УДК 539.374: 539.89

Я. Ф. АНДРУСЫК

ОБ ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ТЕКУЧЕСТИ

Институт инженерной механики и транспорта
Национального университета «Львовская политехника»,
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина; e-mail: yaroslav.andrusyk@gmail.com

Исследуется распространение упруго-вязкопластических волн в полубесконечном стержне на основании электромеханической модели идеального упруго-вязкопластического материала с запаздыванием текучести. Решение задачи осуществляется в постановке, когда удар по торцу ненагруженного стержня сообщает концевому сечению постоянную скорость. В результате решения уравнений динамического поведения материала за фронтом волны запаздывания текучести, получено его напряженно-деформированное состояние. Отмечается отличительная особенность поведения возмущенной области стержня при сравнении с граничным условием, когда к его торцевой поверхности внезапно прикладывается постоянная сила. Показана возможность возникновения сингулярного решения определяющих уравнений с особенностями в виде точек разрыва 1-го рода. Такое решение описывает странное поведение материала, ступенчатый характер движения которого напоминает состояние “трепетания”.

Досліджується розповсюдження пружно-в’язкопластичних хвиль в півбезмежному стержні на основі електромеханічної моделі ідеального пружно-в’язкопластичного матеріалу з запізненням плинності. Розв’язок задачі здійснюється в постановці, коли удар по торцю ненавантаженого стержня надає кінцевому перерізу постійну швидкість. В результаті розв’язку рівнянь динамічної поведінки матеріалу за фронтом хвилі запізнення плинності, отримано його напружено-деформований стан. Відмічається відмінна особливість поведінки збуреної області стержня при порівнянні з граничною умовою, коли до його торцевої поверхні раптово прикладається постійна сила. Показана можливість виникнення сингулярного розв’язку визначальних рівнянь з особливостями у вигляді точок розриву 1-го роду. Такий розв’язок описує дивну поведінку матеріалу, ступінчатий характер руху якого нагадує стан “тремтіння”.

Based on an electromechanical model of an ideal elastic- viscous-plastic material with delayed fluidity, the propagation of elastic-viscous-plastic waves through a semi-infinite bar is considered. The problem is solved in the statement when an impact on the end of an unloaded bar imparts a constant velocity to an end section. From the solution of the equations of the dynamic material behavior behind the front wave of delayed fluidity, the material stressed-strained state is measured. In comparison with a limited condition, when a constant force is suddenly applied to the end surface, the behavior of a disturbed region of the bar is specially featured. The possibility of occurring a singular solution of the determining equations with the special features in the form of discontinuity points of the first kind is demonstrated. Such solution describes a strange behavior of the material, the step-by-step motion resembling that in trembling.

Ключевые слова: *пластическое состояние, динамический критерий пластичности, ударное нагружение, упруго-вязкопластическая волна, запаздывание текучести, “трепетание” среды.*

Введение. Автором [1], на основании обобщения идей работ [2 – 5], предложена электромеханическая модель идеальной упругопластической среды с запаздыванием текучести. В рамках сформулированных определяющих соотношений проведено исследование зависимости динамического предела текучести материала от скорости деформирования. Построены динамические диаграммы одноосного сжатия металла, который обладает свойством возникновения зуба текучести, для широкого диапазона скоростей деформаций. Результаты проведенных теоретических расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако при исследовании распространения волн в материалах с запаздыванием текучести в рамках модели [1], отсутствует процесс упругой разгрузки после прохождения волны перенапряжения. Внезапное уменьшение напряжения в среде после исчерпывания свойства к запаздыванию принято в теории Ю. Н. Работнова [2]. В действительности на фронте волны запаздывания текучести не возникает сильный разрыв, а переход перенагруженного материала в пластическое состояние происходит без фазы упругой разгрузки. Для выявления истинности этого положения в работе [6] проведено исследование распространения упруго-вязкопластических волн в стержне, материал которого обладает свойством запаздывания текучести. Решение задачи осуществлялось в постановке, когда к торцу ненагруженного стержня внезапно прикладывается постоянная сила. Полученный результат не подтверждает наличие волны сильного разрыва на границе перехода из упругого перенапряженного состояния в пластическое. В то же время возникло некоторое допущение, что на возникновение процесса внезапной упругой разгрузки влияют наложенные граничные условия на концевом сечении стержня. Для подтверждения или опровержения возможности возникновения такого перехода, рассматривается постановка задачи, когда концу полубесконечного ненагруженного стержня сообщается постоянная скорость V_0. Если в результате решения уравнений динамического состояния окажется, что на фронте волны запаздывания текучести скорость точек среды увеличится, тогда на конце стержня произойдет отрыв. Следовательно, возникнет внезапная упругая разгрузка. Если скорость не изменится – имеет место переход в пластическое состояние, при котором некоторые частные производные от параметров претерпевают разрыв.

Общая постановка и анализ задачи распространения волн в полубесконечном стержне. Рассмотрим полубесконечный идеальный упруго-вязкопластический стержень, материал которого обладает свойством запаздывания текучести. Пусть стержень расположен вдоль оси $x \geq 0$ лагранжевой системы координат и находится в покое до момента времени $t = 0$. Предположим, что начиная с этого момента, удар сообщает концевому сечению $x = 0$ скорость V_0, величина которой остается постоянной при $t > 0$. Эта скорость производит на торце стержня напряжение сжатия σ_{xx}^*, превышающее статический предел текучести σ_s. Такое возмущение приводит к распространению в среде упруго-вязкопластических волн. Для определения напряженно-деформированного состояния возмущенной области стержня будем считать, что в любом сечении напряжение однородно и находится из граничных условий. Предположим, что деформации малы, и пренебрежем влиянием сил инерции от поперечных деформаций.

Из упругого решения известно [6, 7], что при ударе в стержне распространяется прямая упругая волна со скоростью $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ (где E – модуль упругости Юнга, ρ – плотность). Эта волна переносит возникшее на конце стержня напряжение $\sigma_{xx}^* = \dfrac{EV_0}{c}$ и деформацию $\varepsilon_{xx}^* = \dfrac{\sigma_{xx}^*}{E} = \dfrac{V_0}{c}$. Напряжению σ_{xx}^* соответствует время запаздывания текучести τ. Для удобства последующих вычислений сжимающие напряжения и деформации принимаются с положительным знаком. Когда передний фронт волны пройдет расстояние $c\tau$, конец стержня переходит в пластическое состояние.

В плоскости x,t имеем следующую картину, показанную на рис. 1. Ниже фронта главной волны $x = ct$ лежит область покоя. На фронте волны напряжение, деформация и скорость частиц скачком возрастают от нуля до значений: $\sigma_{xx} = \sigma^*_{xx}$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon^*_{xx}$, $V_x = V_0$. На протяжении времени задержки τ от конца стержня распространяется только упругая волна. Поскольку все сечения стержня до деформации находились в одинаковом состоянии, то время запаздывания в них будет одно и то же и равно τ (τ – время запаздывания в сечении $x = 0$). В координатной плоскости x,t возмущенная среда будет находиться в упругом состоянии внутри полосы, которая определяется неравенством

$$c(t - \tau) \leq x \leq ct\,. \tag{1}$$

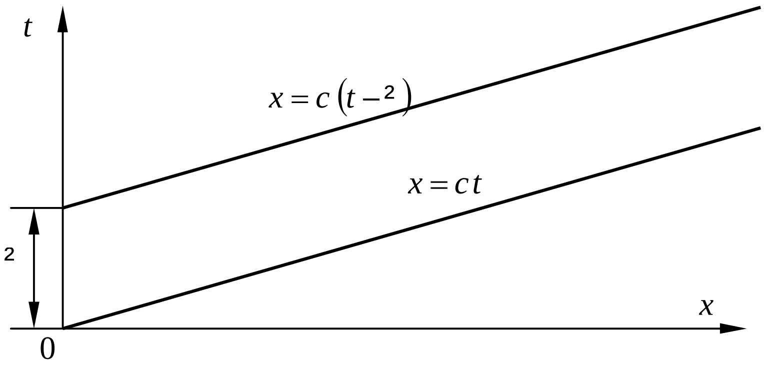

Рис. 1 – Распределение областей состояния стержня в плоскости x,t

Верхняя граница полосы определяет линию перехода материала из упругого в пластическое состояние. Ее можно рассматривать как фронт волны запаздывания текучести, который распространяется со скоростью c и определяется уравнением $x = c\,(t - \tau)$ (рис. 1). За этим фронтом возникает область течения материала стержня. Но остается открытым вопрос об упругой разгрузке до статического предела текучести на волне $x = c\,(t - \tau)$ согласно модели [2] или переходе в пластическое состояние без скачка параметров, в рамках [1, 6]. Для получения на него ответа, исследуем уравнения динамического поведения материала, обладающего свойством запаздывания текучести в пластической области стержня.

Построение уравнений динамического состояния упруго-вязкопластического стержня за фронтом волны запаздывания текучести. Основываясь на электромеханической модели идеального упруго-вязкопластического тела с запаздыванием текучести [1], запишем динамическое условие начала пластичности

$$s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\left[\sigma_s + k\left(\frac{3}{2}\dot{e}^e_{ij}\,\dot{e}^e_{ij}\right)^{1/n}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}\,s_{ij}}}{\sigma_s} - 1}\,\right]^2 . \tag{2}$$

Здесь s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, $\dot{e}_{ij}^{e}$ – компоненты девиатора скоростей упругих деформаций, k и n – постоянные материала.

Разделяя уравнение (2) на два сомножителя и приравнивая к нулю один из них, имеем

$$\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}-\pm_{s}=0. \qquad (3)$$

Это соотношение есть известное условие текучести Мизеса. Оно справедливо, пока интенсивность скоростей упругих деформаций не превышает предельное значение. В случае малых деформаций, запишем

$$\sqrt{\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}}\le £_{i}^{np}, \qquad (4)$$

где $£_{i}^{np}$ – предельное значение интенсивности скоростей упругих деформаций, определяемое экспериментально.

Соответственно для второго сомножителя следует такой динамический критерий начала пластичности материала

$$\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}=\pm_{s}+\frac{k^{2}}{\pm_{s}}\left(\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}\right)^{2/n}. \qquad (5)$$

Из (5) можно получить условие перехода материала в пластическое состояние в зависимости от скорости деформирования или определить время задержки текучести в результате внезапного нагружения, когда $s_{ij}s_{ij}>\frac{2}{3}\pm_{s}^{2}$.

Исходя из обобщения электромеханической модели среды [1], тензор скорости пластической деформации $£_{ij}^{p}$ связан с девиатором напряжений следующим динамическим условием пластичности в состоянии текучести

$$\left(s_{ij}-\frac{2}{3}«£_{ij}^{p}\right)\left(s_{ij}-\frac{2}{3}«£_{ij}^{p}\right)=\frac{2}{3}\left[\pm_{s}+k\left(\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}\right)^{1/n}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}}{\pm_{s}}-1}\right]^{2}, \qquad (6)$$

где s_{ij}^{*} – компоненты девиатора напряжений на границе перехода из упругого состояния в пластическое, « – коэффициент вязкости.

Согласно ассоциированному закону течения [8, 9], компоненты $£_{ij}^{p}$ определяются из уравнений

$$£_{ij}^{p}=\cdot\,\frac{\partial f}{\partial\pm_{ij}}, \qquad (7)$$

где $\cdot$ – скалярный множитель, f – пластический потенциал, который в нашей модели определяется уравнением (6).

Учитывая пластическую несжимаемость материала, после подстановки (6) в (7) получим

$$\text{£}_{ij}^{p} = 2\cdot\left(s_{ij} - \frac{2}{3}\text{«}\,\text{£}_{ij}^{p}\right). \tag{8}$$

Решая уравнение (8) относительно £_{ij}^{p}, имеем

$$\text{£}_{ij}^{p} = \frac{2\cdot\ s_{ij}}{1+\frac{4}{3}\text{«}\,\cdot}. \tag{9}$$

Исключая £_{ij}^{p} из (6) и (9), находим

$$2\cdot\ = \frac{3}{2\text{«}}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}}{\pm_{s} + k\left(\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}\right)^{1/n}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}}{\pm_{s}} - 1}} - 1\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), запишем

$$\text{£}_{ij}^{p} = \frac{3}{2\text{«}}\left[1 - \frac{\pm_{s} + k\left(\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}\right)^{1/n}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}}{\pm_{s}} - 1}}{\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}\,s_{ij}}}\right]s_{ij}\,. \tag{11}$$

Преобразуем соотношения (11) для случая одноосного сжатия, когда $\pm_{xx} \neq 0$. Напомним, что девиаторы напряжений и скоростей упругих деформаций имеют такие компоненты [8] :

$$s_{ij} = \pm_{ij} - \frac{1}{3}\text{¢}_{ij}\pm_{kk}\,, \quad \dot{e}_{ij}^{e} = \text{£}_{ij}^{e} - \frac{1}{3}\text{¢}_{ij}\text{£}_{kk}^{e}\,, \tag{12}$$

где $\pm_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, £_{ij}^{e} – компоненты тензора скоростей упругих деформаций, ¢_{ij} – символ Кронекера.

Следовательно, из (12) получим: $s_{xx} = \frac{2}{3}\pm_{xx}$, $s_{yy} = s_{zz} = -\frac{1}{3}\pm_{xx}$. В результате, для $s_{ij}\,s_{ij}$ и $s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}$ запишем:

$$s_{ij}\,s_{ij} = \frac{2}{3}\pm_{xx}^{2}\,, \quad s_{ij}^{*}s_{ij}^{*} = \frac{2}{3}\left(\pm_{xx}^{*}\right)^{2}. \tag{13}$$

Аналогично для компонент $\dot{e}_{ij}^{e}$ имеем:

$$\dot{e}_{xx}^{e} = \frac{2}{3}(1+\nu)\varepsilon_{xx}^{e}, \quad \dot{e}_{yy}^{e} = \dot{e}_{zz}^{e} = -\frac{1}{3}(1+\nu)\varepsilon_{xx}^{e},$$

где ν – коэффициент поперечной деформации.

После преобразований $\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}$, находим

$$\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e} = \frac{2}{3}(1+\nu)^2\left(\varepsilon_{xx}^{e}\right)^2. \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в (11), получим:

$$\varepsilon_{xx}^{p} = \frac{1}{\eta}\left[\sigma_{xx} - \sigma_s - k(1+\nu)^{2/n}\left(\dot{e}_{xx}^{e}\right)^{2/n}\sqrt{\frac{\sigma_{xx}^{*}}{\sigma_s} - 1}\right], \quad \varepsilon_{yy}^{p} = \varepsilon_{zz}^{p} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{p}. \tag{15}$$

Учитывая, что компоненты тензора полной деформации складываются из упругой и пластической части

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}, \tag{16}$$

а также закон Гука при одноосном сжатии стержня

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}^{e}, \tag{17}$$

для скоростей деформаций и напряжений запишем:

$$\varepsilon_{xx}^{p} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{e}, \quad \varepsilon_{xx} = -\frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^{e} = \frac{\dot{\sigma}_{xx}}{E}, \tag{18}$$

где V_x – скорость частиц стержня вдоль оси x.

Используя (18), определяющие уравнения состояния сжатого стержня в пластической области приводятся к виду

$$\sigma_{xx} = \Phi\left(\dot{\sigma}_{xx}\right)^{2/n} - \frac{\eta}{E}\dot{\sigma}_{xx} + \eta\varepsilon_{xx} + \sigma_s. \tag{19}$$

Здесь произведена замена $\Phi = \dfrac{k(1+\nu)^{2/n}}{E^{2/n}}\sqrt{\dfrac{\sigma_{xx}^{*}}{\sigma_s} - 1}$.

Согласно стержневой теории [9], дифференциальное уравнение движения без учета массовых внешних сил приобретает вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{20}$$

где u – перемещение точек стержня вдоль оси x.

Уравнения (19), (20) определяют динамическое поведение упруговязкопластического стержня в пластической области.

Продифферецировав соотношение (19) по t, а уравнение (20) – по x, имеем

$$\frac{\partial \pm_{xx}}{\partial t}=\frac{2}{n}\Phi\frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\pm_{xx}}{\partial t}\right)^{\frac{2}{n}-1}-\frac{\text{«}}{E}\frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial t^2}+\text{«}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}=\frac{1}{\circ}\frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial x^2}. \qquad (21)$$

Исключая из системы уравнений (21) перемещение u, получим

$$\frac{\text{«}}{\circ}\frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial x^2}+\left[\frac{2}{n}\Phi\left(\frac{\partial\pm_{xx}}{\partial t}\right)^{\frac{2}{n}-1}-\frac{\text{«}}{E}\right]\frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial t^2}-\frac{\partial\pm_{xx}}{\partial t}=0. \qquad (22)$$

Исходное уравнение (22) относится к эллиптическому типу, поэтому всегда существует возможность локального продолжения в исследуемую область начальных данных. Для построения его решения введем следующие независимые переменные

$$z_1=t-\text{²}-\frac{x}{c},\quad z_2=t-\text{²}+\frac{x}{c}. \qquad (23)$$

Представим общее решение уравнения (22) в следующей форме

$$\pm_{xx}(t,x)=\pm_{1xx}(z_1)+\pm_{2xx}(z_2), \qquad (24)$$

где $\pm_{1xx},\pm_{2xx}$ – произвольные функции.

В новых переменных частные производные определяются так

$$\frac{\partial\pm_{xx}}{\partial t}=\frac{d\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1}+\frac{d\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2},\quad \frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial t^2}=\frac{d^2\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1^2}+\frac{d^2\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2^2}, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial\pm_{xx}}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{d\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1}+\frac{1}{c}\frac{d\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2},\ \frac{\partial^2\pm_{xx}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1^2}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2^2}.$$

Подставляя производные (25) в уравнение (22) и учитывая, что $E=\circ c^2$, имеем

$$\frac{2}{n}\Phi\left[\frac{d\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1}+\frac{d\pm_{2xx}(z_2)}{z_2}\right]^{\frac{2}{n}-1}\left[\frac{d^2\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1^2}+\frac{d^2\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2^2}\right]-$$
$$-\left[\frac{d\pm_{1xx}(z_1)}{d z_1}+\frac{d\pm_{2xx}(z_2)}{d z_2}\right]=0. \qquad (26)$$

На фронте волны запаздывания текучести, когда $x=c(t-\text{²})$, выполняется условие $\pm_{xx}(t,x)=\pm_{xx}^{*}=\text{const}$. Следовательно из (24), запишем

$$\pm_{1xx}(0)+\pm_{2xx}[2(t-\text{²})]=\pm_{xx}^{*},\quad t\geq\text{²}. \qquad (27)$$

Равенство (27) выполняется при любом положительном значении аргумента функции $\pm_{2xx}(z_2)$. Следовательно, в течение времени $t\geq\text{²}$ функция $\pm_{2xx}(z_2)=\text{const}$. Включая эту постоянную в произвольную функцию $\pm_{1xx}(z_1)$, после изменения обозначений переменной $z_1=z=t-\text{²}-\dfrac{x}{t}$ получим

$$\pm_{xx}(t,x)=\pm_{xx}(z_1)=\pm_{xx}(z)=\pm_{xx}\left(t-\text{²}-\frac{x}{c}\right). \qquad (28)$$

Введенную переменную z необходимо рассматривать как особенный параметр (внутреннее время) для каждой точки среды, который определяет время пребывания индивидуальной частицы в состоянии пластичности.

Представление общего решения уравнения (22) в виде (24) сводит дифференциальное уравнение в частных производных (22) к обыкновенному дифференциальному уравнению в переменных $\pm_{xx}, z$. В результате из (26) имеем

$$\frac{2}{n}\Phi\left(\frac{d\pm_{xx}}{d\,z}\right)^{2/n}\frac{d^2\pm_{xx}}{d\,z^2}-\left(\frac{d\pm_{xx}}{d\,z}\right)^2=0\,. \tag{29}$$

На границе перехода из упругой области стержня в пластическую, начальные условия уравнения (29) записываются так:

$$\pm_{xx}(0)=\pm^*_{xx}\,,\quad \frac{d\pm_{xx}}{d\,z}(0)=\dot{\pm}_{xx}(0)\,. \tag{30}$$

Исследование процесса распространения возмущения в пластической области стержня. Исходя из того, что решение дифференциального уравнения (29) представляется в виде функции $\pm_{xx}(z)$, на основании (19) деформация, перемещение, скорости точек среды также будут зависеть от переменной z. Значит, можно записать: $£_{xx}=£_{xx}(z)$, $u=u(z)$, $V_x=V_x(z)$. Учитывая замечание относительно знака деформации сжатия, имеем

$$\begin{gathered}£_{xx}=-\frac{\partial u(x,t)}{\partial\,x}=\frac{1}{c}\frac{du(z)}{d\,z},\quad V_x=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{d\,u(z)}{d\,z},\\ \dot{\pm}_{xx}=\frac{\partial\pm_{xx}(x,t)}{\partial t}=\frac{d\pm_{xx}(z)}{dz}\,.\end{gathered} \tag{31}$$

Используя (31) для скорости деформации $\dot{£}_{xx}$, получим

$$\dot{£}_{xx}=\frac{\partial £_{xx}}{\partial t}=-\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{d\,V_x}{d\,z}\,. \tag{32}$$

Обратимся к граничному условию и запишем его так:

$$t>0\,,\quad x=0\,,\quad V_x=V_x(t-²)=V_0=\text{const}\,. \tag{33}$$

Соотношение (33) верно при любом положительном значении аргумента. Поэтому можно записать

$$V_x=V_x(x,t)=V_x(z)=V_0\,. \tag{34}$$

Условие (34) показывает, что за фронтом волны запаздывания текучести скорости точек среды постоянны и равны скорости концевого сечения стержня V_0. Следовательно, не возникает отрыва торцевого сечения от ударника и не происходит внезапной разгрузки на границе перехода из упругой области в пластическую. Вся область стержня, перешедшая в пластическое состояние, движется как твердое тело с постоянной скоростью V_0. Но внутри этой области происходит процесс изменения напряжения $\pm_{xx}$ согласно закону, полученному как следствие решения уравнения (19). Учитывая, что из (32) и (34) следует $\dot{£}_{xx}=0$, уравнение (19) принимает вид

$$\pm_{xx} = \Phi\left(\dot{\pm}_{xx}\right)^{2/n} - \frac{«}{E}\dot{\pm}_{xx} + \pm_s \; . \tag{35}$$

Все необходимые вычисления и исследования, на основе решения полученного уравнения пластического состояния (35), будем проводить для постоянных материала, которые использовались в работах [1, 6].

Принимаем:

$$E = 2{,}1\cdot 10^{11}\text{ Па}, \; \pm_s = 2{,}15\cdot 10^{8}\text{ Па}, \; « = 1{,}2\cdot 10^{8}\text{ Па}\cdot\text{с},$$

$$k = 1{,}5\cdot 10^{8}\text{ Па}\cdot c^{1/12}, \; ° = 7800\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \; n = 24, \; ¬ = 0{,}25.$$

После подстановки всех принятых постоянных в (35), запишем

$$1{,}405\cdot 10^{7}\left(\left|\dot{\pm}_{xx}\right|\right)^{1/12} - 5{,}72\cdot 10^{-4}\dot{\pm}_{xx} - \pm_{xx} + 2{,}15\cdot 10^{8} = 0\,. \tag{36}$$

Для решения этого уравнения сформулируем начальное условие из постановки задачи следующим образом. Сообщаем концевому сечению стержня такую начальную скорость, которая приводит к возникновению напряжения $\pm_{xx}(0) = \frac{E\,V_0}{c} = \pm^{*}_{xx} = 3{,}55\cdot 10^{8}$ Па . Результат численного интегрирования уравнения (36) показан в виде графика $\pm_{xx}(z)$ на рис. 2. При нахождении его решения было наложено условие, что $\dot{\pm}_{xx}(z)$ принимает только отрицательные значения.

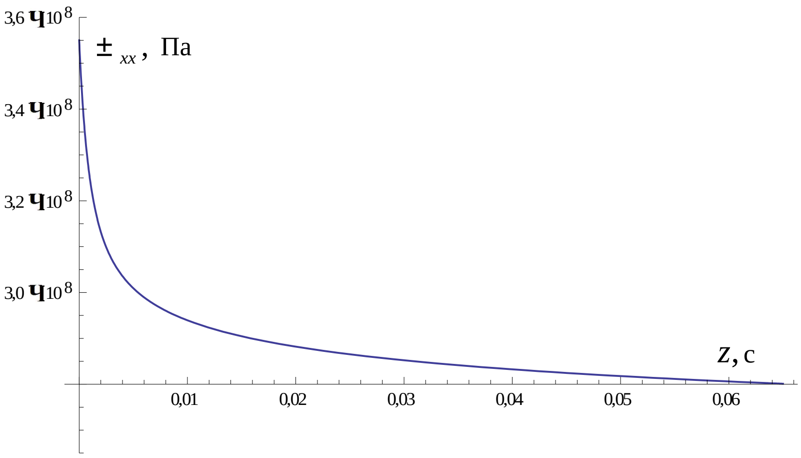

Рис. 2 – Графическое представление решения уравнения состояния в пластической области

На основании полученного решения уравнения (36) и свойства (16), построим график изменения деформаций в пластической области. Учитывая постоянство полной деформации $£_{xx}$, которую можно определить как $£_{xx} = \frac{\pm^{*}_{xx}}{E}$, и формулу для упругой деформации $£^{e}_{xx} = \frac{\pm_{xx}(z)}{E}$, находим закон изменения пластической деформации $£^{p}_{xx}$

$$£^{p}_{xx} = \frac{\pm^{*}_{xx} - \pm_{xx}(z)}{E}\,. \tag{37}$$

Графическое представление изменения этих деформаций в зависимости от внутреннего времени показано на рис. 3.

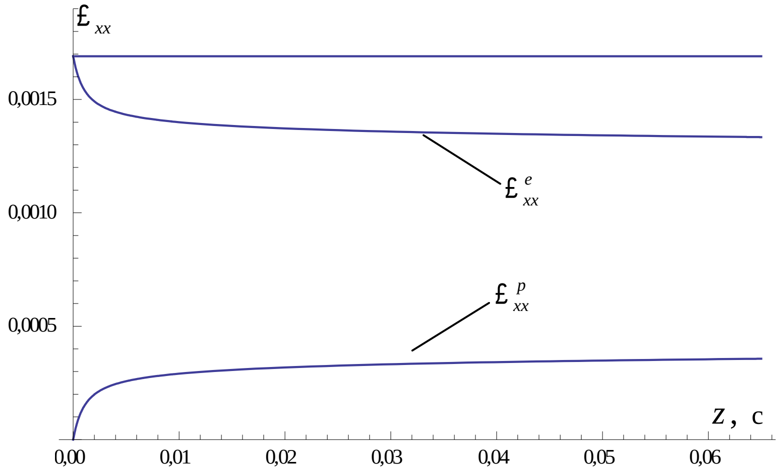

Рис. 3 – Закон изменения упругой и пластической деформации в пластической области стержня

При сравнении напряженно-деформированного состояния материала стержня, полученного в рамках данных граничных условий, с результатами исследований [6], когда к торцу прикладывается постоянная сила, необходимо отметить их существенное различие. В то же время для этих двух вариантов граничных условий не наблюдается состояние внезапной упругой разгрузки на волне запаздывания текучести. Следовательно, есть все основания утверждать об отсутствии эффекта упругой разгрузки в материалах с запаздыванием текучести.

Для построения пространственной картины изменения $\pm_{xx}$ за фронтом волны запаздывания текучести, в решении уравнения (36) выполним следующую замену: $z \to t - ² - \dfrac{x}{c}$. Учитывая выбранные постоянные материала, для скорости упругой волны имеем $c = \sqrt{\dfrac{E}{°}} = 5100\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Переходим к определению численного значения времени задержки текучести ² .

Исследования показывают [10], что время задержки текучести, при котором внезапно “перенагруженный” материал, $\sqrt{\dfrac{3}{2} s_{ij}^{*} s_{ij}^{*}} > \pm_{s}$, находится в упругом состоянии, равно времени, за которое это напряжение начала текучести достигается при нагружении с определенной скоростью. Поэтому время запаздывания текучести для произвольного напряженного состояния будем определять следующим образом

$$² = \frac{\sqrt{\dfrac{3}{2} s_{ij}^{*} s_{ij}^{*}} - \pm_{s}}{\sqrt{\dfrac{3}{2} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij}}}, \qquad (38)$$

где $\dot{s}_{ij}$ – компоненты девиатора скоростей напряжений.

Исходя из динамического критерия текучести материала (5), имеем

$$\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}=\pm_{s}+\frac{k^{2}}{\pm_{s}}\left(\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}^{e}\dot{e}_{ij}^{e}\right)^{2/n}. \qquad (39)$$

Запишем закон Гука в виде зависимости между компонентами девиатора напряжений и деформаций

$$e_{ij}^{e}=\frac{s_{ij}}{2G}, \text{ модуль сдвига } G=\frac{E}{2(1+\neg)}. \qquad (40)$$

После дифференцирования (40) по времени и подстановки результата в (39), запишем

$$\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}=\pm_{s}+\frac{k^{2}}{\pm_{s}}\left[\frac{(1+\neg)^{2}}{E^{2}}\left(\frac{3}{2}\dot{s}_{ij}\dot{s}_{ij}\right)\right]^{2/n}. \qquad (41)$$

Разрешая (41), находим

$$\sqrt{\frac{3}{2}\dot{s}_{ij}\dot{s}_{ij}}=\frac{E\pm_{s}^{n/4}}{(1+\neg)k^{n/2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}-\pm_{s}\right)^{n/4}. \qquad (42)$$

Подставляя (42) в (38), получим необходимое соотношение для определения ²

$$² =\frac{k^{n/2}(1+\neg)}{E\pm_{s}^{n/4}\left(\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*}}-\pm_{s}\right)^{\frac{n}{4}-1}}. \qquad (43)$$

Учитывая полученное в (13) и принятое значение $n=24$, после преобразований запишем

$$² =\frac{k^{12}(1+\neg)}{E\pm_{s}^{6}\left(\pm_{xx}^{*}-\pm_{s}\right)^{5}}. \qquad (44)$$

После подстановки в формулу (44) принятых постоянных материала и значения $\pm_{xx}^{*}$, определяем $² =1{,}454\cdot10^{-4}$ с.

Вычисленное значение ² позволяет получить общую картину поля напряжений $\pm_{xx}(x,t)$ за фронтом волны запаздывания текучести. Результат, полученный на основании решения уравнения (36) и соответствующей замены, показан на рис. 4.

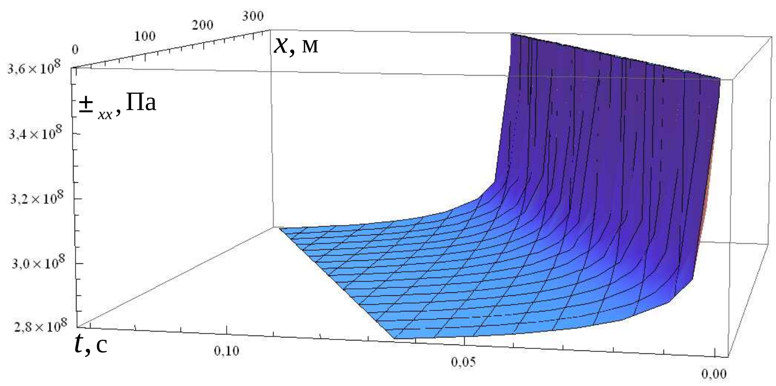

Рис. 4 – Поле напряжений за фронтом волны запаздывания текучести

Построение и исследование сингулярного решения определяющего уравнения упруго-вязкопластического состояния стержня. При нахождении решения уравнения (36) было наложено условие, согласно которому скорость изменения напряжения $\dot{\pm}_{xx}(z)$ принимает отрицательные значения. Предполагалось, что напряжение $\pm_{xx}(z)$ только убывает. Это было сделано сознательно, поскольку без наложения такого условия уравнение (36) имеет странное решение, содержащее сингулярные особенности. Для его получения, согласно рекомендации [11], будем искать решение уравнения (36) в параметрической форме. Выполним следующую замену: $\pm_{xx} - 2{,}15\cdot10^8 = u$. В результате для (36) получим

$$1{,}405\cdot10^7\left(|\dot{u}|\right)^{1/12} - 5{,}72\cdot10^{-4}\dot{u} - u = 0. \qquad (45)$$

Введем следующий параметр $\mu = \dot{u} = \dot{\pm}_{xx}$. Следовательно, из уравнения (45) имеем

$$1{,}405\cdot10^7\left(|\mu|\right)^{1/12} - 5{,}72\cdot10^{-4}\mu = u. \qquad (46)$$

После дифференцирования (46) по времени z, запишем

$$\mu = \left(\frac{1{,}405\cdot10^7}{12}\left(|\mu|\right)^{-\frac{11}{12}}\operatorname{sign}\mu - 5{,}72\cdot10^{-4}\right)\dot{\mu}. \qquad (47)$$

Перепишем это уравнение в таком виде

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{1{,}405\cdot10^7}{12}\left(|\mu|\right)^{-\frac{23}{12}} - \frac{5{,}72\cdot10^{-4}}{\mu}. \qquad (48)$$

После интегрирования (48), находим общий интеграл

$$z = -\frac{1{,}405\cdot10^7}{11}\left(|\mu|\right)^{-\frac{11}{12}}\operatorname{sign}\mu - 5{,}72\cdot10^{-4}\ln|\mu| + C. \qquad (49)$$

Возвращаясь к уравнению (46), после выполнения обратной замены, получим

$$\pm_{xx} = 2{,}15\cdot10^8 - 5{,}72\cdot10^{-4}\mu + 1{,}405\cdot10^7\left(|\mu|\right)^{1/12}. \qquad (50)$$

Соотношения (49) и (50) представляют собой общее решение дифференциального уравнения (36), записанное в параметрическом виде. Для определения постоянной интегрирования в (49), определим μ_0 на фронте волны запаздывания текучести. После подстановки в (50) значения $\pm_{xx}(\mu_0) = \pm^{*}_{xx} = 3{,}55 \cdot 10^{8}$ Па получим исходное уравнение, решая которое, имеем $\mu_0 = -5{,}2585 \cdot 10^{10} \dfrac{\text{Па}}{\text{с}}$. Из уравнения (49) находим следующее значение постоянной интегрирования

$$C = \frac{1{,}405 \cdot 10^{7}}{11} \left(|\mu_0|\right)^{-\frac{11}{12}} \operatorname{sign}\mu_0 + 5{,}72 \cdot 10^{-4} \ln|\mu_0| \,. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (49), имеем

$$z = 5{,}72 \cdot 10^{-4} \ln\left|\frac{\mu_0}{\mu}\right| - 1{,}277 \cdot 10^{6} \left(\left(|\mu|\right)^{-\frac{11}{12}} \operatorname{sign}\mu - \left(|\mu_0|\right)^{-\frac{11}{12}} \operatorname{sign}\mu_0 \right). \tag{52}$$

Для определения значения параметра μ и соответствующих моментов времени, при которых решение уравнения (36) содержит сингулярные особенности в виде точек разрыва 1-го рода, приравняв правую часть равенства (48) к нулю, запишем

$$1{,}17 \cdot 10^{6} - 5{,}72 \cdot 10^{-4} \left(|\mu|\right)^{11/12} = 0 \cdot \tag{53}$$

Выбрав из решения этого уравнения корень, дающий сингулярную особенность, получим

$$\mu_2 = 1{,}4362 \cdot 10^{10} \frac{\text{Па}}{\text{с}} \,. \tag{54}$$

Значение напряжения $\pm_{xx}$, при котором $\mu = \mu_2$, находим после подстановки (54) в (50), в результате чего имеем

$$\pm_{xx}(\mu_2) = 3{,}0544 \cdot 10^{8} \text{ Па} \,. \tag{55}$$

Подставив найденное значение $\pm_{xx}(\mu_2)$ в уравнение (50), запишем

$$\pm_{xx}(\mu_2) = 2{,}15 \cdot 10^{8} - 5{,}72 \cdot 10^{-4} \mu + 1{,}405 \cdot 10^{7} \left(|\mu|\right)^{1/12}. \tag{56}$$

Из решения (56) получаем следующие действительные корни

$$\mu_1 = -3{,}7836 \cdot 10^{9} \frac{\text{Па}}{\text{с}}, \quad \mu_2 = 1{,}4362 \cdot 10^{10} \frac{\text{Па}}{\text{с}} \,. \tag{57}$$

Теперь осталось определить значение μ_3, для которого переход от μ_2 до μ_3 происходит при неизменном времени. Его можно определить, если в уравнении (52) выполнить замену $\mu_0 \to \mu_2$, $z \to 0$. Запишем

$$5{,}72 \cdot 10^{-4} \ln\left|\frac{\mu_2}{\mu}\right| + \frac{1{,}405 \cdot 10^{7}}{11} \left(\left(|\mu_2|\right)^{-\frac{11}{12}} \operatorname{sign}\mu_2 - \left(|\mu|\right)^{-\frac{11}{12}} \operatorname{sign}\mu \right) = 0. \tag{58}$$

Решая это уравнение, получим искомое

$$\mu_3 = -5{,}7979 \cdot 10^{11} \frac{\text{Па}}{\text{с}}. \quad (59)$$

Для графического представления решения уравнения (36) на основании его параметрической формы записи (49) и (50), целесообразно найти промежуток внутреннего времени Δz_0, когда $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ и повторяемые интервалы времени Δz_1 для $\mu \in [\mu_3, \mu_1]$. Из уравнения (52), выполняя соответствующие подстановки, получим

$$\Delta z_0 = 0{,}003436\ \text{с}, \quad \Delta z_1 = 0{,}003509\ \text{с}. \quad (60)$$

На основании полученного результата состояния стержня между фронтами волн (1) (рис. 1) и сингулярного решения для пластической области материала, построим график зависимости $\pm_{xx}(z)$ для различных интервалов времени.

В том случае, когда $z \in [0, ²]$, за фронтом упругой волны переносится постоянное напряжение $\pm^*_{xx} = 3{,}55 \cdot 10^8$ Па. Для промежутка времени $z \in [², ² + \Delta z_0]$, закон изменения напряжения определяется на основании параметрических уравнений (50) и (52). Аналогично для интервала времени $z \in [² + \Delta z_0, ² + \Delta z_0 + \Delta z_1]$ используем те же самые уравнения, только выполняя замену в (52) $\mu_0 \to \mu_3$. Дальнейшее изменение времени z приводит к циклической повторяемости этих решений. Используя эти зависимости, получим график изменения $\pm_{xx}(z)$ в возмущенной области стержня, показанный на рис. 5.

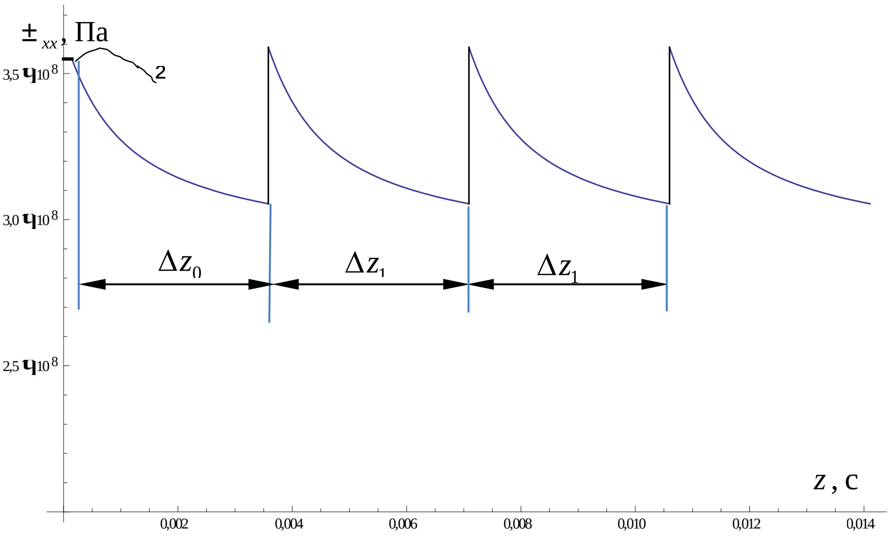

Рис. 5 – Графическое представление сингулярного решения уравнения состояния стержня в возмущенной области

Полученный результат отображает странное поведение материала. Вся возмущенная область полубесконечного стержня пребывает в состоянии “трепетания”. Автор и сам сомневается, что сингулярное решение уравнения состояния может отображать реальное поведение упруго-вязкопластической среды. Однако в некоторых экспериментах на растяжение – сжатие обнаруживается повторяющийся ступенчатый характер диаграммы деформирования (эффект Портевена – Ле-Шателье). Кроме того, при динамических испытаниях конструкционных материалов [12] наблюдается пилообразная деформация как следствие динамической неустойчивости пластической волны.

Выводы. Проведенное исследование распространения упруго-вязкопластических волн в материале с запаздыванием текучести не подтверждает устоявшееся утверждение о мгновенной упругой разгрузке на фронте волны запаздывания текучести. Решение задачи выполнено в постановке, когда удар по торцу ненагруженного полубесконечного стержня сообщает концевому сечению постоянную скорость. Установлено, что характеристическая линия, отделяющая пластическую область от упругой, есть фронт волны слабого разрыва. Полученный результат указывает на возможность значительного упрощения построения общей картины волновых процессов в материалах с запаздыванием текучести. Показана возможность возникновения сингулярного решения определяющего уравнения с особенностями в виде точек разрыва 1-го рода. Такое решение отображает странное поведение среды, когда материал стержня в пластической области находится в состоянии “трепетания”. Этот результат, хотя и спорный, совпадает с точкой зрения, что пластическую деформацию необходимо рассматривать как волновой процесс [13].

P.S. Работа посвящена светлой памяти выдающегося ученого в области механики деформируемого твердого тела и математической теории пластичности Константина Николаевича Русинко, моего Учителя, большого Ученого и Мыслителя посвятившего жизнь большой Науке.

1. *Андрусик Я. Ф.* Ще раз про зуб плинності та формулювання динамічної умови пластичності. Вісник Нац. ун.-ту “Львівська політехніка”. Серія “Фізико-математичні науки”. 2014. № 804. С. 120 – 126.
2. *Работнов Ю. Н.* Модель упруго – пластической среды с запаздыванием теку чести. ПМТФ. 1968. № 3. С. 45 – 54.
3. *Суворова Ю. В.* Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ). ПМТФ. 1968. № 3. С. 55 – 62.
4. *Русинко К. Н.* Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища школа. Изд – во при Львов. ун – те, 1981. 148 с.
5. *Русинко К. Н.* Особенности неупругой деформации твердых тел. Львов: Вища школа. Изд – во при Львов. ун – те, 1986. 152 с.
6. *Andrusyk Y.* Propagation of Elastic – Tough – Plastic wave in a Rod of idealy Plastic Material which Possesses the Property of Yield Delay. Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. 2015. V. 1, N. 2. P. 51 – 56.
7. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд – во Моск. ун – та, 1985. 415 с.
8. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд – во Моск. ун – та, 1979. 208 с.
9. *Новацкий В. Н.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
10. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
12. *Брагов А. М., Ломунов А. К.* Использование метода Кольского для динамических испытаний конструкционных материалов. Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн. меж. вуз. сб. – Нижегородский ун – т. 1995. № 53. С. 127 – 137.
13. *Панин В. Е., Зуев Л. Б., Данилов В. И., Мних Н. М.* Пластическая деформация как волновой процесс. Докл. АН СССР. –1989. – Т. 308, № 6.

Получено 11.05.2017,
в окончательном варианте 12.06.2017