УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2023.03.098

Ю. Е. СУРГАНОВА, Ю. В. МІХЛІН

РЕГУЛЯРНА ТА СКЛАДНА ПОВЕДІНКА МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
вул. Кирпичова, 2, 61001, Харків, Україна; e-mai: yuliia.surhanova@khpi.edu.ua, yuri.mikhlin@gmail.com

Розглянуто динаміку коливальної дисипативної системи, що складається з двох зв'язаних маятників у магнітному полі. Поєднання цих маятників відбувається за допомогою пружного елементу. Інерційні компоненти маятників змінюються в широких межах, причому в аналітичному дослідженні співвідношення мас вибирається як малий параметр. Для наближених розрахунків магнітних сил використовується апроксимація Паде, що найбільшою мірою задовольняє експериментальні дані. Це наближення забезпечує опис магнітного збудження з хорошою точністю. Наявність зовнішніх впливів у вигляді магнітних сил та різного типу навантажень, які існують в багатьох інженерних системах, приводить до значного ускладнення аналізу форм коливань нелінійних систем. Проведено дослідження нелінійних нормальних мод коливань в даній системі, причому одна з мод є зв'язаним режимом, а друга – локалізованою. Моди коливань побудовано методом багатьох масштабів. Вивчається як регулярна, так і складна поведінка при зміні параметрів системи, серед яких коефіцієнт пропорційності мас маятників, коефіцієнт зв'язку, коефіцієнт інтенсивності магнітного впливу, а також відстань між віссю обертання та центром тяжіння. Вплив вказаних параметрів досліджується як при малих, так і при чималих початкових кутах нахилу маятників. Аналітичний розв'язок порівняно з результатами чисельного моделювання, який базується на методі Рунге–Кутти четвертого порядку, де для розрахунку мод коливань використовуються початкові значення змінних, визначені в аналітичному розв'язку. Чисельне моделювання, що включає побудову фазових діаграм і траєкторій у конфігураційному просторі дозволяє оцінити динаміку системи, яка може бути як регулярною, так і складною. Стійкість пов'язаної моди коливань досліджується за допомогою чисельно-аналітичного тесту, що є реалізацією критерія стійкості за Ляпуновим. При цьому стійкість моди коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень від траєкторії відповідної моди коливань в конфігураційному просторі.

Ключові слова: *пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів.*

This paper considers the dynamics of an oscillatory dissipative system of two coupled pendulums in a magnetic field. The pendulums are coupled via an elastic element. The inertial components of the pendulums vary over a wide range, and in the analytical study the mass ratio is chosen as a small parameter. The magnetic forces are calculated using the Padé approximation, which best agrees with the experiment. This approximation describes the magnetic excitation to good accuracy. The presence of external inputs in the form of magnetic forces and various types of loads that exist in many engineering systems significantly complicates the mode shape analysis of nonlinear system. Nonlinear normal modes of this system are studied, one mode being coupled and the other being local. The modes are constructed by the multiple-scale method. Both regular and compound behavior is studied as a function of the system parameters: the pendulum mass ratio, the coupling coefficient, the magnetic intensity coefficient, and the distance between the axis of rotation and the center of gravity. The effect of these parameters is studied both at small and at sizeable initial pendulum inclination angles. The analytical solution is compared with the results of a numerical simulation based on the fourth-order Runge–Kutta method where the modes are calculated using the initial values of the variables found in the analytical solution. The numerical simulation, which includes the construction of phase diagrams and trajectories in the configuration space, allows one to assess the dynamics of the system, which may be both regular and compound. The stability of the coupled mode is studied using a numerical-analytical test, which is an implementation of the Lyapunov stability criterion. In doing so, the stability of a mode is determined by assessing the vertical off-trajectory deviation of the mode in the configuration space.

Keywords*: coupled pendulums, magnetic forces, nonlinear normal modes, multiple-scale method.*

Вступ. Моделі математичних та фізичних маятників досить часто використовуються для представлення нелінійної динаміки різних типів нелінійних систем. Одним з найважливіших етапів у дослідженні динаміки нелінійних систем з кількома степенями свободи є вивчення нелінійних нормальних мод коливань (ННМ). Велике значення для інженерних застосувань має визначення можливості локалізації коливань, яке іноді шкодить нормальному функціонуванню машин та апаратів. Крім того, важливим уявляється дослідження коливань систем, що знаходяться під впливом магнітних сил. Зазначимо, що ця остання задача для суттєво нелінійних систем є достатньо складною для дослідження і далека від свого розв'язання.

В декількох останніх публікаціях проведено теоретичне та експериментальне дослідження динаміки двох з'єднаних маятників у магнітному полі [1 – 3]. В цих роботах, зокрема, представлено графік моменту магнітних сил, отриманий шляхом експериментів. Дослідження нелінійних режимів нормальних мод коливань в такій системі без врахування впливу дисипативних сил для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно розрізняються, виконано в [4]. Зазначимо, що відтепер різноманітні аспекти теорії ННМ та її різноманітні застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [5, 6] і книзі [7]. Можна також відзначити, що проблема локалізації коливань дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, і досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких ми виділяємо [8 – 10]. В даній моделі ми досліджуємо як пов'язану, так і локалізовану моди коливань.

В роботі досліджено нелінійні нормальні моди коливань в маятниковій системі, що знаходиться в магнітному полі, з урахуванням опору середовища та моменту демпфування, створеного пружним елементом. Розглядається система з двома ступенями свободи, в якій маси маятників суттєво розрізняються, що приводить до можливості появи локалізації коливань. Система є автономною та дисипативною. Суттєва нелінійність, присутня в системі, приводить до необхідності застосування асимптотичних методів для аналізу мод коливань. Використано метод багатьох масштабів, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також чисельне моделювання. Крім побудови мод коливань досліджено їх стійкість, а також зроблено висновки про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

Дослідження математичної моделі руху пов'язаних маятників. Досліджувана математична модель руху пов'язаних маятників представлена на рис. 1,

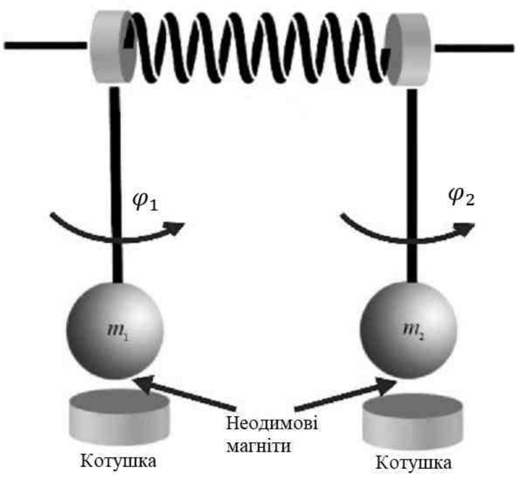


Рис. 1 – Система пов'язаних маятників

де μ – відношення мас двох маятників; ε – умовний малий параметр; $\varepsilon = 1$; m – маса більшого маятника; $k_l^* = \frac{k_l}{I}, I = 4ms^2$ – жорсткість пов'язаного пружного елемента; $k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2)$ – момент крутильної деформації пружного елемента; γ – інтенсивність магнітного збудження; $M^*_{m\ g_{1,2}} = \frac{M_{m\ g_{1,2}}}{I}, M_{m\ g_{1,2}}$

– магнітний вплив; $C_{1,2}^* = \frac{C_{1,2}}{I}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнт опору в’язкого повітря; $C_e^* = \frac{C_e}{I}$, C_e – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом; $r^* \sin\varphi$ – момент повернення сили тяжіння; $r^* = \frac{r}{I}$, ; s – відстань між центром мас маятника і віссю обертання. Система описується системою диференційних рівнянь (1).

$$\begin{cases} \varepsilon\ \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon\ M_m^*\ \ _{g_1} - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon\ r^* \sin\varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon\ M_m^*\ \ _{g_2} - \varepsilon C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \sin\varphi_2 - k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{1}$$

Зазначимо, що одиниці виміру параметрів, які в подальшому не будуть наведені, є такими: m виміряється в кг, s – в м, r – в Нм, I – в кгм^2, k_l – в Нм/рад, φ – в рад. (в дужках будуть також наведено їх значення в градусах, ε та γ – безрозмірні величини. Прийнято, що $g = 9.81$ м/с^2. Без втрати узагальненості в чисельних розрахунках використовуємо наступні умови: $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Досліджується ситуація, коли кути повороту двох маятників є не дуже значними, тому використовується розкладання синусів в ряди Маклорена зі збереженням членів не вище третього степеня.

Використано Паде-апроксимацію магнітного впливу у формі (2).

$$M_m\ \ (\varphi) = \left(a_0 + \frac{a_1\varphi + a_2\varphi^3}{1 + b_1\varphi^2 + b_2\varphi^4}\right) \mathrm{sign}(\varphi), \tag{2}$$

де a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі, отримані з використанням процедури нелінійного методу найменших квадратів для того, щоб найкращим чином задовольнити експериментальні дані [1 – 3]. Порівняння цієї апроксимації з експериментальними даними представлено на рис. 2.

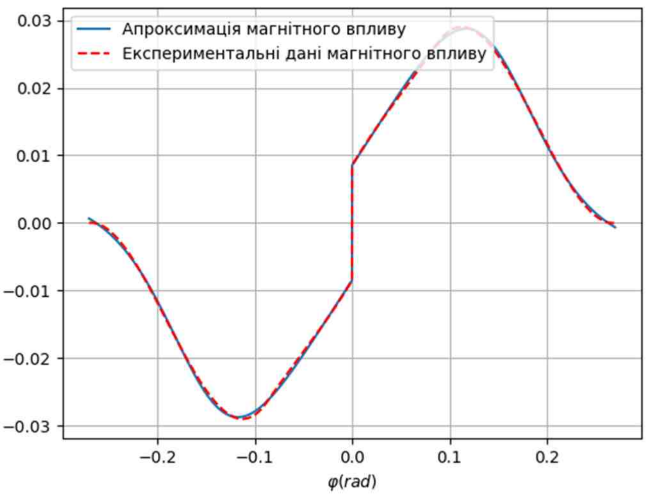


Рис. 2 – Експериментальні дані магнітного моменту у порівнянні з чисельно узгодженою моделлю

Представимо розв’язок (1) у вигляді розкладання за малим параметром

$$\varphi_1 = \varphi_1\ \ + \varepsilon\varphi_1\ \ + O(\varepsilon^2), \varphi_2 = \varphi_2\ \ + \varepsilon\varphi_2\ \ + O(\varepsilon^2), \tag{3}$$

де φ_1 , φ_2 – розв'язок породжувальної лінійної системи, φ_1 , φ_2 – розв'язок першого наближення за малим параметром ε .

Використовується метод багатьох масштабів [10]. У відповідності до цього методу вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\ , \tau = \omega_0 t, \tag{4}$$

де T_0 – швидкий час; T_1 – повільний час.

Виконуючи стандартні перетворення цього метода, отримаємо системи рівнянь (5) та (6), відповідні двом першим наближенням за малим параметром ε:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} -k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ \omega_0^2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_2 - k_l^*(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{5}$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \mu\omega_0^2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0^2} = \gamma M_{m\ g_1}^* - C_1^* \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T_0} - \mu r^* \varphi_1 - k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \omega_0^2 \left(2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0^2}\right) = \gamma M_{m\ g_2}^* - C_2^* \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} - r^* \left(\varphi_2 - \frac{1}{6}\varphi_2^3\right) - k_l^*(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язком (5) є $\varphi_1 = \varphi_2 = A_1(T_1)\cos(T_0 + \nu)$, що відповідає *синфазній пов'язаній формі коливань*. Магнітний момент, що діє на перший маятник, представлено рядом Фур'є відповідно до співвідношення (7) (для магнітного впливу на другий маятник будемо використовувати коефіцієнти $h_i, i = \overline{(0,6)}$).

$$M_{m\ g_1}^* \approx \frac{1}{I}\left(\frac{g_0}{2} + \sum_{i=1}^{6} g_i \cos(i(T_0 + \nu))\right), \tag{7}$$

де $g_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(\varphi_1)\left(a_0 + \frac{a_1\varphi_1 + a_2\varphi_1^3}{1+b_1\varphi_1^2 + b_2\varphi_1^4}\right)\cos(i(T_0 + \nu))\, dT_0,\ i = \overline{(0,6)}.$

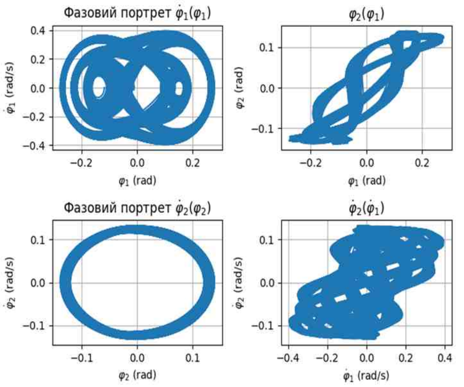
Щоб запобігти появі секулярних доданків у системі рівнянь (6), ми виключаємо доданки, що містять функції $\cos(T_0 + \nu)$ та $\sin(T_0 + \nu)$ у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо рівняння (8) та (9).

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 A_1 \frac{d}{dT_1} + \frac{\gamma}{I}(g_1 + h_1) + \frac{r^* A_1}{8} = 0, \tag{8}$$

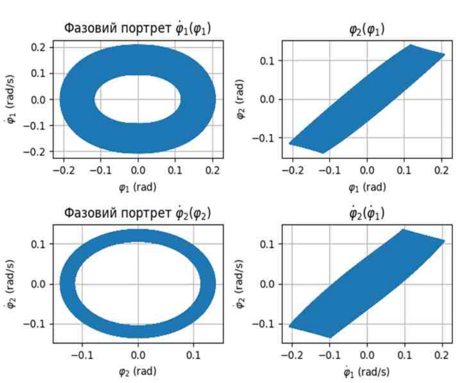
$$\sin(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 \frac{dA_1}{dT_1} + A_1(C_1^* + C_2^*) = 0. \tag{9}$$

Звідси випливає, що $A_1 = e^{A_3 - \frac{(C_1^* + C_2^*)T_1}{2\omega_0^2}}, \nu = \frac{-\gamma(g_1 + h_1)}{I(C_1^* + C_2^*)} e^{\frac{(C_1^* + C_2^*)T_1}{2\omega_0^2} - A_3} +$ $+ \frac{\omega_0^2}{1\ (C_1^* + C_2^*)} e^{2A_3 - \frac{(C_1^* + C_2^*)T_1}{\omega_0^2}}$, де A_3 – довільна константа, що визначається початковим відхиленням маятника. Порівняння аналітичного розв'язку з чисельним, застосованим до базової системи (1) з використанням методу Рунге–Кутти 4-го порядку, проведено для початкових значень змінних, які визначаються з аналітичного рішення. Таке порівняння показує хорошу точність аналітичної апроксимації при достатньо малих значеннях параметра μ, та для таких значень початкових кутів маятників, які приблизно не перевищують $60°$.

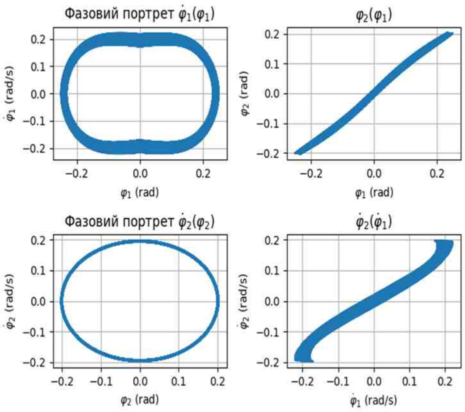
Тепер розглянемо вплив параметрів системи та початкових умов на цю форму коливань. Параметр A_3, який пов'язаний з початковим відхиленням, будемо змінювати у діапазоні від –1.5 до 1.5 і розглядати тільки випадки, коли початкове відхилення не перевищує $60°$. Інші параметри зафіксуємо таким чином: $m = 0.5, s = 2.5, k_l = 1\ , \varepsilon = 1, \gamma = \frac{1}{5}$, і розглянемо декілька значень коефіцієнта пропорційності мас $\mu = \{0.01, 0.05, 0.1\}$. Тут і надалі час моделювання поведінки системи складатиме 3000 секунд. Результати представлено на рис. 3.



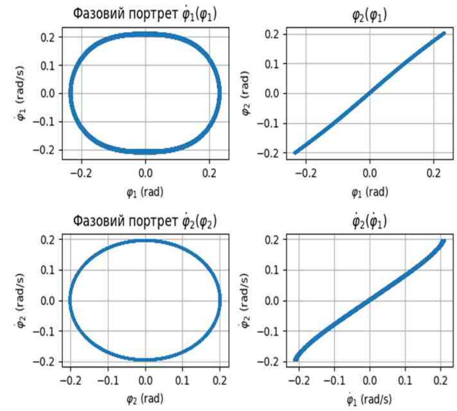
а)



б)



в)



г)

Рис. 3 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних початкових умовах та коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників

На рис. 3, а) обрано таке: $\mu = 0.02, \varphi_1(0) = -0.12\ (-6.75°)$, $\varphi_2(0) = -0.14\ (-8°)$, на відміну від рис. 3, а) на рис. 3, б): $\mu = 0.2$, на рис. 3, в): $\mu = 0.05$, $\varphi_1(0) = 0.23\ (13.25°)$, $\varphi_2(0) = 0.203\ (11.65°)$ та на рис. 3, г): $\mu = 0.1$, а інші параметри співпадають з даними на рис. 3, в). Приходимо до висновку, що зі збільшенням коефіцієнта пропорційності мас маятників блукання поблизу модальних траєкторій в конфігураційному та фазовому просторах системи зменшуються.

Розберемо тепер вплив відстані між віссю обертання та центром тяжіння маятників s. На цьому етапі дослідження ми розглядаємо різні початкові значення кутів маятників та різні величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, а параметр $s \in [0.1,4]$. Інерційні моменти при зміні відстані перераховувались кожного разу. Отримано, що синфазна форма більш виражена при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника (рис. 4). Зі збільшенню відстані такий результат є очевидним, оскільки в такому випадку вплив магнітного моменту знижується. На рис. 4, а) обрано таке: $\mu = 0.02$,

$s = 1,\ I = 2,\ r = 4.905,\ \varphi_1(0) = -0.703\ (-40.3°),\ \varphi_2(0) = -0.675\ (-38.7°)$; на рис. 4, б): $\mu = 0.25,\ s = 1,\ I = 2, r = 4.905, \varphi_1(0) = 0.3607\ (20.7°), \varphi_2(0) = 0.3602\ (20.64°)$; на рис. 4, в): $\mu = 0.02, s = 2, I = 8, r = 9.81, \varphi_1(0) = 0.36\ (20.8°),\ \varphi_2(0) = 0.367\ (21°)$ та на рис. 4, г): $\mu = 0.25,\ s = 2,\ I = 8,\ r = 9.81,\ \varphi_1(0) = 0.36\ (20.8°),\ \varphi_2(0) = 0.367\ (21°)$.

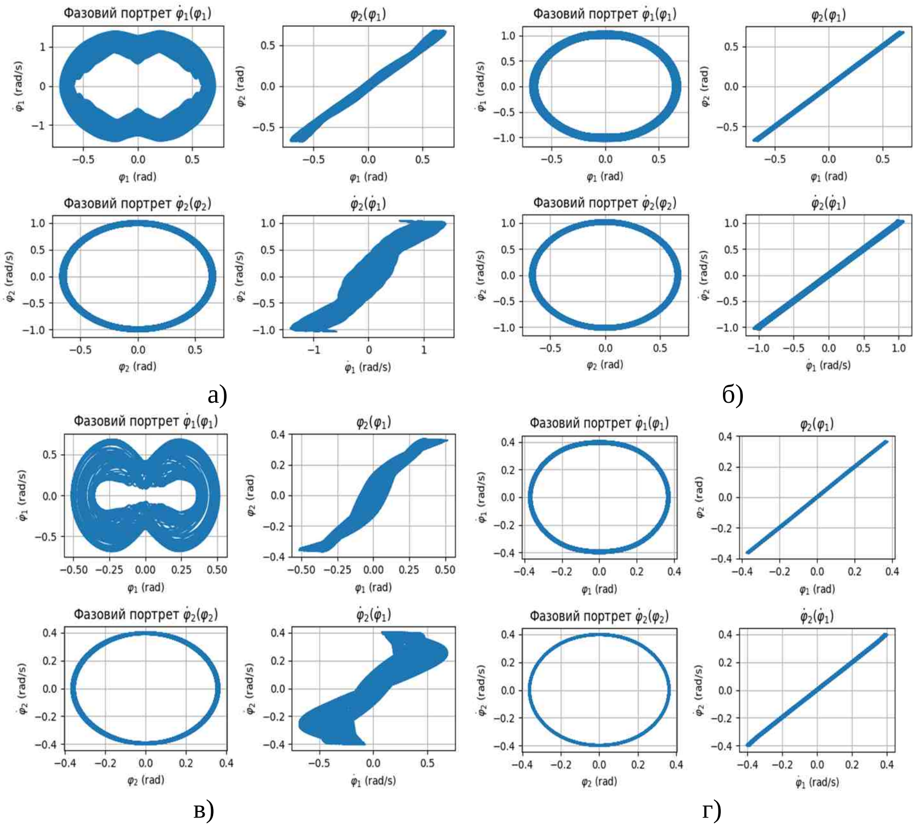
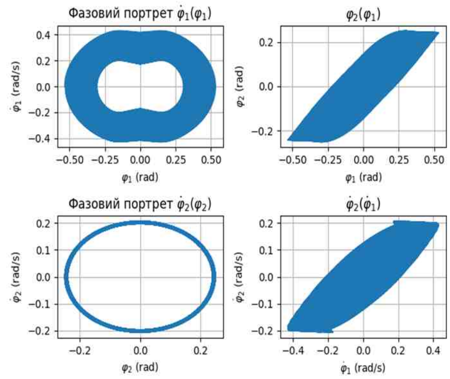
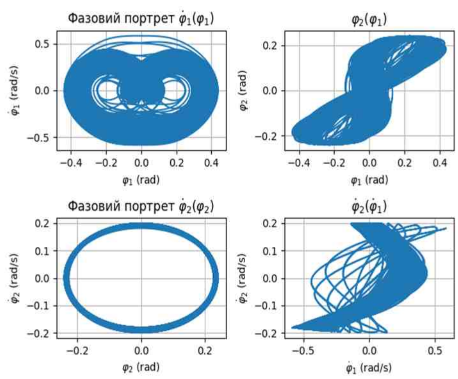


Рис. 4 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників та відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників

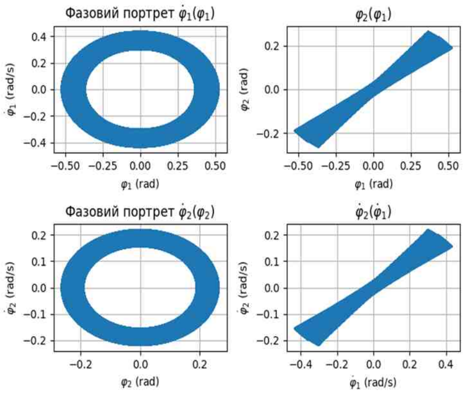
Дослідимо ефект коефіцієнта зв’язку, величину котрого змінюємо від 0.01 до 1. У більшості розглянутих випадках при великій відстані від осі обертання до центра мас маятника і чималому коефіцієнті співвідношення мас маятників збільшення значення коефіцієнта зв’язку призводить до стабілізації синфазної форми коливань і зменшення блукань траєкторій поблизу такої форми (рис. 5). На рис. 5, а) маємо: $s = 2.5, k_l = 0.04, \mu = 0.02, \varphi_1(0) = -0.532(-30.473°), \varphi_2(0) = -0.24(-13.81°)$; на рис. 5, б) $s = 2.5, k_l = 0.93, \mu = 0.02, \varphi_1(0) = -0.254(-14.53°), \varphi_2(0) = -0.241(-13.814°)$; на рис. 5, в) $s = 3.5, k_l = 0.06, \mu = 0.25, \varphi_1(0) = -0.435(-24.92°), \varphi_2(0) = -0.241\ (-13.813°)$; на рис. 5, г) $s = 3.5, k_l = 0.93, \mu = 0.25, \varphi_1(0) = (°), \varphi_2(0) = (22.2°)$.



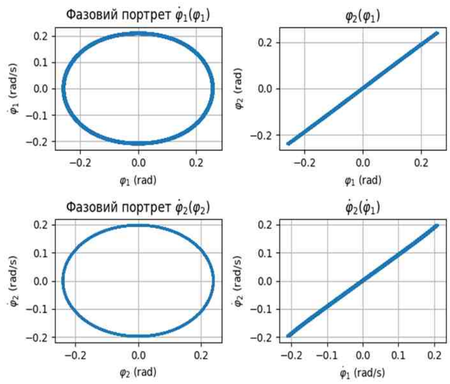
а)



б)



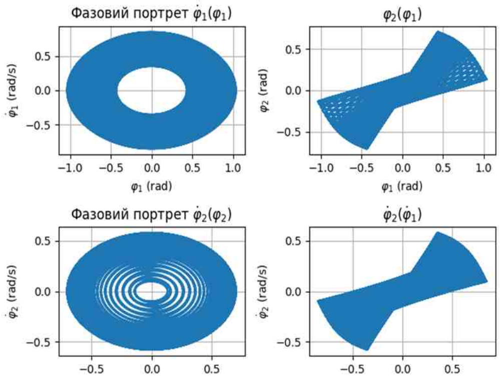
в)



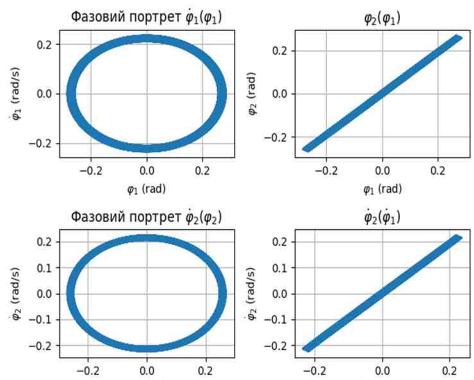
г)

Рис. 5 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників, відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників і коефіцієнтах зв'язку

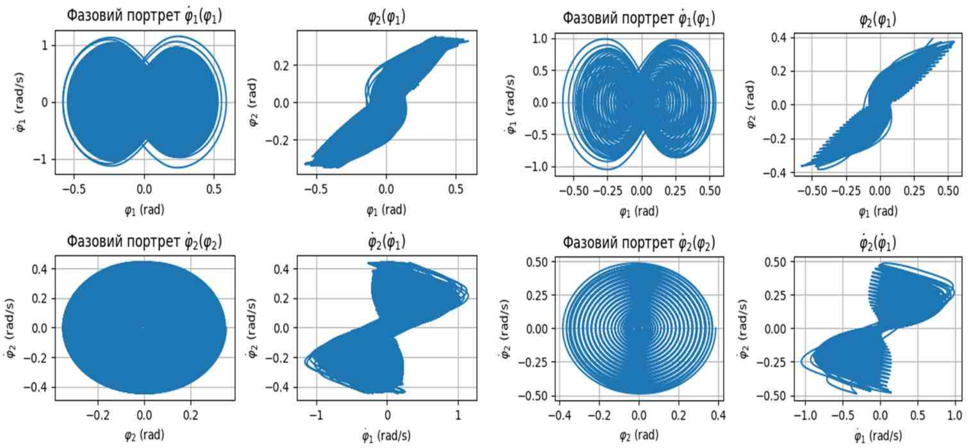
Вивчимо вплив в'язкого опору $C_{1,2}$ у сукупності з коефіцієнтом демпфуючого моменту C_e. Для проведення дослідження варіювалися вказані параметри у діапазоні від 10^{-5} до 10^{-2}. Отримано, що збільшення параметрів дисипації не завжди стягує траєкторії до моди (рис. 6). На рис. 6, а): $s = 3.5, k_l = 0.5, \mu = 0.55, \varphi_1(0) = 0.62(35.364°), \varphi_2(0) = 0.63(36.02°), C_{1,2,e} = 7 \cdot 10^{-5}$; на рис. 6, б) $\varphi_1(0) = 0.266(15.244°), \varphi_2(0) = 0.27(15.455°), C_{1,2,e} = 0.000574$; на рис. 6, в) $s = 1.5,\ k_l = 0.96,\ \mu = 0.02,\ \varphi_1(0) = 0.355\ (20.366°)$, $\varphi_2(0) = 0.35(20.24°),\ \ C_{1,2,e} = 0.00086$; на рис. 6, г) $\varphi_1(0) = 0.386\ (22.1°),\ \ \varphi_2(0) = 0.3884(22.253°),\ \ C_{1,2,e} = 0.00856$.



а)



б)



в) г)

Рис. 6 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі
(вплив параметрів дисипації)

Проаналізуємо далі *стійкість пов'язаної моди коливань* в залежності від параметрів A_3, μ шляхом чисельної реалізації критерія стійкості за Ляпуновим, який було запропоновано та описано в роботі [11]. Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі. Початкові умови для відхилень від траєкторії визначаються через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як $\widetilde{\varphi_{1,2}}(0) = 1.01\varphi_{1,2}(0)$. Потім розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем $\left|\widetilde{\varphi_{1,2}}(t)\right|$ перевищують значення $\rho\left|\varphi_{1,2}(0)\right|$. Як показано в [11], значення ρ можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні чисел, що перевищують 1. В даній роботі прийнято $\rho = 1.1$.

Оскільки ми досліджуємо стійкість мод коливань в залежності від значень параметрів A_3, μ , то на відповідній площині обираємо сітку значень в прямокутнику $A_3 \in [-2,2], \mu \in [0.01,0.25]$. Сітка будується за допомогою методу, який повертає по 50 рівновіддалених точок масиву A_3 та 25 точок масиву μ з вказаних діапазонів. Обчислення відхилень проведено методом Рунге–Кутти у вузлах сітки зі зростанням часу. Обчислення припиняються, коли границі областей стійкості/нестійкості на площині параметрів стабілізуються в обраному масштабі сітки при збільшенні часу обчислень. Це є важливий критерій для визначення часу розрахунків на стійкість/нестійкість і отримання відповідних областей на площині параметрів системи [11]. В даній задачі 1000 с достатньо для моделювання, оскільки після цього часу кількість вузлів нестійкості вже не зростає. Результати розрахунків представлені на рис. 7, де виділено області нестійкості, причому обрано $\gamma = \frac{1}{1}, m = 1, k_l = 1, s = 1.5$.

Результати розрахунків демонструють, що пов'язана мода є нестійкою при малих значеннях параметра μ , якщо початкові значення кутів малі. Це випливає з того, що при малих початкових кутах вплив магнітних сил суттєво перевищує вплив пружних сил у системи.

Спектр коливань для випадків стійкості та нестійкості, представлених на рис. 7, дано на рис. 8, де обрано такі значення параметрів: $A_3 = -1.02041, \mu = 0.01$ для рис. 7, а) та $\mu = 0.1$ для рис. 7, б). Як видно з рис. 7, а), маємо дві близькі частоти в спектрі нестійкої моди коливань, що приводить до появи так званого биття.

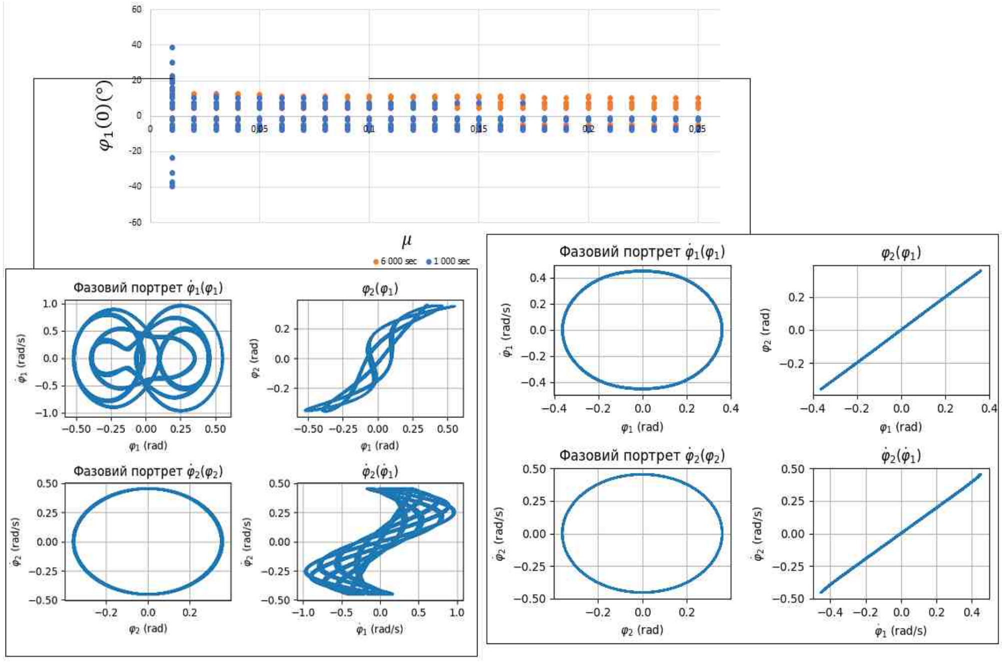
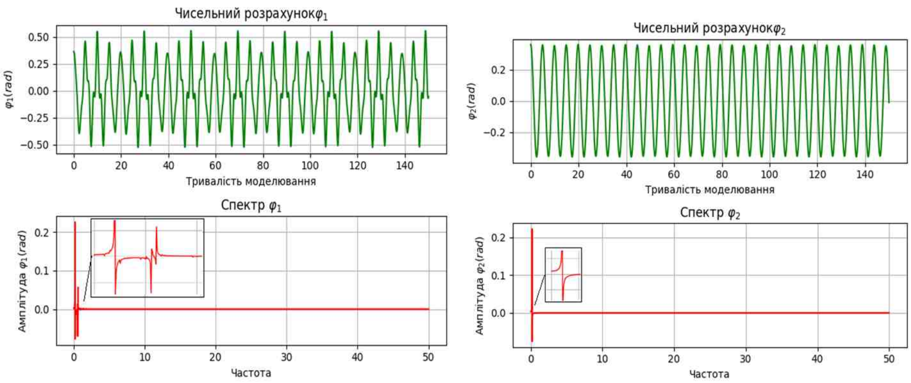
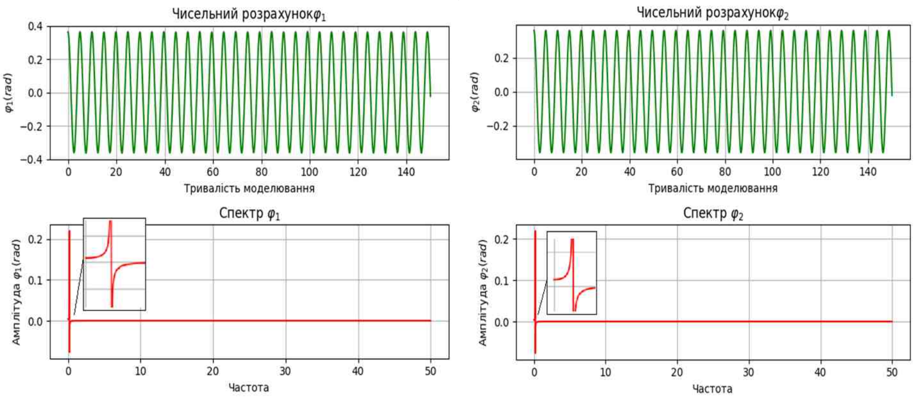


Рис. 7 – Області нестійкості пов'язаної моди, в залежності від часу моделювання системи, на площині параметрів $\varphi_1(0)$ та μ. Зразки нестійкої та стійкої форм коливань (відповідно на рис. 8, а), 8, б)).



а)



б)

Рис. 8 – Представлення за часом та спектри для нестійкої (а)) та стійкої (б)) пов'язаних мод коливань

Проведемо тепер дослідження *локалізованої моди коливань*. Така мода коливань може бути аналітично представлена після введення перетворення часу $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Тоді система (1) набуває вигляду (9)

$$\begin{cases} \mu\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon M_{m\ g_1} - \varepsilon C_1\dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon r\sin\varphi_1 - k_l(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon^2\gamma M_{m\ g_2} - \varepsilon^2 C_2\dot{\varphi}_2 - \varepsilon^2 C_e(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \varepsilon r\sin\varphi_2 - \varepsilon_l(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{9}$$

Аналогічно, як і у випадку синфазної моди, введемо у відповідності до метода багатьох масштабів швидкі та повільні часові масштаби та розкладемо шукані функції за малим параметром ε , подібно формулам (3) та (4). Запишемо дві системи, що відповідають двом наближенням за малим параметром:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \mu\omega_0^2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0^2} = -k_l(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \omega_0^2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0^2} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \mu\omega_0^2\left(2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\partial T_1} + \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0^2}\right) = \gamma M_{m\ g_1} - C_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_0} - C_e\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_0} - \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_0}\right) - \mu r\varphi_1 - k_l(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \omega_0^2\left(2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0\partial T_1} + \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0^2}\right) = -r\varphi_2 - k_l(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{11}$$

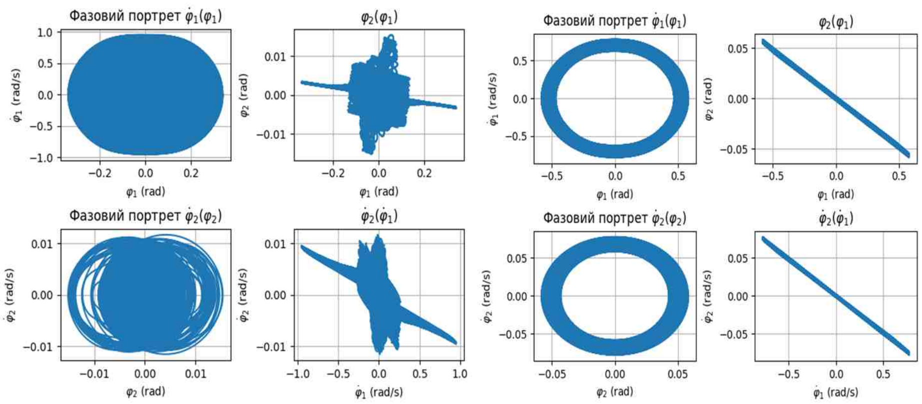
Рішенням (10) є $\varphi_2 = 0, \varphi_1 = A_1(T_1)\cos(T_o + v), \omega_0^2 = \frac{k_l}{\mu}$. Магнітний момент представимо у вигляді (7). Знову виключаємо доданки, що містять $\cos(T_0 + v)$ та $\sin(T_0 + v)$, тому

$$\cos(T_0 + v): 2\mu\ {}_0^2 A_1\frac{d}{dT_1} + \frac{\gamma}{I}g_1 - \mu A_1(r + k_l) = 0, \tag{12}$$

$$\sin(T_0 + v): 2\mu\omega_0^2\frac{dA_1}{dT_1} + A_1(C_1 + C_e) = 0. \tag{13}$$

Звідси випливає, що $A_1 = e^{A_3 - \frac{(C_1 + C_e)T_1}{2k_l}}, v = \frac{-\gamma g_1}{C_1 + C_e}e^{\frac{(C_1 + C_e)T_1}{2k_l} - A_3} + \frac{(r + k_l)T_1}{2\omega_0^2}$.

При дослідженні впливу параметрів A_3, який визначається початковими кутами маятників, та μ на локалізований режим ми прийшли до таких же висновків, як і при дослідженні синфазної моди. Зі збільшенням величини

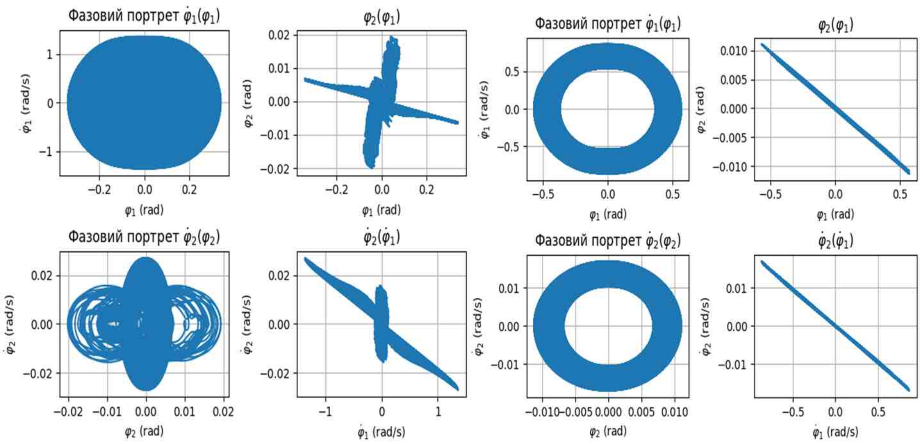


а) б)

Рис. 9 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов та коефіцієнтів відношення мас маятників коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і локалізована мода стає більш визначеною. Зрозуміло, що при малих початкових кутах локалізований режим не існує, тому що вплив магнітного моменту є дуже значним, як це показано, наприклад, на рис. 9.

На рис. 9, а), б) $A_3 = -0.33$, причому на рис. 9, а) $\mu = 0.01$, $\varphi_1(0) = 0.3396(19.46°)$, $\varphi_2(0) = -0.003473r$ $(-0.2°)$. А на рис. 9, б) $\mu = 0.1$, $\varphi_1(0) = -0.58(-33.23°)$, $\varphi_2(0) = 0.06(3.44°)$. Інші параметри системи змінювались так само, як і при дослідженні синфазної моди.

Як і для синфазної форми, локалізований режим спостерігається при збільшенні відстані s. Це показано на рис. 10, де $A_3 = -0.33$, $\mu = 0.02$, причому $s = 1.25$, $\varphi_1(0) = -0.34\ (-19.564°)$, $\varphi_2(0) = 0.0068\ (0.391°)$ для рис. 10, а), та $s = 3.8$, $\varphi_1(0) = 0.57\ (32.67°)$, $\varphi_2(0) = -0.0113\ (-0.6453°)$ для рис. 10, б)



а) б)

Рис. 10 – Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов та відстані між центром мас та віссю обертання маятників

Для скорочення опишемо вплив коефіцієнта зв'язку та коефіцієнтів дисипації на поведінку системи у випадку локалізованої моди коливань без представлення рисунків. Виявляється, що локалізація коливань проявляється при збільшенні зв'язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Як і у випадку пов'язаної моди коливань деяке зростання дисипації не завжди зберігає моду чи стягує близькі траєкторії до неї. Чисельне моделювання дозволяє зробити висновок, що зростання коефіцієнта пропорційності мас разом зі значними значеннями зв'язку та відстані при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованого режиму або, іншими словами, стягують траєкторії до цього режиму.

Висновки. Стійка синфазна (пов'язана) мода коливань існує не на всьому діапазоні початкових умов. Вона є нестійкою при малих початкових значеннях кутів відхилення маятників, якщо маси маятників суттєво розрізняються. Збільшення коефіцієнта пропорційності мас маятників приводить до зменшення блукання траєкторій поблизу моди. Синфазна мода більш виражена при більшій відстані між центром мас та віссю обертання, оскільки тоді вплив магнітного моменту менший. Цей режим спостерігається при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника. У більшості розглянутих випадків при значних значеннях відстані від осі обертання до центра мас маятника та коефіцієнта співвідношення мас збільшення значення коефіцієнта зв’язку приводить до стабілізації синфазної моди і зменшення блукань траєкторій поблизу такої моди. Збільшення дисипації не завжди стягує траєкторії до моди коливань.

Як і синфазна мода, локалізована існує не на всьому діапазоні початкових відхилень маятників. Зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і мода стає більш визначеною. З’ясувалося, як і для пов’язаної моди, що локалізація проявляється при збільшенні зв’язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні як зв’язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Чималі коефіцієнти пропорційності мас разом зі значними значеннями зв’язку та відстані при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованої моди або стягують траєкторії до цього режиму.

1. *Polczyński K.* et al. Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. 2019. Vol. 233, No. 4. P. 441–453. https://doi.org/10.1177/0959651819828878
2. *Wijata A., Polczyński K., Awrejcewicz J.* Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. Mechanical Systems and Signal Processing. 2021. Vol. 150. P. 107229. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107229
3. *Polczyński K.* et al. Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. Mechanical Systems and Signal Process*ing*. 2021. Vol. 154. P. 107560. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107560
4. *Surganova Y. E., Mikhlin Y. V.* Localized and non–localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. P. 104182. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182
5. *Mikhlin Y. V., Avramov K. V.* Nonlinears Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Review of Theoretical Developments. Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63, No. 6. P. 060802. https://doi.org/10.1115/1.4003825
6. *Avramov K. V., Mikhlin Y. V*. Review of Applications of Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Applied Mechanics Reviews. 2013. Vol. 65, No. 2. 020801. https://doi.org/10.1115/1.4023533
7. Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems (Ed. G. Kerschen). Springer: Vienna. 2014. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-7091-1791-0 (Last accessed on August 15, 2023).
8. *Manevitch L. I., Smirnov V. V.* Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains. Physical Review E. 2010. Vol. 82, No. 3. https://doi.org/10.1103/physreve.82.036602
9. *Vakakis A.F., Gendelman O.V., Bergman L., McFarland D.M., Kerschen G. & Lee,* Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems i. in Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems. Solid Mechanics and its Applications. Springer, 2008. Vol. 156. P. 1–1033.
10. *Nayfeh A. H., Mook D. T.* Nonlinear oscillations. John Wiley & Sons. 1995, 720 p. https://doi.org/10.1002/9783527617586
11. *Mikhlin Y. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. Computers & Structures. 2004. Vol. 82, No. 31–32. P. 2733–2742. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.082

Отримано 25.08.2023,
в остаточному варіанті 29.09.2023