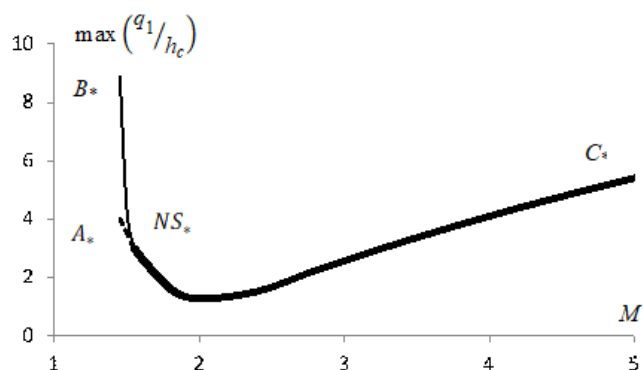


Рис. 5 – Біфуркаційна діаграма автоколивань при $p_\infty = 9 \cdot 10^5$ Па



Рис. 6 – Хаотичні автоколивання $q_1(t)$ при $M=1.45$

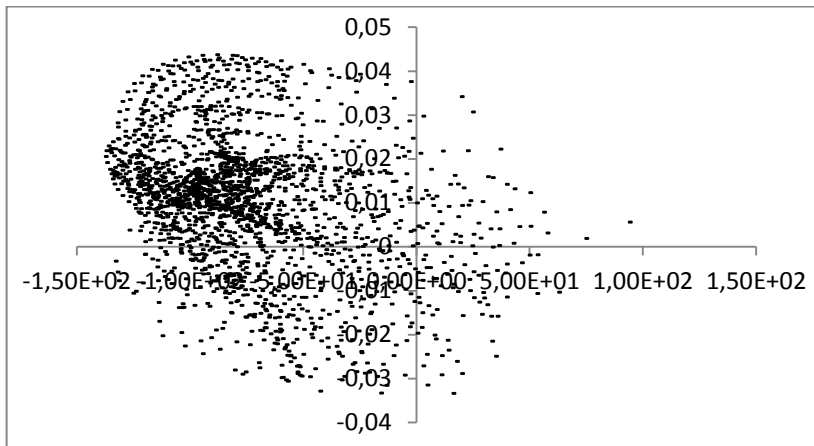


Рис. 7 – Дивний атрактор хаотичних автоколивань при $M=1.45$

Висновки. Розроблено нелінійну математичну модель автоколивань тришарових конічних оболонки із стільниковим заповнювачем, виготовленим адитивними технологіями. У цій моделі враховується геометрично нелінійне деформування композитної конструкції та її взаємодія з надзвуковим газовим потоком. Деформаційна поведінка кожного шару описується п'ятьма змінними: трьома проєкціями переміщень серединної поверхні шару та двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні. Для опису напруженого стану використовується теорія зсуву високого порядку. Для отримання нелінійної математичної моделі використовується метод заданих форм, у якому нелінійні автоколивання розкладаються за формами лінійних коливань.

Для дослідження періодичних коливань, їх стійкості та біфуркацій застосовується поєднання методу продовження та методу пристрілювання. Для оцінки стабільності періодичних коливань розраховуються мультиплікатори.

У консольній оболонці спостерігається втрата стійкості тривіального стану рівноваги внаслідок біфуркації Хопфа та відокремлення стійких автоколивань. Спостерігається біфуркація Неймарка–Сакера. В результаті цієї біфуркації періодичні автоколивання перетворюються на квазіперіодичні. Чисельно встановлено, що останні можуть перетворюватися на хаотичні.

Для аналізу квазіперіодичних та хаотичних автоколивань розраховувалися перерізи Пуанкаре. Вид перерізів Пуанкаре свідчить про те, що при квазіперіодичних коливаннях у системі спостерігається інваріантний тор. Амплітуди квазіперіодичних і хаотичних коливань значно більші за амплітуди періодичних коливань. Тому такі квазіперіодичні коливання можуть бути більш небезпечні з точки зору втомної міцності конструкції ніж періодичні.

Фінансування. Дослідження було фінансовано Національним фондом досліджень України (проект 128/02.2020).

1. Karimiasl M., Ebrahimi F. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. *Thin-Walled Structures*. 2019. V.144. 106128. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.020>
2. Karimiasla M., Ebrahimia F., Maheshb V. Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. *Thin-Walled Structures*. 2019. V.143. 106152. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.044>

3. Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., Duc N. D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Composite Structures*. 2018. V185. P. 455–465. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.047>
4. Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R. Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2021. V. 510. 116283. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116283>
5. Van Quyen N., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. V. 162. 107571. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571>
6. Zhang Y., Li Y. Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Composite Structures*. 2019. V. 221. 110884. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.056>
7. Naidu N. V. S., Sinha P. K. Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments. *Composite Structures*. 2007. 77. P. 475–483. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.08.002>
8. Li C., Shen H.-S., Wang H., Yu Z. Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. V. 174. 105472. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105472>
9. Гудрамович В. С., Деменков А. Ф. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. К.: Наук. думка, 1991. 176 с.
10. Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М. Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів. Львів: Простір-М, 2017. 492 с.
11. Гудрамович В. С. Міцність, надійність і ресурс конструкцій ракетно-космічної техніки і енергетики. *Технічна механіка*. 2021. № 2. С. 100–106. <https://doi.org/10.15407/itm2021.02.100>
12. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Comp. Struct*. 2014. V. 118. P. 664–676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057>
13. Grediac M. A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores. *Int. J. of Solids and Struc.* 1993. V. 30. P. 1777–1788. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90233-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90233-W)
14. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: ОГИЗ, 1948. 211 с.
15. Bakhtiarı M., Lakis A. A., Kerboua Y. Nonlinear supersonic flutter of truncated conical shells. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2020. V. 34 (4). P. 1375–1388. <https://doi.org/10.1007/s12206-020-0301-6>
16. Meirovitch L. *Fundamentals of Vibrations*. Mc Graw Hill. 2001. 826 p.
17. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*: Cambridge University Press; 2018. <https://doi.org/10.1017/9781316422892>
18. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. т. 1. Модели, методы, явления, М.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. 704 с.
19. Деревянко І. І., Аврамов К. В., Успенський Б. В., Саленко О. Ф. Експериментальний аналіз механічних характеристик деталей ракет-носіїв, виготовлених за допомогою FDM адитивних технологій. *Технічна механіка*. 2021. №1. С. 92–100. <https://doi.org/10.15407/itm2021.01.092>

Отримано 26.01.2022,
в остаточному варіанті 21.06.2022