УДК 629.78.067:620.196:523

Л. Л. ПЕЧЕРИЦА, Т. Г. СМЕЛАЯ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТОК

Рассмотрена разновидность статистического метода Монте-Карло в стационарной постановке – метод пробных частиц (МПЧ). Цель работы – развитие МПЧ путем перехода к расчетам на иерархических сетках. Замена используемой в МПЧ для дискретизации расчетной области равномерной структурированной сетки на неравномерную иерархическую позволила модернизировать МПЧ и оптимизировать ресурсные затраты. Ранее было установлено, что более всего для МПЧ подходит двухуровневая иерархическая неструктурированная сетка (ДИНС). Оценить преимущества использования ДИНС можно путем сравнения временных затрат, сеточных характеристик и качества распределенных газодинамических параметров в окрестности обтекаемых преград с аналогичными данными, полученными ранее на равномерных сетках.

Тестирование разработанного алгоритма МПЧ на ДИНС осуществлялось посредством численного моделирования осесимметричного внешнего обтекания тел простой формы для различных режимов течения. Сравнение интегральных характеристик рассмотренных тел и распределенных газодинамических параметров в их окрестности с имеющимися экспериментальными данными, данными интегрального метода, теории локального взаимодействия и с аналогичными результатами МПЧ на равномерной расчётной сетке показало их полное соответствие.

Розглянуто різновид статистичного методу Монте-Карло в стаціонарній постановці – метод пробних часток (МПЧ). Мета роботи – розвиток МПЧ шляхом переходу до розрахунків на ієрархічних сітках. Заміна рівномірної структурованої сітки, що використовується для дискретизації розрахункової області в МПЧ, на нерівномірну ієрархічну дозволила модернізувати МПЧ і оптимізувати ресурсні витрати. Раніше було встановлено, що найбільше для МПЧ підходить дворівнева ієрархічна неструктурована сітка (ДІНС). Оцінити переваги використання ДІНС можна шляхом порівняння часових витрат, сіткових характеристик і якості розподілених газодинамічних параметрів навколо обтічних перешкод з аналогічними даними, що отримані раніше на рівномірних сітках.

Тестування розробленого алгоритму МПЧ на ДІНС здійснювалося за допомогою числового моделювання вісесиметричного зовнішнього обтікання тіл простої форми для різних режимів течії. Порівняння інтегральних характеристик розглянутих тіл і розподілених навколо них газодинамічних параметрів з наявними експериментальними даними, даними інтегрального методу, теорії локальної взаємодії та з аналогічними результатами МПЧ на рівномірній розрахунковій сітці показало їхню повну відповідність.

A variation of the statistic Monte-Carlo method for the stationary statement, namely test particles method (TPM), is considered. The study objective is to develop the TPM using computations on hierarchy grids. The replacement of the uniform structured grid used for discretization of the computational domain with the non-uniform hierarchy grid made possible the TPM updating and optimizing the computer resources. It was found that a two-level hierarchy unstructured grid (TLIUG) is best suited to the TPM. The assessment of the advantages of the TLIUG is made possible by comparing the time taken, the grid characteristics and qualities of the distributed gas dynamic parameters in the vicinity of streamlined barriers with the similar data previously obtained on the uniform grids.

The developed algorithm of the TPM on the TLIUG is tested using a numerical simulation of an axially symmetric outer flow over bodies of simple configurations under different flow conditions. A comparison of the integral characteristics of bodies under consideration and the distributed gas dynamic parameters in their vicinity with the available experimental data, those of an integral method and a theory of local interactions and similar results of the TPM on the uniform computational grid demonstrated their complete agreement.

Ключевые слова: *метод Монте-Карло, метод пробных частиц, иерархические двухуровневые сетки, численное моделирование.*

Для решения интегрального уравнения Больцмана в молекулярной газовой динамике с успехом применяется метод статистических испытаний Монте-Карло и, в частности, одна из его разновидностей – метод пробных частиц (МПЧ) [1 – 3]. Сущностью МПЧ является моделирование хаотического движения попадающих извне в расчетную область пробных молекул среди находящихся в ней полевых. При проведении большого количества испытаний происходят многократные взаимодействия пробных молекул как с полевыми частицами, так и с ограничивающими расчетную область непроницаемыми поверхностями. Это приводит к возмущению начального распределения газодинамических параметров (ГДП) в окрестности обтекаемой преграды, постепенным его изменениям и, в конечном итоге, к стабилизации.

Анализ разных типов расчетных сеток (РС), широко используемых для численного моделирования различных физических процессов, подробно изложен в [4, 5]. После изучения их особенностей, достоинств и недостатков был сделан вывод, что для решения современных задач молекулярной газовой динамики МПЧ предпочтительными являются сетки иерархического типа, имеющие минимальное количество вложений. При этом на всех иерархических уровнях сетка должна быть структурирована и равномерна.

При одном уровне вложения (двухуровневая сетка) и фиксированном числе корневых ячеек конечный размер рабочих ячеек регулируется плотностью разбиения корневых ячеек РС. Кратность разбиения корневых ячеек удобнее всего поставить в зависимость от местных длин свободного пробега молекул, определяющих локальный режим течения. В этом случае размер вложенных ячеек будет скачкообразно изменяться от одной корневой ячейки к другой в зависимости от местных градиентов физических параметров полей течений.

Как было показано ранее [4, 5], сетка такого типа является структурированной и равномерной как на уровне разбиения расчетной области на корневые ячейки, так и на локальном уровне в пределах каждой корневой ячейки РС. На глобальном уровне эти свойства нарушаются и сетка является неструктурированной. Двухуровневые иерархические неструктурированные сетки (ДИНС) сочетают в себе качества двух противоположных типов сеток, что позволяет компенсировать недостатки каждой из них достоинствами другой и максимально удовлетворить основное требование – возможность сгущать сетку в нужных зонах расчетной области, сохраняя при этом высокоэффективный доступ к соседним ячейкам РС.

Основное требование к РС в МПЧ заключается в том, чтобы линейные размеры расчетных ячеек не превосходили местную длину свободного пробега λ. Несмотря на то, что зоны повышенной концентрации в основном занимают небольшую часть рассматриваемой области физического пространства (зоны больших градиентов и скачков уплотнения), использование равномерных РС приводит к большому суммарному числу мелких расчетных ячеек. Использование ДИНС дает возможность сократить общее количество ячеек РС, сохраняя при этом размеры ячеек в зонах с малыми размерами λ. При этом уменьшается время блуждания пробных молекул на фоне полевых, которое составляет существенную часть общего расчетного времени. В итоге, ДИНС позволяют экономить машинные ресурсы (память и счетное время) без снижения точности получаемых результатов.

Апробация алгоритма МПЧ при использовании неструктурированных двухуровневых сеток была проведена на задаче осесимметричного обтекания сферы единичного радиуса. Ось симметрии сонаправлена со скоростью набегающего потока $\vec{V}_\infty$. Размеры осесимметричной расчетной области в продольном и радиальном направлениях составляли 5 радиусов и 3 радиуса сферы (рис. 1). Начальное поле параметров задавалось моноскоростным, соответствующим параметрам набегающего потока. Розыгрыш траекторий молекул осуществлялся со всех граней контрольного объема и соответствовал максвелловскому. Число разыгрываемых траекторий (испытаний) – 10^5.

При расчетах сеточная сходимость достигалась в результате проведения нескольких итераций, каждая из которых использовала результирующие поля ГДП предыдущей. Расчетная область Ω разбивалась в продольном и радиальном направлениях соответственно на 10 и 6 базовых ячеек $d\omega$. На 1-й итерации осущест-

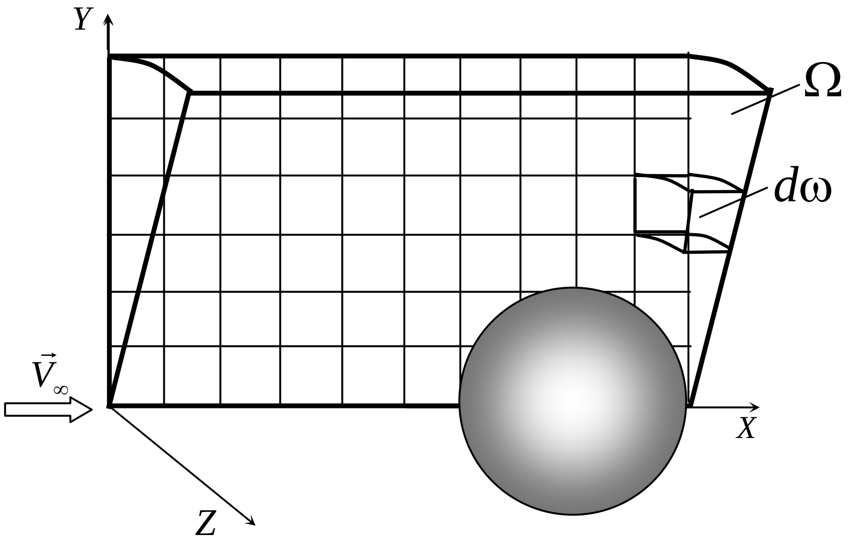
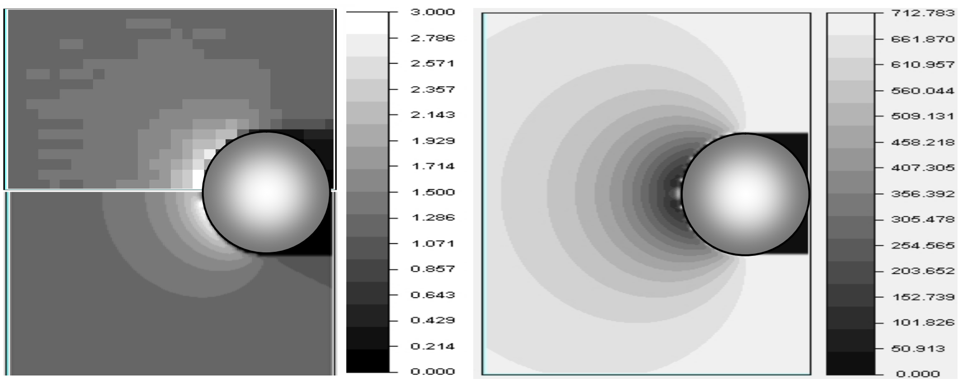


Рис. 1

влялось дополнительное трехкратное дробление базовых ячеек по каждому из направлений (начальная РС имеет всего 540 ячеек). На последующих итерациях количество шагов дробления базовых ячеек корректировалось (увеличивалось).

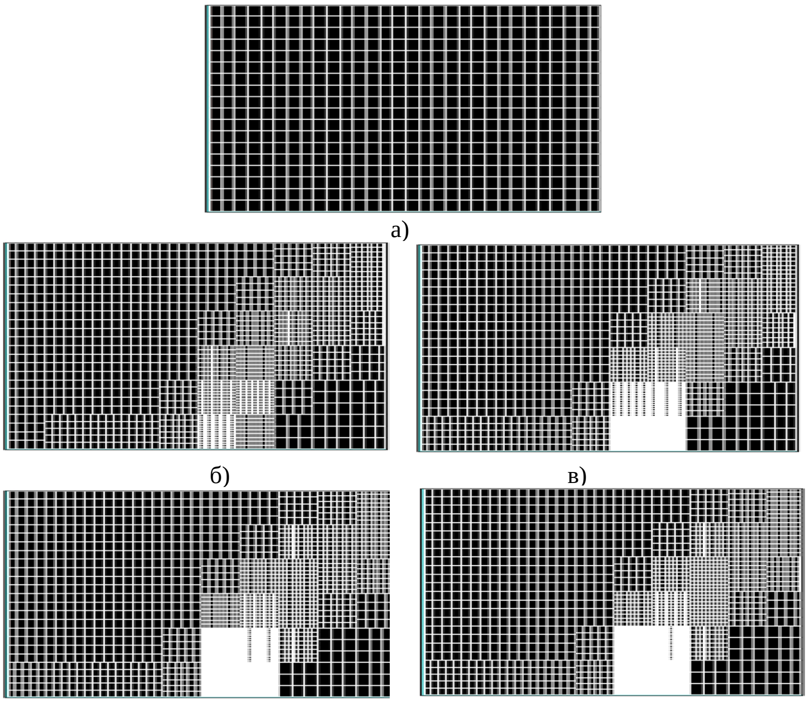
Для данной задачи были проведены численные расчеты распределенных и интегральных газодинамических характеристик для разных режимов обтекания. Плотность набегающего потока варьировалась от $\rho_\infty = 5{\cdot}10^{-9}$ кг/м^3 до $\rho_\infty = 2{,}5{\cdot}10^{-6}$ кг/м^3, что соответствовало режимам обтекания от свободномолекулярного при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_0 = 0{,}21$ ($\mathrm{Kn}_\infty = 7{,}9$) до близкого к континуальному при $\mathrm{Re}_0 = 104$ ($\mathrm{Kn}_\infty = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$). В качестве характерного размера брался диаметр сферы. Расчеты проводились при числе Маха $Ma = 5$ и температуре торможения $T_0 =$ 300 К для условия теплового равновесия сферы ($T_w / T_0 \approx 1$, где T_w – температура поверхности сферы).

При свободномолекулярном режиме ($\mathrm{Re}_0 = 0{,}21$) результаты расчетов устанавливались быстро (уже на 2-й и 3-й итерациях). Линейные размеры ячеек начальной сетки не превышали локальных длин свободного пробега, поэтому в процессе счета сетка не корректировалась и совпадала с исходной равномерной



а) Рис. 2 б)

сеткой. Время счета для ПЭВМ Intel Pentium-IV 2400 MHz (BUS 533 MHz) 1024 MB (SDRAM PC–2100) составило 1,5 минуты. На рисунке 2 а), б) показаны изолинии результирующих полей безразмерной плотности ρ/ρ_∞ и безразмерной скорости V/V_∞, построенные на достаточно грубой равномерной начальной сетке (верхние полуплоскости). Данные поля качественно соответ-



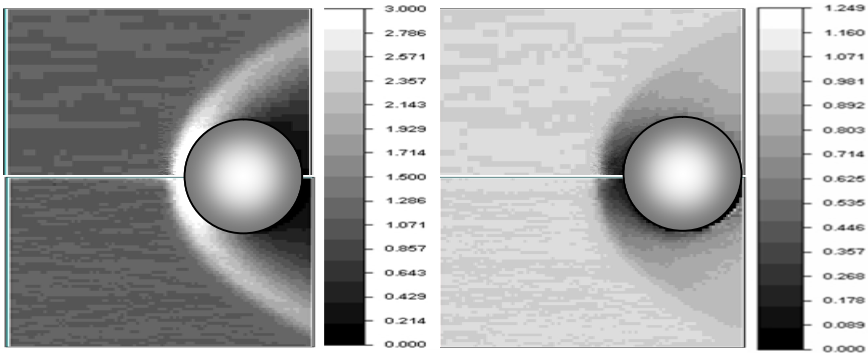
а) б) в) г) д)

Рис. 3

ствуют полям, полученным ранее с помощью численного интегрального метода [6] (рисунок 2 а), б) – нижние полуплоскости).

В переходном режиме обтекания ($\rho_\infty = 10^{-6}$ кг/м^3; $\mathrm{Re}_0 = 41{,}7$) формирование двухуровневой сетки в процессе проведения итераций показано на рисунке 3. На рисунке 3, а) приведена исходная РС, на рисунках 3, б), в) г), д) – РС, полученные в результате последовательного проведения четырех итераций. Сеточная сходимость достигается на 3-й – 4-й итерациях. Количество расчетных ячеек при этом увеличивается от 540 ячеек для начальной сетки до $4{,}2\cdot10^3$ для двухуровневой сетки. Из рисунка видно, что построенная двухуровневая сетка имеет неравномерное распределение густоты разбивки базовых ячеек. Как и ожидалось, наибольшему дроблению подвергаются базовые ячейки, находящиеся в зоне формирования ударной волны, и ячейки, приближенные к точке торможения. Ячейки начальной сетки с низкой плотностью ($\rho/\rho_\infty \leq 1$), расположенные за сферой и перед скачком уплотнения, не корректируются. Поля ГДП на удалении от преграды для 2-й – 4-й итераций практически идентичны. Установление ГДП происходит в процессе дробления ячеек сетки только в зоне больших градиентов непосредственно за скачком (перед сферой).

Работоспособность разработанного алгоритма подтверждается соответствием полученных результатов данным апробированного ранее алгоритма МПЧ на структурированной равномерной сетке. Результирующие поля плотности ρ/ρ_∞ и скорости V/V_∞, полученные при $\mathrm{Re}_0 = 41{,}7$ МПЧ, приведены соответственно на рисунке 4 а) и б). Результаты расчетов на двухуровневой сетке показаны в верхней полуплоскости, на равномерной сетке – в нижней полуплоскости.



а) б)

Рис. 4

Время счета каждой итерации на $4{,}2 \cdot 10^3$ расчетных ячейках ДИНС при 10^5 испытаний (розыгрышей) составило ≈ 4,5 мин. Разбиение равномерной сетки по оси OX составляло 100 ячеек, а по радиусу – 60 ячеек (всего 6000 ячеек). Сходимость результатов достигалась на 3 – 4 итерациях, при этом время счета каждой итерации при том же количестве испытаний составляло ≈ 6 минут.

Достоверность результатов МПЧ на ДИНС подтверждается хорошим соответствием не только распределенных ГДП, но и интегральных характеристик. Задача по определению коэффициента лобового сопротивления C_x покоящейся сферы в переходном режиме обтекания в методическом плане является одной из наиболее освещенных. В [7] опубликованы результаты экспериментальных измерений коэффициента лобового сопротивления сферы C_x в промежуточной области течения $10^{1} \le \mathrm{Re}_0 \le 10^4$ ($10^{-3} \le \mathrm{Kn}_\infty \le 10$) для широкого диапазона чисел Маха ($5 \le Ma_\infty \le 12{,}5$) при гиперзвуковом обтекании двухатомным газом (воздух, азот). Сравнение результатов расчетов МПЧ с экспериментальными данными показано на рисунке 5. Значения C_x, полученные на двухуровневой сетке с помощью МПЧ, обозначены квадра-

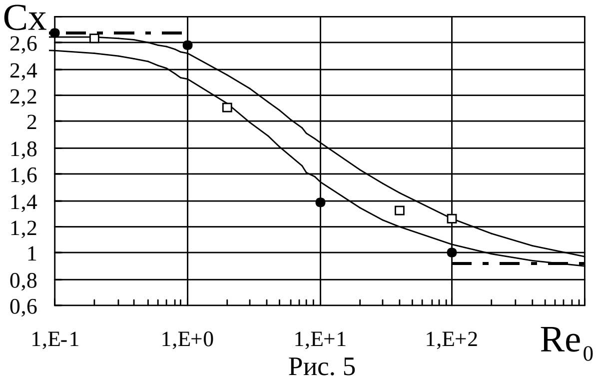


Рис. 5

тиками, а обобщающий экспериментальные данные [7] доверительный интервал [8] – черными кривыми. Расчетные данные, соответствующие теории локального взаимодействия [9], применяемой для оценки аэродинамических характеристик на стадии эскизного проектирования, показаны черным маркером; штрихпунктирной линией обозначены предельные значения C_x. В качестве характерного размера при расчете чисел Кнудсена и Рейнольдса в формулах теории локальности взят диаметр сферы. Коэффициент лобового сопротивления отнесен к площади миделевого сечения сферы. Как видно из рисунка, расчетные значения C_x МПЧ на ДИНС ложатся в доверительный интервал диапазона разброса экспериментальных данных и удовлетворительно согласуются с данными теории локальности.

Процесс сходимости C_x при Re_0 = 0,21; 2,08; 41,7; 104 показан на рисунке 6 (кривые 1 – 4). Данные расчетов на равномерной сетке указаны на рисунке 6 маркерами. Значения C_x, полученные на ДИНС и на равномерной РС, сходятся к одному значению. Анализ кривых на рисунке 6 показывает, что с увеличением числа Рейнольдса количество итераций, необходимых для достижения сходимости, увеличивается.

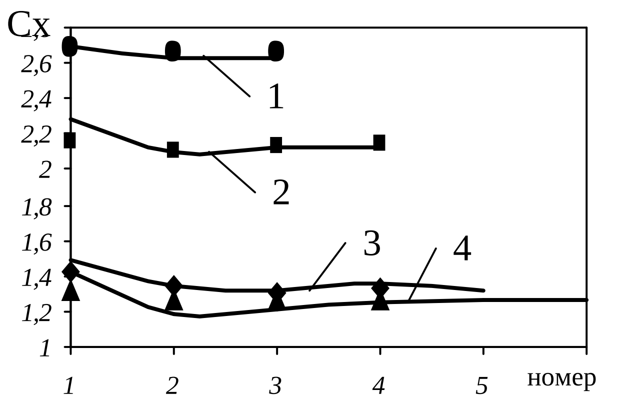
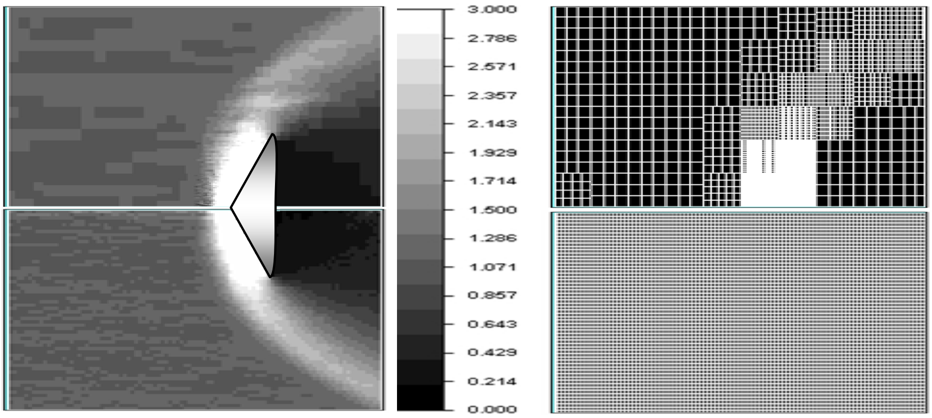


Рис. 6

При проведении итераций на двухуровневой сетке число ячеек разбиения расчетной области постепенно корректируется. Количество корневых ячеек при этом остается неизменным. Те из них, которые находятся в зонах большой плотности, постепенно дробятся на более мелкие ячейки. На 1-й итерации базовые ячейки разбивались на три части в продольном и радиальном направлениях. В дальнейшем шагом дробления базовых ячеек являются минимальные значения местных длин свободного пробега, полученных в каждой базовой ячейке на предыдущей итерации. Максимальное количество дроблений базовых ячеек по осям ограничивалось (≤ 30). При Re_0 = 0,21 и Re_0 = 2,8 базовые ячейки не дробятся, так как линейные размеры ячеек не превосходят местных длин свободного пробега молекул (общее число ячеек РС остается неизменным: $N_{яч}$ =540). При увеличении числа Рейнольдса количество ячеек расчетной сетки $N_{яч}$ в ходе проведения итераций растет и постепенно устанавливается. При Re_0 = 104 в результате проведения 6-ти итераций $N_{яч}$ сходится к значению, превышающему $1{,}5 \cdot 10^4$.

Время счета каждой итерации зависит от рассматриваемого режима обтекания. При приближении к континуальному режиму время счета увеличивается как в связи с ростом числа разбиения расчетной области, так и в результате увеличения числа столкновений молекул. На ДИНС расчетное время каждой итерации увеличивается от 1,5 минут при Re_0 = 0,21 (540 ячеек РС) до 11 минут при Re_0 = 104 ($1{,}5 \cdot 10^4$ячеек). На описанной выше равномерной сетке ($6 \cdot 10^3$ячеек) при Re_0 = 104 временные затраты итераций составляли от 8 до 9 минут.

Рассмотренное выше обтекание сферы является наиболее интересной и всесторонне изученной задачей. Кроме сферы, к осесимметричному обтеканию простых тел можно отнести обтекание конуса под нулевым углом атаки и круглой пластины, перпендикулярной к набегающему потоку. На этих телах было проведено дальнейшее тестирование алгоритма МПЧ, разработанного для двухуровневой неравномерной сетки. Полученные значения коэффициента лобового сопротивления и распределенные значения ГДП в окрестности конуса и пластины при свободномолекулярном режиме полностью соответствуют данным теории локальности и интегрального метода [6], а в переходном режиме – расчетным данным, полученным на равномерной сетке. Сравнение результирующих полей безразмерной плотности ρ/ρ_∞ в окрестности конуса на двухуровневой и равномерной сетке показано на верхней и нижней полуплоскости рисунка 7, а). Конечный результат сходимости ДИНС и равномерная РС – на рисунке 7, б). Условия расчетов соответствуют приведенным выше для сферы.



а) б)

Рис. 7

Выводы. Были проведены численные расчеты газодинамических параметров и коэффициентов лобового сопротивления методом пробных частиц с использованием неструктурированных сеток для задач осесимметричного обтекания простых тел (сферы единичного радиуса, диска и конуса) в широком диапазоне начальных параметров при режимах течения от свободномолекулярного до близкого к континуальному. Установлено соответствие результатов расчета МПЧ на ДИНС аналогичным результатам на равномерной сетке, данным эксперимента и других методик. Показано преимущество ДИНС в экономии машинных ресурсов. Использование ДИНС в переходных и близких к континуальным режимах позволяет в проблемных зонах с большими градиентами параметров при меньших временных затратах существенно увеличить количество ячеек РС и тем самым повысить качество проводимых расчетов. Особенно это важно при обтекании в указанных режимах протяженных тел и тел сложной конфигурации, для которых использование во всей расчетной области густой равномерной РС требует больших объемов машинной памяти и неприемлемых временных затрат.

1. *Басс В. П.* Численное моделирование стационарного осесимметричного обтекания затупленного конуса в переходном режиме обтекания / *В. П. Басс, Л. Л. Печерица* // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2005. – Т. 1, Вип. 9. – С. 57 – 66.
2. *Басс В. П.* Об одном алгоритме реализации метода Монте-Карло для решения задач динамики разреженного газа / *В. П. Басс, Л. Л. Печерица* // Техническая механика. – 2006. – № 1. – С. 67 – 79.
3. *Басс В. П.* Численное решение трехмерных задач динамики разреженного газа / *В. П. Басс, Л. Л. Печерица* // Техническая механика. – 2010. – № 2. – С. 38 – 51.
4. *Смелая Т. Г.* Выбор расчетной сетки при моделировании течений разреженного газа методом пробных частиц / *Т. Г. Смелая* // Техническая механика. – 2013. – № 1. – С. 45 – 60.
5. *Смелая Т. Г.* Неструктурированные сетки и их применение при численном моделировании методом пробных частиц / *Т. Г. Смелая* // Техническая механика. – 2015. – № 4. – С. 155 – 168.
6. *Басс В. П.* Расчет аэродинамических параметров в окрестности тел, обтекаемых свободномолекулярным потоком / *В. П. Басс, В. И. Бразинский* // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1982. – № 4. – С. 177 – 180.
7. *Кошмаров Ю. А.* Прикладная динамика разреженного газа / *Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов*. – М : Машиностроение, 1977. – 188 с.
8. *Мирошин Р. Н.* Теория локального взаимодействия / *Р. Н. Мирошин, И. А. Халидов*. – Ленинград : ЛГУ, 1991. – 276 с.
9. *Алексеева Е. В.* Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе / *Е. В. Алексеева, Р. Г. Баранцев*. – Ленинград : ЛГУ, 1976. – 210 с.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 17.02.2016,
в окончательном варианте 17.03.2016