УДК 534.12:621.642.2

Н. Е. НАУМЕНКО, М. Б. СОБОЛЕВСКАЯ, С. А. СИРОТА, А. Д. НИКОЛАЕВ, И. Д. БАШЛИЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ

Баки, частично заполненные жидкостью, являются неотъемлемой составной частью многих современных объектов транспортного машиностроения, авиационной и ракетно-космической техники. При движении таких объектов интенсивные внешние воздействия приводят к появлению колебаний жидкости, сопровождающихся различными нелинейными эффектами, которые оказывают существенное влияние на динамику конструкций. В статье приведены результаты экспериментальных исследований и конечно-элементного моделирования пространственных колебаний свободной поверхности жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке при гармоническом возбуждении конструкции бака. Цель исследований – определение закономерностей нелинейного поведения жидкости. Для экспериментального определения собственных пространственных колебаний свободной поверхности жидкости в баке использован метод свободных колебаний. Математическое моделирование проведено с помощью метода конечных элементов. Определены собственные частоты и формы доминирующих тонов (поперечных и продольных) колебаний свободной поверхности жидкости в зависимости от уровня заполнения бака. При немалых амплитудах колебаний свободной поверхности жидкости исследованы явления, связанные с проявлением нелинейных свойств системы “конструкция бака – жидкость”: ограничение амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости; асимметрия профиля волны и разрывы сплошности жидкой среды, находящейся во взаимодействии со стенками полости; круговые колебательные движения. Установлено, что полученные путем математического моделирования собственные частоты и формы колебаний свободной поверхности жидкости удовлетворительно согласуются с данными проведенных экспериментов. Показано, что математическое моделирование пространственных колебаний позволяет определить причины возникновения сложных форм колебаний свободной поверхности жидкости.

Баки, частково заповнені рідиною, є невід’ємною складовою частиною багатьох сучасних об’єктів транспортного машинобудування, авіаційної та ракетно-космічної техніки. При русі таких об’єктів інтенсивне зовнішнє збудження призводить до появи коливань рідини, що супроводжуються різними нелінійними ефектами, які мають істотний вплив на динаміку конструкцій. У статті наведено результати експериментальних досліджень та скінченно-елементного моделювання просторових коливань вільної поверхні рідини в горизонтально розташованому баку циліндричної форми при гармонічному збудженні конструкції бака. Мета досліджень – визначення закономірностей нелінійної поведінки рідини. Для експериментального визначення власних просторових коливань вільної поверхні рідини в баку використаний метод вільних коливань. Математичне моделювання проведено за допомогою методу скінченних елементів. Визначено власні частоти і форми тих тонів (поперечних і поздовжніх) коливань вільної поверхні рідини, що домінують, у залежності від рівня заповнення бака. При немалих амплітудах коливань вільної поверхні рідини досліджено явища, пов’язані з проявом нелінійних властивостей системи “конструкція бака – рідина”: обмеження амплітуд коливань вільної поверхні рідини; асиметрія профілю хвилі та розриви суцільності рідкого середовища, що знаходиться у взаємодії зі стінками порожнини; кругові коливальні рухи. Встановлено, що отримані шляхом математичного моделювання власні частоти і форми коливань вільної поверхні рідини задовільно узгоджуються з даними проведених експериментів. Показано, що математичне моделювання просторових коливань дозволяє визначити причини виникнення складних форм коливань вільної поверхні рідини.

Incompletely filled tanks are an integral part of many existing objects of transport machine-building and aerospace engineering. In the motion of these objects active environmental effects lead to fluid oscillations accompanied by various nonlinear effects affecting strongly the dynamics of structures. The results of the experimental research and finite-element simulation of spatial oscillations of the free surface of a fluid inside the horizontal cylindrical tank in harmonic exciting the tank are presented. The research aim is to find regularities of a nonlinear fluid behavior. For the experimental determination of spatial natural oscillations of the free surface of a fluid inside the tank the method of free oscillations is employed. Mathematical modeling is performed using the finite-element method. Natural frequencies and shapes of dominant modes (lateral and longitudinal) of slosh oscillations inside the tank depending on its filling level are determined. The phenomena associated with nonlinear properties of the system of the tank structure and a liquid (limitation of slosh amplitudes; wave profile asymmetry and the continuity gaps of the liquid interacted with tank walls; circular oscillatory motions) are studied. It is found that the results obtained by mathematical modeling natural frequencies and modes of oscillations of the free surface of a liquid are in satisfactory agreement with experimental data. It is shown that mathematical modeling spatial oscillations results in the determination of causes for occurring complex modes of oscillations of the free surface of a liquid.

Ключевые слова: *свободная поверхность жидкости, цилиндрический*

бак, пространственные колебания, нелинейный эффект, собственная частота, экспериментальные исследования, математическое моделирование, метод конечных элементов.

Введение. Значительное количество своих работ академик В. В. Пилипенко посвятил решению нелинейных задач динамики жидкостных ракет и жидкостных ракетных двигателей [1, 2]. При этом особый акцент ставился на экспериментальные и теоретические исследования нелинейных процессов и явлений в жидкости, разработку методов обеспечения устойчивости гидромеханических систем. Этим проблемам уделено существенное внимание в развитой им теории кавитационных колебаний гидравлических систем и в теории продольных колебаний жидкостных ракет-носителей.

Под руководством Пилипенко В. В. в отделе динамики многомерных механических систем Института технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины (ИТМ НАНУ и ГКАУ) разработана математическая модель взаимодействия жидкости с упругим трубопроводом [3]. Проведены исследования неустановившегося режима движения закрученного потока жидкости в трубопроводе, в том числе содержащем кавитационную полость, которая расположена по оси потока, с учетом запаздывания по времени между изменением давления на стенках трубопровода и изменением площади кавитационной полости [4]. Сопоставление результатов выполненных расчетов с экспериментальными данными [5] позволило определить значения приведенного коэффициента линейного трения на единицу длины трубопровода и найти зависимость этого коэффициента от числа кавитации.

Академик В. В. Пилипенко принимал участие в решении задач динамики конструкций, содержащих емкости, частично заполненные жидкостью. Баки с жидкостью являются неотъемлемой составной частью многих современных объектов транспортного машиностроения, авиационной и ракетно-космической техники. Известно, что при движении конструкций, содержащих полости, частично заполненные жидкостью, интенсивные внешние, в том числе ударные, воздействия приводят к появлению немалых колебаний жидкости, сопровождающихся различными нелинейными эффектами, которые оказывают существенное влияние на динамику конструкций. Для уменьшения этого влияния при решении ряда задач, в том числе задач гидродинамики ракет-носителей на жидком топливе [1, 2], динамики вагонов-цистерн для перевозки экологически опасных жидких грузов [6] и т. д. необходимы исследования немалых колебаний жидкости в баках. В лаборатории моделирования гидродинамических систем отдела динамики многомерных механических систем ИТМ НАНУ и ГКАУ выполнен ряд уникальных экспериментов [7] по изучению поведения жидкости в баках различной конфигурации, в том числе с внутрибаковыми элементами, при гармонических и ударных возмущениях с учетом разных уровней заполнения баков жидкостью. В результате проведенной работы исследованы характеристики собственных и вынужденных колебаний жидкости в баках сложной конфигурации, выявлены нелинейные эффекты, многие из которых пока не имеют теоретического обоснования. В настоящее время существует ряд математических методов определения гидродинамических коэффициентов для полостей сравнительно простой геометрической конфигурации [8, 9]. Полученные экспериментальные результаты стимулируют развитие дальнейших теоретических исследований нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости, а также динамики конструкций, содержащих емкости с жидкостью, особенно в части построения адекватных математических моделей и оценки границ применимости приближенных методов расчета [10 – 12].

Постановка задачи. Данная статья посвящена экспериментальному и теоретическому изучению колебаний свободной поверхности жидкости в горизонтально расположенном баке цилиндрической формы для определения закономерностей нелинейного поведения жидкости при вынужденном возбуждении конструкции этого бака.

В качестве объекта исследований выбран горизонтально расположенный цилиндрический бак с плоскими днищами, частично заполненный жидкостью (рис. 1). Диаметр бака – 265 мм, его длина – 950 мм, толщина стенок – 10 мм.

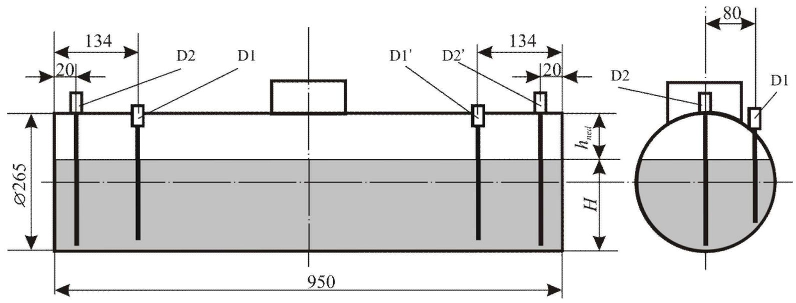


Рис. 1

На рис. 1 показаны места установки датчиков уровня D1, D1′, D2, D2′. Штрихами обозначены одноименные датчики, расположенные симметрично.

Экспериментальные исследования выполнены с использованием стенда, обеспечивающего кинематическое синусоидальное возбуждение бака в горизонтальном направлении с частотой от 0 до 3 Гц и амплитудой 2,7 мм. Исследованы колебания свободной поверхности жидкости, возбуждаемые как вдоль, так и поперек продольной оси бака для различных уровней его заполнения (*H*). Рассмотрены нелинейные эффекты, возникающие в резонансных зонах и при взаимодействии жидкости с верхней частью полости.

Экспериментальные исследования собственных пространственных колебаний свободной поверхности жидкости в баке. Для определения собственных пространственных колебаний свободной поверхности жидкости в баке использован метод свободных колебаний [7].

На рис. 2 приведены экспериментальные и расчетные зависимости частот свободных колебаний жидкости от уровня недолива бака. На рис. 2 показаны экспериментально найденные зависимости собственных частот первых трех асимметричных тонов продольных колебаний свободной поверхности жидкости, возбуждаемых вдоль продольной оси бака (линии F_1^x, F_3^x, F_5^x), второго симметричного тона продольных колебаний (линия F_4^x), возбуждаемого вдоль продольной оси бака, а также частоты первого поперечного тона колебаний (линия F_1^y), возбуждаемого поперек продольной оси бака, от величины h_{ned}/R (h_{ned} – уровень недолива, который измеряется от верхней образующей цилиндрического бака (рис. 1); R – радиус бака).

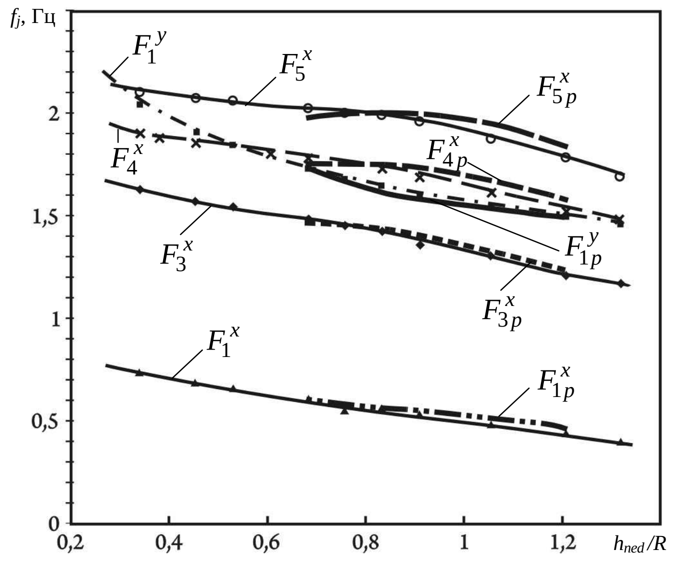


Рис. 2

На рис. 2 также приведены полученные с использованием метода конечных элементов расчетные зависимости собственных частот свободных колебаний жидкости в баке от величины h_{ned}/R. Они обозначены соответствующими линиями с индексом p (линии F_{1p}^x, F_{3p}^x, F_{5p}^x, F_{4p}^x, F_{1p}^y). Более подробное описание выполненных расчетов будет приведено далее.

При экспериментальном исследовании поперечных колебаний жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке, кроме четко выраженного первого тона асимметричных поперечных колебаний жидкости, наблюдался и второй тон ее симметричных колебаний вдоль продольной оси бака. Это было обусловлено тем, что согласно результатам, приведенным на рис. 2, частота первого тона поперечных (линия F_1^y) и второго тона симметричных продольных (линия F_4^x) колебаний жидкости достаточно близки.

Как видно из зависимостей, приведенных на рис. 2, частоты собственных колебаний жидкости уменьшаются при уменьшении уровня заполнения бака. Близость собственных частот продольных и поперечных колебаний жидкости в указанном диапазоне изменения уровня заполнения емкости при возбуждении поперечных колебаний жидкости в окрестности основного резонанса приводит к появлению ярко выраженных нелинейных эффектов, заключающихся в образовании зон вращения на свободной поверхности жидкости.

Расчет параметров собственных колебаний свободной поверхности жидкости в баке. Расчетные параметры собственных колебаний исследуемой динамической системы "конструкция бака – жидкость" определены методом конечных элементов с помощью CAD/CAE средств [13 – 14]. На рис. 3 приведена схема конечно-элементной дискретизации бака с жидкостью, который представлен в виде упругой тонкостенной цилиндрической оболочки (рис. 3), частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся в поле массовых сил.

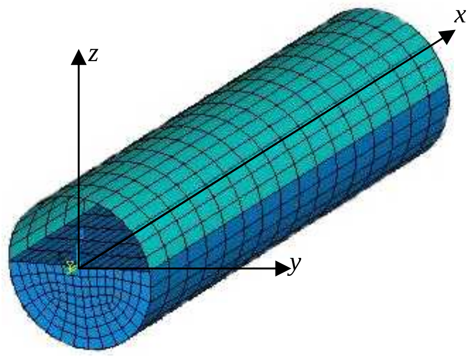


Рис. 3

При этом свободная поверхность жидкости представлена плоскостью, перпендикулярной градиенту поля массовых сил. Влияние сил поверхностного натяжения в расчетах не учитывалось. В разработанной конечно-элементной модели системы "конструкция бака – жидкость" заданы условия совместности деформаций сопряженных поверхностей раздела жидкой и твердой сред с учетом скольжения жидкости относительно стенок бака.

Параметры колебаний жидкости в баке определялись на основе линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания консервативной системы "конструкция бака – жидкость"

$$M\,\frac{d^2U}{dt^2} + K\,U = 0\,, \qquad (1)$$

где U – вектор перемещений; K – матрица упругости; M – матрица масс; t – текущее время.

Путем решения системы уравнений (1) определены параметры колебаний: собственные частоты f_{lj} и эффективные (обобщенные) массы M_{lj}, соответствующие j-й форме колебаний в проекции на направление l (в продольном направлении $l = x$, в поперечном – $l = y$).

При анализе колебаний жидкости доминирующими колебательными движениями будем считать те, которые имеют существенные (превышающие сотую долю от массы жидкости) значения эффективных масс системы. На рис. 2 показаны полученные расчетные зависимости собственных частот первых четырех продольных (доминирующих) тонов колебаний свободной поверхности жидкости (линии F_{1p}^{x}, F_{3p}^{x}, F_{5p}^{x}, F_{4p}^{x}), а также зависимости собственной частоты колебаний первого поперечного (доминирующего) тона свободной поверхности жидкости (линия F_{1p}^{y}) от величины h_{ned}/R.

Расчетные параметры колебаний системы "конструкция бака – жидкость", обусловленные движением свободной поверхности жидкости в баке, для h_{ned}/R = 0,91 приведены в таблицах 1 и 2. В табл. 1 и 2 используется нумерация тонов колебаний в порядке возрастания собственных частот исследуемой системы "конструкция бака – жидкость" в рассматриваемом диапазоне частот. Данная нумерация отличается от традиционной нумерации [8], принятой при использовании двумерных моделей для анализа колебательных движений системы в продольном или поперечном направлениях.

Табл. 1 – Частоты и эффективные массы колебаний свободной поверхности жидкости в продольном направлении *x*

Номер тона колебаний	Параметры колебаний свободной поверхности жидкости	
j	f_{xj}, Гц	M_{xj}, кг
1	0,55	$2{,}10\cdot10^{-2}$
2	1,02	$1{,}20\cdot10^{-14}$
3	1,41	$1{,}57\cdot10^{-3}$
4	1,72	$4{,}60\cdot10^{-14}$
5	1,99	$3{,}24\cdot10^{-4}$
6	2,23	$4{,}60\cdot10^{-15}$
7	2,46	$8{,}50\cdot10^{-2}$
8	2,68	$1{,}30\cdot10^{-13}$
9	2,99	$2{,}00\cdot10^{-2}$

Табл. 2 – Частоты и эффективные массы колебаний свободной поверхности жидкости в поперечном направлении *y*

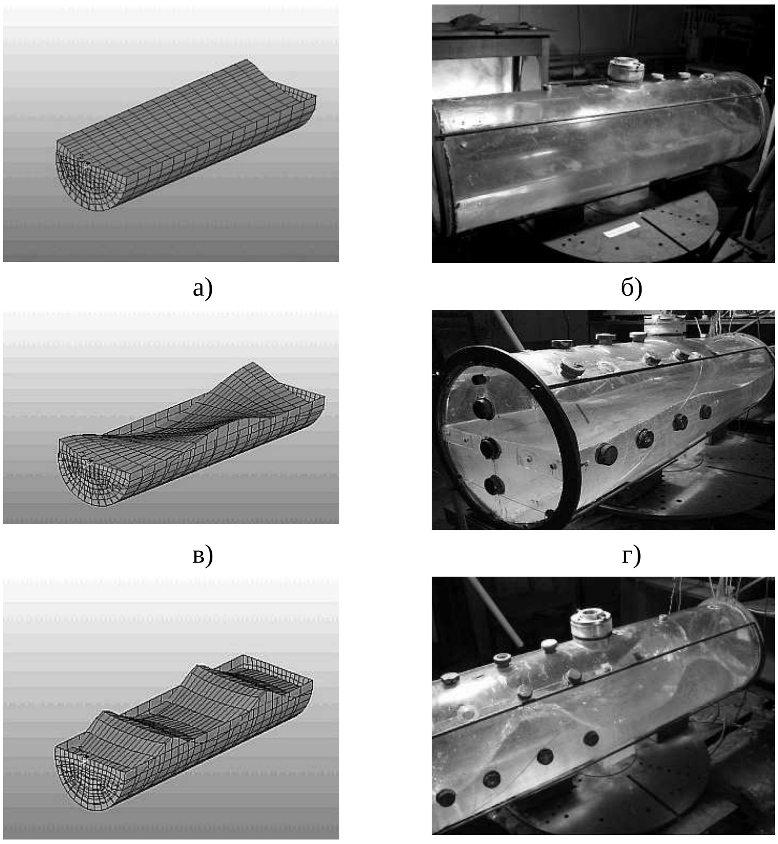
Номер тона колебаний	Параметры колебаний свободной поверхности жидкости	
j	f_{yj}, Гц	M_{yj}, кг
1	0,55	$7{,}56\cdot10^{-13}$
2	1,24	$1{,}22\cdot10^{-13}$
3	1,41	$1{,}63\cdot10^{-14}$
4	1,55	$1{,}38\cdot10^{+1}$
5	1,58	$9{,}04\cdot10^{-12}$
6	1,67	$1{,}33\cdot10^{-4}$
7	1,72	$4{,}02\cdot10^{-15}$
8	1,81	$5{,}84\cdot10^{-15}$
9	1,97	$6{,}38\cdot10^{-5}$
10	1,99	$6{,}38\cdot10^{-14}$

Как видно из зависимостей, приведенных на рис. 2, результаты математического моделирования свободных колебаний системы “конструкция бака – жидкость” в удовлетворительной степени совпадают с данными описанных выше экспериментов.

Исследование пространственных колебаний свободной поверхности жидкости при гармоническом воздействии. Практически все формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости, полученные при решении системы уравнений (1), наблюдались в эксперименте при поперечных колебаниях модели бака с последовательным возрастанием частоты вынужденных колебаний от 1,4 Гц до 2,0 Гц. На рис. 4 представлены расчетные (рис. 4, а, в, д) и экспериментальные (рис. 4, б, г, е) формы пространственных колебаний свободной поверхности жидкости с частотами соответственно 1,55 Гц (поперечные (рис. 4, а, б)), 1,67 Гц (смешанные (рис. 4, в, г)) и 1,72 Гц (продольные (рис. 4, д, е)) при h_{ned}/R = 0,91.

Следует отметить, что колебаниям свободной поверхности жидкости со сложными формами (рис. 4 в, г) соответствуют весьма малые значения эффективных масс (см., например, тоны колебаний 6 – 10 в табл. 2). Поэтому эти колебательные движения в поперечном направлении не рассматривались как доминирующие. Появление немалых (визуально наблюдаемых) колебаний свободной поверхности жидкости может произойти лишь при довольно значительной амплитуде внешнего воздействия. Однако в проведенных экспериментах амплитуды гармонического возбуждения исследуемой системы “конструкция бака – жидкость” были ограничены возможностями кинематической схемы стенда.

Реализация вышеуказанных колебательных движений (с частотами недоминирующих тонов колебаний) в исследуемой динамической системе “конструкция бака – жидкость” была осуществлена путем резонансного возбуждения доминирующих колебаний, развиваемых при поперечном гармоническом воздействии, с последующим “переходом” при значительном уровне амплитуд к колебаниям с частотами недоминирующих тонов. Из проведенных расчетов и экспериментов (см. табл. 2 и рис. 4 (г, е)) следует, что та-



а) б)

в) г)

д) е)

Рис. 4

кое резонансное возбуждение системы (с немалыми амплитудами) возможно при близких частотах доминирующих тонов колебаний (см. тон 4 в табл. 2) и недоминирующих тонов (см. тоны 6 – 10 в табл. 2 и тоны 4 – 6 в табл. 1).

При поперечном гармоническом возбуждении модели бака на частоте 1,55 Гц в эксперименте отчетливо наблюдались немалые колебания свободной поверхности жидкости (рис. 4, б) с частотой первого поперечного тона, который соответствует полученному в расчете тону колебаний 4 с эффективной массой 13,8 кг (табл. 2). При увеличении частоты поперечного гармонического возбуждения системы до 1,67 Гц в экспериментах наблюдались немалые колебания свободной поверхности жидкости с тонами колебаний 6 и 7 (табл. 2). Вследствие близости частот этих тонов к частоте тона 4 продольных колебаний (табл. 1) были визуализированы периодические движения смешанной формы (рис. 4, г). После снятия возбуждения поперечные колебания свободной поверхности жидкости быстро затухали. При этом наблюдались устойчивые продольные колебания (рис. 4, е) с частотой тона 4 (табл. 1).

Кроме того, при частотах поперечного гармонического возбуждения системы выше 1,67 Гц в эксперименте наблюдались сложные (продольно-поперечные) формы колебаний свободной поверхности жидкости, характерные для тонов 8 и 9 (табл. 2) с частотами колебаний соответственно 1,81 Гц и 1,97 Гц.

Анализ нелинейных свойств системы “конструкция бака – жидкость”. Применительно к горизонтальному цилиндрическому баку описанной выше конструкции были исследованы явления, связанные с проявлением нелинейных свойств системы “конструкция бака – жидкость”. При немалых амплитудах колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом баке наблюдались разрывы сплошности жидкой среды, находящейся во взаимодействии со стенками полости (рис. 5).

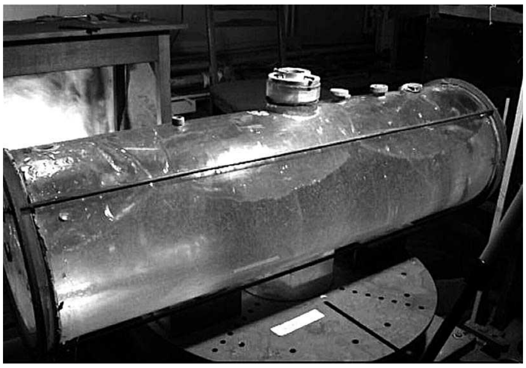


Рис. 5

На рис. 6 представлены полученные экспериментально зависимости амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости в баке от частоты поперечного гармонического возбуждения при h_{ned}/R = 0,53 и амплитудах возбуждения 2,7 мм и 1,1 мм. На рис. 6 линии 1 и 3 соответствуют показаниям датчика D1, линии 2 и 4 – показаниям датчика D2, линии 1 и 2 – амплитуде возбуждения 2,7 мм, а линии 3 и 4 – амплитуде возбуждения 1,1 мм. Амплитуды отклонения жидкости на рис. 6 показаны в обе стороны от ее невозмущенного положения.

Анализ полученных результатов (рис. 6) показал, что взаимодействие продольных и поперечных колебаний свободной поверхности жидкости приводит к появлению сложной картины пространственных нелинейных колебаний. Продольные колебания способствуют появлению на поверхности жидкости в баке четырех и пяти одинаковых зон, в каждой из которых развивается круговая волна [7]. Уменьшение амплитуды возбуждения приводит к тому, что круговые волны возбуждаются только при достаточно близком совпадении собственных частот продольных и поперечных колебаний. Это видно из приведенных на рис. 6 амплитудно-частотных характеристик, полученных для амплитуд возбуждения, равных 2,7 мм (сплошные линии) и 1,1 мм (точечные линии). В первом случае круговые волны образуются в диапазонах частот возбуждения 1,75 – 1,9 Гц и 2 – 2,1 Гц, а во втором – только в диапазоне 1,8 – 1,9 Гц.

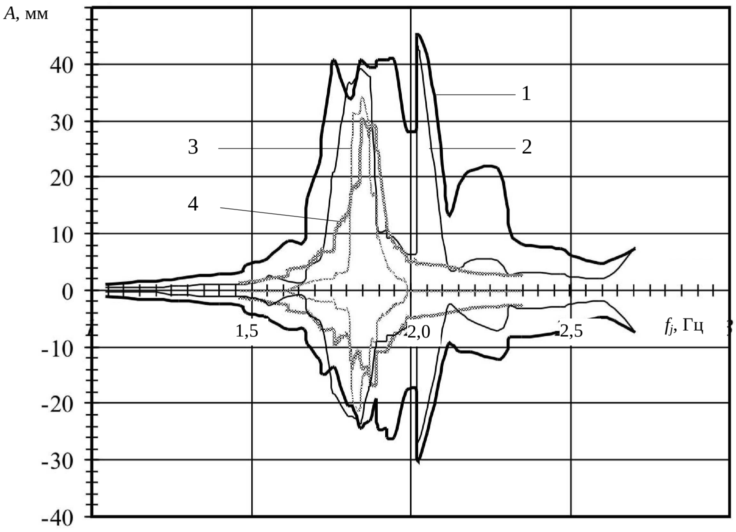
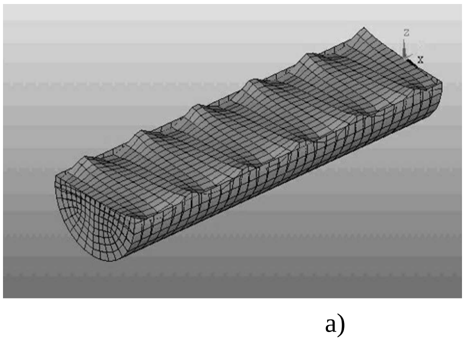


Рис. 6

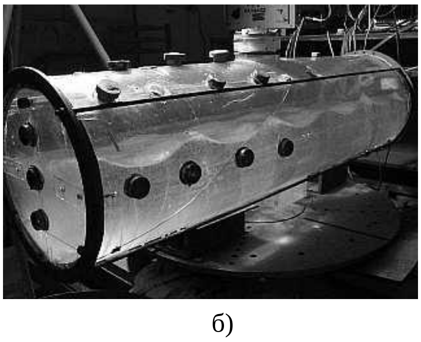
Из приведенных на рис. 6 результатов следует, что с ростом амплитуды возбуждения в 2,45 раза амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости с частотой 1,75 Гц возросла не более чем в 1,33 раза. Это свидетельствует о нелинейной зависимости демпфирования колебаний жидкости от амплитуды ее колебаний вследствие возрастания работы сил сопротивления.

В соответствии с рис. 6 установлено, что при немалых амплитудах колебаний свободной поверхности жидкости максимальное отклонение амплитуды в положительном направлении в 1,3 раза больше, чем в отрицательном. Это свидетельствует о несимметричности формы колебаний жидкости относительно плоскости ее невозмущенной поверхности.

Геометрические нелинейности бака (асимметрия его конструкции в продольном и поперечном направлениях) при значительных амплитудах колебаний жидкости являются причиной развития сложных (продольно-поперечных, вращательных) форм колебаний ее свободной поверхности, подобных представленным на рис. 4 г, е. Кроме указанных выше колебаний свободной поверхности жидкости, при гармоническом возбуждении исследуемой системы "конструкция бака – жидкость" имели место супергармонические колебания жидкости с частотой, превышающей частоту возбуждения. На рис. 7 показаны расчетные (рис. 7, а) и экспериментальные (рис. 7, б)



а)



б)

Рис. 7

смешанные формы колебаний свободной поверхности жидкости, соответствующие собственной частоте колебаний 2,89 Гц, при гармоническом возбуждении системы с частотой 1,45 Гц. Эти колебания связаны с резонансным откликом тонов собственных колебаний системы с расчетной частотой 2,89 Гц, приблизительно вдвое превышающей частоту внешнего поперечного гармонического возбуждения.

Выводы. Проведенные экспериментальные исследования показали, что колебания свободной поверхности жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке в значительной мере зависят от параметров и направления внешнего гармонического возбуждения, формы бака и уровня его заполнения. При этом возникают интенсивные немалые колебания жидкости, сопровождающиеся различными нелинейными эффектами (ограничение амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости; асимметрия профиля волны и разрывы сплошности жидкой среды, находящейся во взаимодействии со стенками полости; круговые сложные колебательные движения). Эти эффекты оказывают существенное влияние на динамику конструкции бака с жидкостью.

Экспериментальным путем установлено, что реализация колебательных движений с частотами недоминирующих тонов колебаний в исследуемой динамической системе «конструкция бака – жидкость» может быть осуществлена путем резонансного возбуждения доминирующих колебаний, которые развиваются при поперечном гармоническом воздействии, с последующим "переходом" (при значительном уровне амплитуд) к колебаниям с частотами недоминирующих тонов.

С помощью метода конечных элементов проведено математическое моделирование пространственных колебаний горизонтально расположенного цилиндрического бака при его гармоническом возбуждении. В зависимости от уровня заполнения бака жидкостью определены частоты и формы колебаний свободной поверхности жидкости. Установлено, что полученные путем математического моделирования собственные частоты и формы колебаний свободной поверхности жидкости удовлетворительно согласуются с данными проведенных экспериментов. Показано, что выполненное в трехмерной постановке математическое моделирование пространственных колебаний позволяет определить параметры сложных форм колебаний свободной поверхности жидкости.

1. *Пилипенко В. В.* Кавитационные автоколебания / *В. В. Пилипенко*. – Киев : Наукова думка, 1989. – 316 с.
2. Динамика жидкостных двигательных установок и продольная устойчивость жидкостных ракет-носителей / *В. В. Пилипенко, В. А. Задонцев, Н. И. Довготько, Ю. Е. Григорьев, И. К. Манько, О. В. Пилипенко* // Техническая механика. – 2001. – № 2. – С. 11 – 37.
3. *Науменко Н. Е.* Построение математической модели гидроупругого взаимодействия жидкости с упругим трубопроводом / *Н. Е. Науменко, Л. П. Котелина, С. И. Филиппюк* // Динамика и управление движением механических систем : Сб. науч. тр. – Киев : Наукова думка, 1992. – С. 3 – 9.
4. *Науменко Н. Е.* Исследование переходных режимов в трубопроводе при кавитационном течении закрученного потока жидкости / *Н. Е. Науменко* // Гидрогозодинамика энергетических установок : Сб. науч. тр. – Киев : Наукова думка, 1982. – С. 109 – 115.
5. *Пилипенко В. В.* Расчетно-экспериментальный метод определения податливости и размеров кавитационной полости в закрученном потоке жидкости в круглой трубе / *В. В. Пилипенко* // Космические исследования на Украине. – 1982. – № 3. – С. 19 – 26.
6. *Богомаз Г. И.* Динамика железнодорожных вагонов-цистерн / *Г. И. Богомаз*. – Киев : Наукова думка, 2004. – 224 с.
7. *Богомаз Г. И.* Колебания жидкости в баках. Методы и результаты экспериментальных исследований / *Г. И. Богомаз, С. А. Сирота*. – Днепропетровск : Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2002. – 306 с.

8. *Микишев Г. Н.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / *Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович*. – М. : Машиностроение, 1971. – 564 с.
9. *Abramson H. N.* Dynamic behavior of liquids in moving containers / *H. N. Abramson*. – Washington, 1966. – 467 p. – (NASA; SP-106).
10. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью / *И. А. Луковский*. – К. : Наукова думка, 2010. – 407 с.
11. *Timokha A. A* multimodal method for liquid sloshing in a two-dimensional circular tank / *A. Timokha* // J. Fluid Mechanics. – 2010. – Vol. 665. – P. 457 – 479.
12. Развитие сложных пространственных колебательных движений жидкости в цилиндрическом баке при резонансном возбуждении системы “конструкция бака – жидкость” / *Г. И. Богомаз, С. А. Сирота, И. Д. Блоха, А. Д. Николаев* // Техническая механика. – 2007. – № 1. – С. 81 – 89.
13. *Ли К.* Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / *К. Ли*. – Санкт-Петербург : Питер, 2004. – 560 с.
14. Численное моделирование свободных пространственных колебаний жидкости в емкостях сложной конфигурации / *И. Д. Блоха, Г. И. Богомаз, А. Д. Николаев, С. А. Сирота* // Науковий вісник НГУ. – 2006. – № 5. – С. 75 – 80.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 16.10.2015,
в окончательном варианте 21.10.2015