УДК 519.65:629.7.015 https://doi.org/10.15407/itm2021.04.089

Т. Г. СМІЛА, Л. Л. ПЕЧЕРИЦЯ

АДАПТАЦІЯ МАСИВІВ ГАЗОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДО АВТОМАТИЗОВАНОГО БАЛІСТИЧНОГО СУПРОВОДУ РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: office.itm@nas.gov.ua

Сучасний рівень проєктування і експлуатації космічних апаратів (КА) нового покоління передбачає максимальну автоматизацію балістичного супроводу проєктних і конструкторських розробок. Складовою частиною вирішення цієї проблеми є створення ефективного інструменту для адаптації дискретних функцій газодинамічних характеристик до вирішення різноманітних задач, які виникають при створенні і експлуатації космічних комплексів. Спрощення користування громіздкими масивами інформації разом з підвищенням точності наближення важливих коефіцієнтів значно покращить якість аеробалістичного супроводу. Метою цієї роботи є вибір оптимального методу наближення дискретної функції двох змінних аеродинамічних характеристик КА. Рекомендації щодо цього зроблено на основі аналізу переваг і недоліків основних методів апроксимації за двома критеріями згоди – максимальної похибки і середньоквадратичного відхилення. Оцінку методів здійснено на прикладі таблично заданих в залежності від кутів орієнтації КА відносно вектора швидкості набігаючого потоку аеродинамічних коефіцієнтів КА «Січ-2М» спрощеної геометрії. Виконано багатопараметричні чисельні дослідження різних способів наближення з варіюванням параметрів розглянутих типів наближення і щільності апроксимаційної сітки. Виявлено, що збільшення числа вузлів вихідного масиву не завжди покращує точність наближень. На якість апроксимації більший вплив має їх розташування. Встановлено, що серед розглянутих методів найлегше реалізувати ступінчасту інтерполяцію, перевагами якої є простота, швидкість і необмежені можливості підвищення точності, а суттєвими недоліками – відсутність аналітичного опису і залежність точності від щільності сітки. Показано, що у порівнянні з іншими математичними моделями найкращими апроксимуючими властивостями володіють сплайн-функції. Поліноміальне наближення або будь-яка апроксимація функцією загального вигляду забезпечують аналітичний опис єдиною апроксимуючою функцією, але не мають такої високої точності наближення, як сплайни. Встановлено, що не існує методу наближення, кращого за усіма критеріями одночасно: всі методи мають певні переваги, але одночасно й суттєві недоліки. Оптимальний спосіб наближення обирається в залежності від особливостей задачі, пріоритетів вимог до наближення, необхідного ступеня точності та способу організації початкових даних.

Ключові слова: *аеродинамічні коефіцієнти, методи наближення, багатовимірна апроксимація, метод вибірки, поліноми, сплайни, критерії згоди, найбільше і середньоквадратичне відхилення, наближення тригонометричними функціями.*

The current level of the design and use of new-generation spacecraft calls for a maximally automated ballistics support of engineering developments. An integral part of the solution of this problem is the development of an effective tool to adapt discrete functions of gas-dynamic characteristics to the solution of various problems that arise in the development and use of space complexes. Simplifying the use of bulky information arrays together with improving the accuracy of approximation of key coefficients will significantly improve the ballistics support quality. The aim of this work is to choose an optimum method for the approximation of a discrete function of two variable spacecraft aerodynamic characteristics. Based on the analysis of the advantages and drawbacks of basic methods of approximation by two fitting criteria: the maximum error and the root-mean-square deviation, recommendations on this choice were made. The methods were assessed by the example of the aerodynamic coefficients of the Sich-2M spacecraft's simplified geometrical model tabulated as a function of the spacecraft orientation angles relative to the incident flow velocity. Multiparameter numerical studies were conducted for different approximation methods with varying the parameters of the approximation types under consideration and the approximation grid density. It was found that increasing the number of nodes of an input array does not always improve the accuracy of approximation. The node arrangement exerts a greater effect on the approximation quality. It was established that the most easily implementable method among those considered is a step interpolation, whose advantages are simplicity, quickness, and limitless possibilities in accuracy improvement, while its significant drawbacks are the lack of an analytical description and the dependence of the accuracy on the grid density. It was shown that spline functions feature the best approximating properties in comparison with other mathematical models. A polynomial approximation or any approximation by a general form function provide an analytical description with a single approximating function, but their accuracy of approximation is not so high as that provided by splines. It was found that there exists no approximation method that would be best by all criteria taken together: each method has some advantages, but at the same time, it has significant drawbacks too. An optimum approximation method is chosen according to the features of the problem, the priorities in approximation requirements, the required degree of approximation, and the initial data organization method.

Keywords: *aerodynamic coefficients, approximation methods, multidimensional approximation, sampling method, polynomials, splines, fitting criteria, maximum and root-mean-square deviation, trigonometric function fitting.*

На космічний апарат (КА), що рухається у верхніх шарах атмосфери Землі, діють збурення різної природи – як гравітаційні, так і негравітаційні. Найбільш вагомими є негравітаційні збурення, які діють внаслідок силової взаємодії з поверхнею КА нейтральних і заряджених часток верхньої атмосфери та потоку сонячної радіації. Залежно від висоти орбіти змінюється вагомість впливу кожної з цих складових на еволюцію орбіти, кутовий рух відносно центра мас і час існування КА. Вказані сили в тій чи іншій мірі залежать від значної кількості чинників: форми апарату, параметрів орбіти, кутів орієнтації КА на орбіті, складу верхньої атмосфери Землі, параметрів взаємодії окремих компонент атмосфери або потоків сонячного випромінювання з конструкційними матеріалами зовнішніх покриттів КА і таке інше.

Завдання значно утруднюється тим, що сучасні КА, як правило, мають складну форму з розвиненими елементами конструкції (службові панелі, висувні гравітаційні штанги, панелі сонячних батарей і таке інше), які можуть рухатись під час польоту. Крім того, на окремих ділянках орбіти, а також при деяких аварійних ситуаціях апарат може знаходитися в неорієнтованому польоті відносно вектора швидкості потоку, що набігає.

Отже, визначення силових і моментних характеристик КА зводиться до аналізу тривимірного обтікання тіл зі значною кількістю розрахункових параметрів. При таких обставинах розв'язання рівнянь руху центру мас КА і навколо нього в реальному масштабі часу пов'язано зі значними труднощами. На щастя, сучасні технології дозволяють моделювати аеродинаміку польоту КА без залучення дослідного зразка, застосовуючи виключно чисельний експеримент. Але моделювання при складній формі КА може вимагати занадто великих обчислюваних ресурсів і займати значні проміжки часу. Підчас серійних випробувань з варіюванням параметрів об'єм розрахунків збільшується у багато разів. Тому іноді для скорочення часу потрібні характеристики отримують заздалегідь для низки сполучень вхідних даних (з певним кроком за параметрами). Надалі отримані результати можуть використовуватись для забезпечення багатьох важливих напрямків і етапів життєвого циклу космічних комплексів (їх проєктування, випробувань, сертифікації, експлуатації тощо). Отримані масиви характеристик формують у вигляді таблиць в залежності від багатьох параметрів (пар кутів орієнтації, чисел Маха, складу атмосфери на заданій висоті й таке інше). Тобто, розрахункові характеристики фактично є функціями багатьох змінних. Об'єм даних в таблицях може бути значно обмежено або через дефіцит ресурсів для їх отримання, або задля запобігання надмірної громіздкості та полегшення застосування. Користуватися функціональними залежностями, що представлені у формі таблиць та графіків, дуже не зручно, тому багато дослідників прагнуть найкращим чином адаптувати їх до використання. Цього вимагає і сучасний рівень проєктування і експлуатації КА нового покоління. Тому створення програмних засобів для автоматизованого аеродинамічного супроводу проєктних і конструкторських розробок космічних апаратів є своєчасним і актуальним. Оптимальний інструмент для вирішення даної проблеми здатен не тільки значно полегшити вибір даних з таблиць (на кожному кроці інтегрування рівнянь руху), але і суттєво скоротити невиправдані ресурсні витрати на етапі ескізних і проєктних розробок. Крім того, навіть незначне підвищення точності наближення аеродинамічних характеристик може дозволити помітно звузити розрахункові коридори і таким чином покращити якість аеробалістичного супроводу.

Вирішити цю задачу можна при умові існування якісного механізму отримання даних, яких бракує, для заданої дискретної функції, тобто, відповідної апроксимаційної методики. Метою роботи є вибір оптимального методу наближення аеродинамічних характеристик КА, які задані для окремих пар кутів орієнтації КА відносно вектору швидкості набігаючого потоку. Застосування різноманітних апроксимаційних методів на часі у багатьох сферах наукової та практичної діяльності [1] – [12]. Проблема може бути розв’язана безліччю способів: за допомогою різноманітних наближуючих аналітичних функцій; з використанням відповідних алгоритмів і спеціалізованих програмних пакетів, або нейронних мереж [10] тощо.

Для вибору оптимального способу наближення функції двох (багатьох) змінних, заданих у табличному вигляді, потрібен порівняльний аналіз існуючих методів наближення та відповідних чисельних алгоритмів. Його буде здійснено на прикладі двовимірного масиву таблиць значень аеродинамічних характеристик (АДХ) КА складної форми в залежності від фіксованого числа пар кутів орієнтації. Для цього розглянемо деяку функцію $z = f(x, y)$, яка для фіксованих фізичних умов залежить тільки від пари кутів (x, y) орієнтації КА щодо вектора швидкості потоку, що набігає. Нехай ця функція задана таблицею значень z_{ij} на множині пар кутів (x_i, y_j), де $i = 1...N_1$, $j = 1...N_2$, які вибрані з певним кроком $\Delta x_i, \Delta y_j$ ($0 \le x \le 360°$, $0 \le y \le 180°$). Треба знайти оптимальний спосіб отримання значення функції $f(x, y)$ у довільній точці її визначення. Фактично, необхідно вибрати методику побудови деякої функції $z = F(x, y)$, яка у вузлах (x_i, y_j) була б максимально близька до $f(x, y)$. Зауважимо, що наближення (апроксимація) може бути точковим, або дискретним (у випадку визначення на заданому проміжку дискретної множини точок) і безперервним, або інтегральним (на безперервній множині точок). На вибір апроксимаційної процедури впливають [4]:

– об’єм і якість (точність) початкових даних;
– обчислювальні затрати при побудові наближеної функції і її точність апроксимації;
– обчислювальні затрати при відтворенні шуканих значень функції;
– ступінь гладкості отриманої функції і відтворення її похідних у випадку такої потреби.

Кількість та розташування апроксимаційних вузлів може визначати оптимальний спосіб апроксимації і дуже впливають на її точність. Наприклад, поліноміальна інтерполяція дає добре наближення при умові, що степінь полінома на 1 менше числа вузлів інтерполяції. Зазвичай використовують поліноми степенів, не більших десяти, бо вони занадто громіздкі і супроводжуються небажаними коливаннями значень шуканої функції. Чим точніше усі екстремуми функції $F(x, y)$ будуть збігатися з вузлами сітки, тим краща точність апроксимації може бути досягнута і для цього потрібна менша кількість вузлів. Для задачі зі значною кількістю вузлів, або при великому їх розкиді, зазвичай будують апроксимуючу функцію без жорсткого дотримання вимоги співпадіння її значень у всіх вузлах. У цьому випадку доцільно використовувати регресію, графік якої пройде крізь «хмару» вузлових точок, забезпечуючи, наприклад, найменшу середньоквадратичну похибку наближення. Розташування вузлів залежить також від діапазонів зміни параметрів, які обов'язково повинні урахувати всі необхідні обмеження. Кількість вузлів впливає також на вибір критерія згоди з початковими даними, який у свою чергу впливає на точність апроксимації.

Об'єм обчислювальних витрат для побудови та відтворення значень функції в проміжках між вузлами апроксимації, а також властивості отриманої залежності, фактично визначаються обраним класом функції. При її виборі враховують простоту вигляду, точність апроксимації, наочність (зміна параметрів апроксимації через зміну початкових даних), можливість виявлення залежностей вигляду функції від її фізичних властивостей та особливостей [13]. Іноді метою побудови наближення є якісне відображення характеру функції [14]. Крім того, аналітичну залежність намагаються вибирати з урахуванням відомостей про фізичні особливості об'єкта. Іноді наближуючу функцію зручніше обирати, ґрунтуючись на візуальному аналізі (формальній зовнішній подібності). Але у будь-якому разі треба намагатись поєднати гарну якість наближення з простотою і зручністю користування [14]. Простіша функція з меншою кількістю параметрів не тільки заощаджує час на розрахунки, але й захищає від систематичних помилок [15]. Для обраних класів наближуючих функцій їх параметри зазвичай розраховуються шляхом мінімізації обраного критерія згоди.

Класичним варіантом критерія згоди є точний збіг у вузлових точках. Цей критерій відповідає методам інтерполяції. В цьому разі перевага простоти теорії і розрахунків поєднується з ігноруванням похибок вимірів або обчислень значень у вузлових точках.

Інший відносно хороший критерій – середньоквадратичне відхилення (СКВ). Ним, зокрема, користуються в регресійному аналізі. При цьому мінімізують суму квадратів відхилень у вузлових точках. Критерій дозволяє використовувати помилкову інформацію, частково згладжуючи шум (відхилення).

Значно ефективнішим та більш універсальним є чебишевське (рівномірне, або мінімаксне) наближення, яке ґрунтується на ідеї мінімізації максимального відхилення. Критерій має деякі беззаперечні переваги і дає змогу забезпечити задану точність, особливо при переході від експериментальних даних до аналітичних виразів на заданих відрізках. Існують й інші, рідше використовувані критерії. Треба відзначити, що застосування декількох критеріїв одночасно суттєво полегшує вибір кращого варіанту [10]. Наприклад, у [10] поряд з СКВ використовуються математичне очікування і коефіцієнт кореляції.

На цей час існує безліч можливостей побудови наближеної функції [2], [16] – [19]. В них успішно використовуються як інтерполяційні та апроксимаційні методи, так і методи регресивного аналізу. У [7] і [20] надається розлога класифікація та скорочений аналіз різноманітних методів наближення, а в [4] і [8] наведено докладну структурну схему технології ідентифікації і вибору оптимального методу апроксимації. Вибір найбільш вдалого залежить від точності обраного методу, витрат на його застосування, гладкості отриманої функції, оптимальної кількості базових вузлів і таке інше.

Кожна апроксимаційна функція для забезпечення якісного наближення має певні вимоги до кількості і розташування базових вузлів. На етапі формування початкових даних бажано забезпечити якнайкраще задоволення відповідних вимог, бо на їх базі будується апроксимаційна сітка. Для цього існують різні можливості. Простіше за все регулювати кількість вузлів щільністю рівномірної сітки, або ж використовувати сітку зі змінною щільністю. Наприклад, у [21] для зменшення похибки поліноміальної інтерполяції функції двох змінних з великими локальними градієнтами пропонують застосовувати кусочно-рівномірну сітку Шишкіна, бо вона дозволяє зменшити кроки сітки у відповідних областях.

Порівняльний аналіз чисельних алгоритмів для обробки великих масивів розрахункової інформації і їх адаптації до виконання динамічних розрахунків. В процесі вибору класу наближуючих функцій намагаються забезпечити незалежність результатів від вибору початку відліку, тобто, кінцева множина функцій з обраного класу повинна переходити сама в себе підчас заміни x на $x+k$. Такі властивості притаманні обмеженому переліку функцій, які одночасно є і найбільш вживаними: поліномам, тригонометричним і експоненціальним залежностям.

Клас всіх степеневих многочленів є найбільш універсальним і на практиці найчастіше застосовують саме цей рід апроксимації, бо поліноми легко обчислювати і легко аналітично знаходити їх похідні. Різні періодичні процеси добре описують тригонометричні функції, а експоненціальні відповідають, зокрема, процесам накопичення і розпаду. Оскільки аргументами функції, що наближується у даному випадку, є кути, крім степеневих функцій, що є універсальними апроксимаційними інструментами, непогане наближення повинні забезпечувати тригонометричні функції.

Якщо точність апроксимації обраної через ті, чи інші міркування функції не відповідає вимогам задачі, існують ефективні методи її покращення [4], [8], [12] і [22] – [24]. Переважно це збільшення степеня полінома, додавання числа членів апроксимації, подрібнення області визначення функції на ділянки з одночасним зниженням степеня поліномів. Метод розбиття на відрізки реалізується наприклад, у кусочно-поліноміальній і сплайн-інтерполяціях. Достатньо ефективним є також застосування методу найменших квадратів (МНК).

В якості апроксимаційних вузлів для визначення наближуючої функції $F(x,y)$ можна взяти табличні значення $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ з певними кроками параметрів $\Delta x'_i, \Delta y'_j$. Чисельне моделювання дозволяє отримати значення шуканих характеристик у будь-яких точках області її визначення, тому довжину кроку, що забезпечить якісне наближення, бажано визначити заздалегідь. Для більш якісної оцінки ефективності вживаного підходу, можна порівнювати значення функції, що наближується, з точними значеннями не тільки у вузлах апроксимації (в базових точках з кроками $\Delta x'_i, \Delta y'_j$), але додатково ще й в проміжках між ними (з кроками $\Delta x_i, \Delta y_j$). Для цього базовий набір даних утворюють з контрольного (початкових табличних значень) шляхом вибірки з певним кроком. Таким чином, ефективність кожного застосованого способу наближення можна визначати, одночасно порівнюючи значення наближуючої функції з початковими даними, що відповідають базовим точкам, і з контрольними даними у проміжних вузлах.

При наявності великої кількості вузлів високу точність апроксимації можна досягти при застосуванні МНК. Проте, він вимагає громіздких обчислень і найменшу нев’язку забезпечує у довільних точках. В той же час, в окремих вузлах відхилення може бути досить значним. Якіснішу оцінку ефективності методу дозволяє зробити критерій рівномірного наближення.

Ґрунтуючись на викладеному, для оцінки ефективності і якості наближення різними методами будемо використовувати одразу декілька критеріїв: максимальне абсолютне або відносне відхилення, вибрані з масиву Δ_{ij} і ε_{ij} відповідно, а також середньоквадратичну похибку s за наступними співвідношеннями:

$$\Delta_{ij} = \left| F(x_i, y_j) - z_{ij} \right| \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\left| F(x_i, y_j) - z_{ij} \right|}{\left| z_{\max} \right|} \cdot 100\% , \quad (2)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (F(x_i, y_j) - z_{ij})^2}{N_1 \cdot N_2}} , \quad (3)$$

де $z_{\max}$ – максимальне значення функції.

Мінімізація максимального абсолютного і відносного відхилень забезпечує рівномірність наближення, середньоквадратична похибка – якість наближення в цілому. Якість наближення буде оцінюватися не лише за критеріями згоди, але і за зовнішньою подібністю отриманих поверхонь.

Визначення похибки різних методів, оцінка їх переваг та недоліків. Оптимальні способи наближення повинні поєднувати забезпечення припустимих похибок обчислень і відповідність вимогам, які виникають при динамічних розрахунках, з мінімальними витратами часу на розрахунок АДХ $z = f(x, y)$ на всій можливій області визначення.

В сучасних математичних і статистичних пакетах MATLAB [25] – [27], MATHCAD [28], MAPLE [29], FORTRAN PowerStation (FPS) [30], [31] є універсальні програмні засоби (бібліотечні програми), що дозволяють використовувати методи наближеного обчислення функції, заданої у вигляді таблиці, в будь-яких точках області її визначення. З огляду на той факт, що балістичні розрахунки параметрів руху виконуються в середовищі FPS 4.0, для інтерполяції аеродинамічних характеристик в процесі розрахунків в реальному масштабі часу краще використовувати бібліотеку IMSL [30], [31]. При використанні в розрахунках попередньо отриманих докладних таблиць значень функції або коефіцієнтів апроксимуючого полінома для їх отримання можуть залучатися і інші пакети, тим більше що в них надані можливості безпосередньої графічної візуалізації та наочного аналізу отриманих результатів. Крім того, таблиці, графіки та коефіцієнти апроксимуючих поліномів можуть бути використані розробником на етапі вибору проєктних параметрів.

Порівняльний аналіз алгоритмів інтерполяції значень функцій багатьох змінних. Двовимірна (або багатовимірна) апроксимація значно складніша за одномірну, проте, взагалі тут можливо використовувати ті самі методи [32] – [34]. Ключова ідея полягає в тому, щоб провести одновимірну інтерполяцію спочатку в одному, потім в іншому напрямку.

В іншому випадку можуть виникнути труднощі. Для багатовимірної інтерполяції далеко не всі методи апроксимації адаптовані до комп'ютерної реалізації і, крім того, вони, як правило, "вмонтовані" в стандартні програми математичних і статистичних пакетів. У якості загального підходу для багатовимірної інтерполяції МНК у [9] пропонується в наближення поліномами Лагранжа з використанням довільних функцій або їх довільних комбінацій. Відзначимо, що громіздкість розрахунків для багатовимірних функцій значно обмежує степінь апроксимуючих багаточленів (не більше другої) [35], [36] і умови їх застосування [37].

Існують й інші підходи. Можна, наприклад, знижувати мірності функції завдяки заміні змінних (з переходом від поверхні до площини) [38]. У [19] пропонується застосування ітераційних методів для інтерполяції у вигляді однотипних рекурсивних процедур. Метод дозволяє використовувати для наближення будь-яку, навіть найскладнішу, функцію. Крім того, він не обмежує мірність функції, яку потрібно апроксимувати. В [4] і [8] пропонується використовувати евристичний вибір методу і параметрів апроксимуючої функції. Для визначення типу шуканої функції і оцінки складності характеру її поверхні бажано створити відповідний образ (візуалізувати її). Сучасні програмні засоби дозволяють продемонструвати двовимірні поверхні у різних проекціях, але у разі значного збільшення мірності шуканої функції формування розумових образів значно ускладнюється. Для вирішення цієї проблеми пропонується перейти до спектрального подання наближуючих функцій (по окремим параметрам) з формалізацією щільності апроксимаційної сітки [4], [8].

1 Вибір початкових даних. Розглянемо множину незбіжних точок (x_i, y_j), де $i = 1...N_1$, $j = 1...N_2$ з деякої області D. Нехай значення функції $f(x, y)$ відомі тільки в цих точках і $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. Пошук наближуючої функції полягає в знаходженні такої функції $F(x, y)$ із заданого класу функцій, для якої виконуються обрані критерії згоди (1)–(3) для будь-якого $i = 1...N_1$, $j = 1...N_2$. Окремим випадком є інтерполяція, для якої виконується більш жорстка умова $z_{ij} = F(x_i, y_j)$. Тоді $F(x, y)$ – апроксимуюча функція; точки (x_i, y_j) – вузли апроксимації, а їх сукупність – апроксимаційна сітка; трійки (z_{ij}, x_i, y_j) – базові точки апроксимації. Різниця між «сусідніми» значеннями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ – кроки апроксимаційної сітки у двох напрямках. Вони можуть бути як сталими, так і змінними.

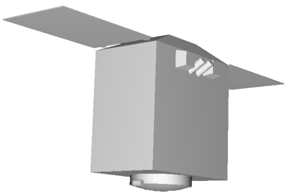

Рис. 1 – Спрощена форма космічного апарату «Січ-2М»

Для аналізу переваг і недоліків методів наближення були обрані значення коефіцієнтів лобового опору C_x, підйомної сили C_y та бокової сили C_z КА, форма якого представлена на рис. 1.

У подальших розрахунках в якості контрольних використовувалися набори даних для коефіцієнтів лобового опору C_x, підйомної сили C_y та бокової сили C_z с кроком $\Delta x = \Delta y = 1°$, тривимірна візуалізація яких зображена на рис. 2. Базові апроксимаційні сітки розрахункових параметрів отримані шляхом вибірки з контрольного набору даних із різними кроками аргументів: $\Delta x = \Delta y = 5°$, $\Delta x = \Delta y = 10°$ (рис. 2) і $\Delta x = \Delta y = 18°$. Для кожної з них можна застосувати різні методи наближення і оцінити збіг отриманих результатів за критеріями у вузлах сітки відповідного базового набору й у вузлах контрольного набору даних ($\Delta x = \Delta y = 1°$).

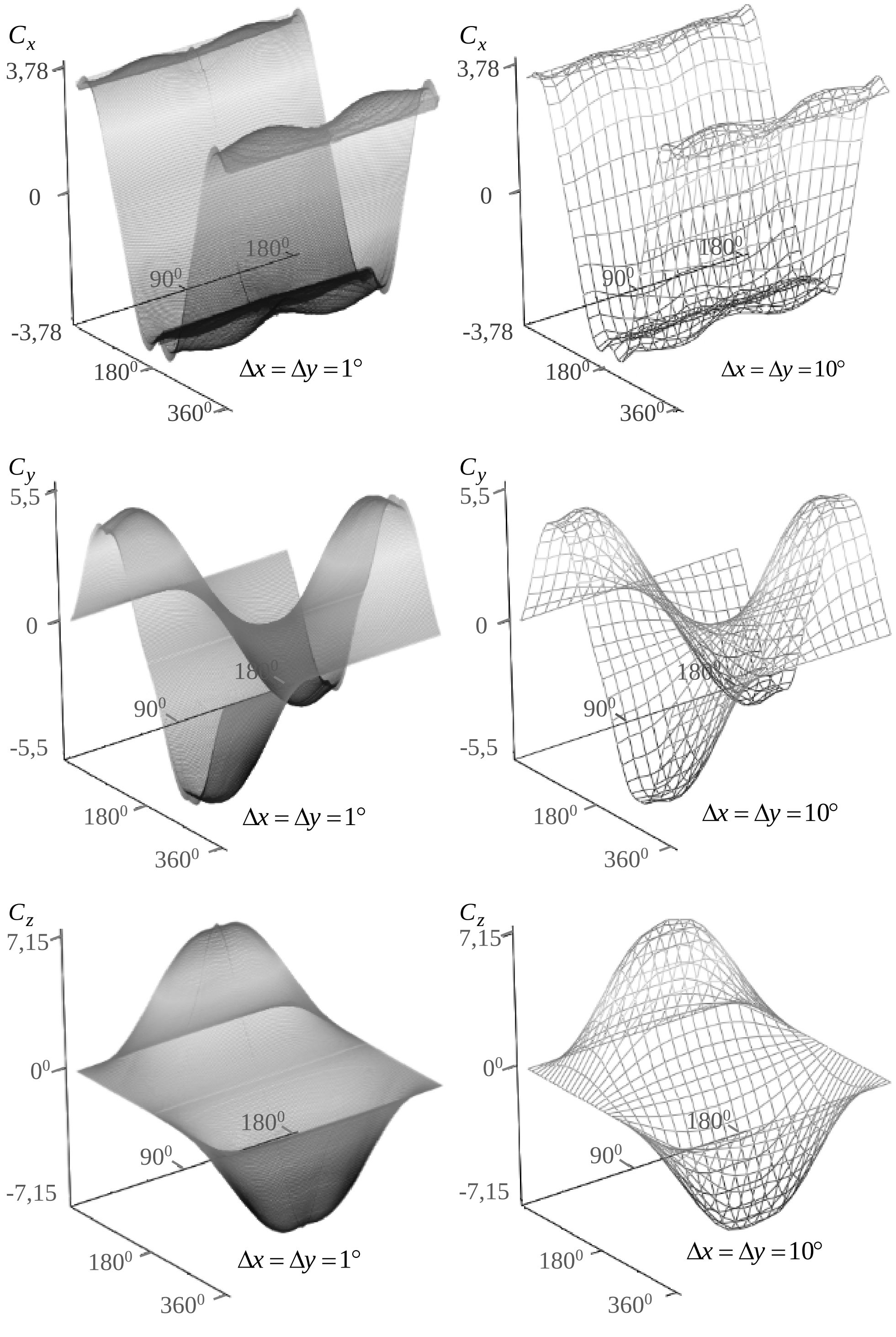

Рис. 2 – Зображення поверхонь аеродинамічних коефіцієнтів КА «Січ-2М» для різних наборів початкових даних

2 Метод вибірки (ступінчаста інтерполяція). Суть методу полягає в тому, що функція в проміжках між вузлами прирівнюється її значенням у найближчому вузлі. Таку інтерполяцію можна вважати поліноміальною 0-го степеня. Максимальна абсолютна похибка методу дорівнює максимальному стрибку функції між сусідніми вузлами апроксимаційної сітки. Перевагами даного методу є його простота, швидкість отримання результатів і пряма залежність точності наближення від кроку сітки аргументів. Але метод має й суттєві недоліки. Зокрема, отримана функція має стрибки значень у всіх базових вузлах і, крім того, досягнення необхідної точності може вимагати занадто великих масивів вхідних даних.

Якість ступінчастої інтерполяції перевірена на базових сітках для коефіцієнта підйомної сили C_y с кроками 5° і 10° (рис. 3). Максимальна відносна похибка СКВ методу для цих базових сіток становить $\varepsilon = 22{,}1\%$, $s = 0{,}367$ і $\varepsilon = 10{,}2\%$, $s = 0{,}170$ відповідно для менш і більш щільної сітки.

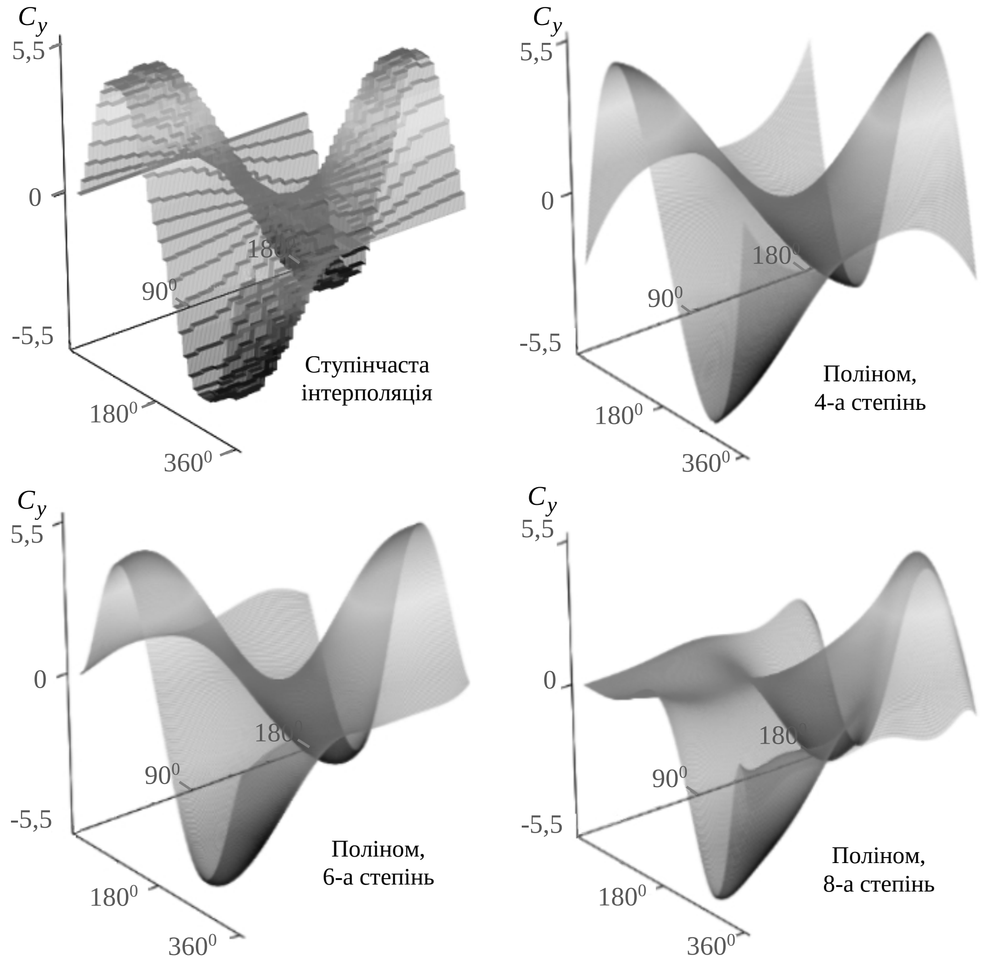

Рис. 3 – Зображення апроксимаційних поверхонь коефіцієнта C_y КА «Січ-2М» ($\Delta x = \Delta y = 10°$)

3 Поліноміальна апроксимація є одним з найпоширеніших методів апроксимації. У загальному випадку вона дає наближення поліномами степеня m:

$$P_m(x, y) = C_{m,m} \cdot x^m \cdot y^m + C_{m-1,m} \cdot x^{m-1} \cdot y^m + ... + C_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j + ... + C_{0,0}\,, \quad (4)$$

де $C_{i,j}$ – коефіцієнти полінома $P_m(x, y)$.

Визначення коефіцієнтів $C_{i,j}$ відбувається через розв'язання системи рівнянь або шляхом мінімізації за параметрами $C_{i,j}$ середньоквадратичної похибки $s_n^2 = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}(z_{ij} - P_m(x_i, y_j))^2 \Big/ N_1 \cdot N_2$, тобто методом найменших квадратів.

За допомогою бібліотечних програм середовища MATHCAD проведено розрахунки для поліномів від 1-ї до 9-ї степені включно на базових сітках з кроками за аргументами у 18º, 10º і 5º. Найпоказовіші результати для коефіцієнта C_y представлені на рис. 3. Найкращій збіг як з базовими, так і з контрольними значеннями (див. рис. 2) дало застосування поліномів 6-го степеня. Найгірший отримано при m=1 (площина). Поверхні для поліномів 2-го і 3-го степенів дуже схожі, як і поверхні для m=4 і m=5, та для m=8 і m=9.

Безперечною перевагою даного методу є можливість аналітичного опису апроксимуючої функції, що дозволяє досліджувати її поведінку в заданому діапазоні зміни аргументів. Ця обставина важлива при розробці та створенні систем управління КА. До недоліків можна віднести обмеження точності наближення заданої функції і її розбіжність з початковими даними у вузлах апроксимації.

Як і слід було очікувати, максимальне абсолютне відхилення для контрольного набору даних перевершує відхилення для базового набору. При зменшенні кроку базової сітки з 18° до 10° і потім до 5° також спостерігається незначне збільшення максимальної абсолютної похибки $\Delta_{\max}$. Для найкращого наближення, що здійснюється поліномом 6-го степеня, вона зростає з 0,811 до 0,875 у порівнянні з базовим набором значень і з 0,837 до 0,879 у порівнянні з контрольним. В той же час, як видно з таблиці, його СКВ s для двох критеріїв згоди, навпаки, зменшується з 0,174 до 0,165 і з 0,167 до 0,162 відповідно. Тобто, при подрібненні апроксимаційної сітки СКВ знижується, але при цьому зростає максимальна абсолютна похибка.

Таблиця

Похибки наближень для аеродинамічних коефіцієнтів КА «Січ-2М» в залежності від кроків базової сітки

Крок базової сітки	Критерії згоди с базовим набором даних			Критерії згоди с контрольним набором даних		
	$\Delta_{\max}$	$\varepsilon_{\max}$, %	s	$\Delta_{\max}$	$\varepsilon_{\max}$, %	s
	C_y, ступінчаста інтерполяція					
10°	1,155	22,1	0,367	1,155	22,1	0,367
5°	0,533	10,2	0,17	0,533	10,2	0,17
	C_y, найкраща поліноміальна інтерполяція (поліномом 6-го степеня)					
18°	0,811	15,52	0,174	0,837	16,02	0,167
10°	0,852	16,30	0,168	0,857	16,40	0,164
5°	0,875	16,74	0,165	0,879	16,82	0,162
	C_x, найкраща поліноміальна інтерполяція (поліномом 4-го степеня)					
18°	0,803	21,19	0,204	1,165	30,74	0,246
10°	0,921	17,62	0,213	1,138	21,78	0,242
5°	1,129	21,60	0,232	1,132	21,66	0,243
	C_z, найкраща поліноміальна інтерполяція (поліномом 5-го степеня)					
18°	1,16	15,20	0,269	1,165	15,66	0,251
10°	1,145	15,01	0,258	1,138	15,05	0,248
5°	1,354	17,75	0,254	1,132	17,75	0,249

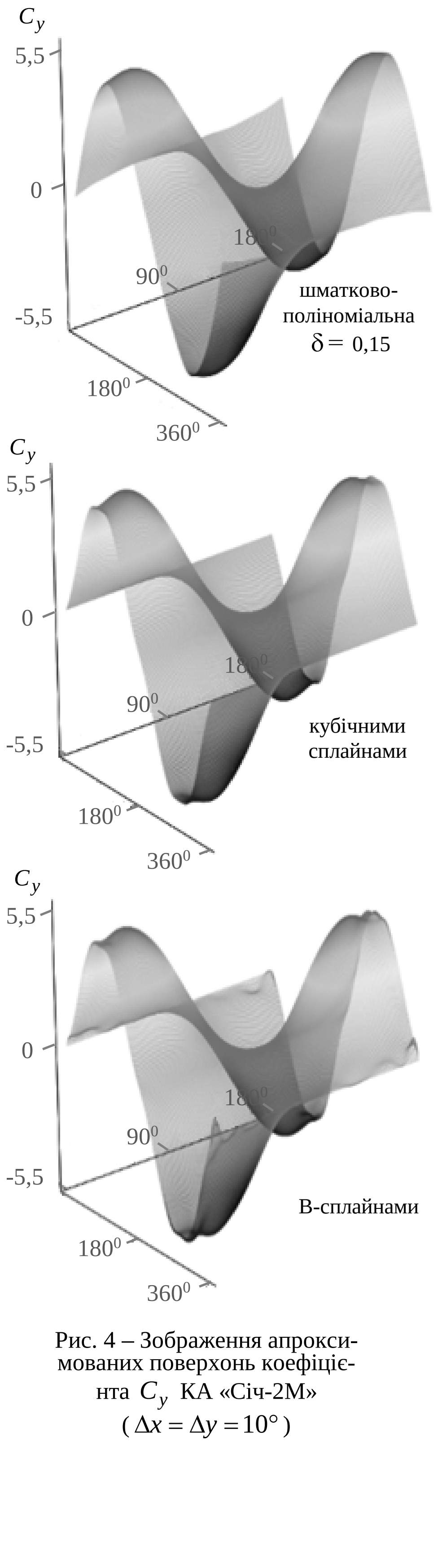

Рис. 4 – Зображення апроксимованих поверхонь коефіцієнта C_y КА «Січ-2М» ($\Delta x = \Delta y = 10°$)

Це означає, що при поліпшенні апроксимації в середньому по всіх вузлах погіршується результат в окремих вузлових точках. Тому, при виборі кроку базової сітки треба керуватися потребами і пріоритетами конкретної задачі. Майже така сама картина спостерігається і для коефіцієнтів C_x і C_z, тільки степінь поліномів кращого наближення різна.

4 Шматково-поліноміальний підхід. Крім наближення масиву даних одним поліномом, MATHCAD дозволяє наблизити безліч точок $z_{ij} = F(x_i, y_j)$ поверхнею, зшитою зі шматків поверхонь, для яких визначаються двовимірні поліноміальні залежності. Отримане наближення є безперервним і досить ефективним та точним, але зазвичай не диференціюється.

Знайдено наближення для коефіцієнта C_y шматково-поліноміальною регресією з можливістю вибору розміру проміжків δ за допомогою бібліотечної програми пакета MATHCAD (рис. 4). Розмір проміжків δ задає ступінь згладженості даних. При довжині проміжків від 1 і більше регресія практично зводиться до наближення одним поліномом і має дуже велике відхилення, а при зменшенні поступово наближується до сплайн-інтерполяції. Похибка апроксимації зменшується зі зменшенням δ і становить при найменшому з обраних δ=0,15 для кроку базової сітки 10° – $\varepsilon = 10\%$, $s = 0{,}148$, а для кроку базової сітки 5° – $\varepsilon = 9{,}4\%$, $s = 0{,}174$. Ці результати свідчать також про те, що ущільнення апроксимаційної сітки відхилення в базових точках покращує незначно, а наближення в цілому навіть погіршує.

Головним недоліком такого підходу є незручність у користуванні набором поліномів замість одного. Крім того, їх параметри сховані від користувачів в бібліотечній програмі.

5 *Сплайн-інтерполяція*. Отримана функція безперервно диференціюється і демонструє непогані результати для функцій, які не мають розривів і різких перегинів. Особливо гарні результати виходять для монотонних функцій. Проте, при невдалому виборі вузлів сплайн-інтерполяція може давати велику похибку.

Сенс сплайн-інтерполяції полягає в тому, що в проміжках між базовими точками здійснюється апроксимація у вигляді залежності (4). Коефіцієнти C_{ij} розраховуються незалежно для кожного проміжку, виходячи зі значень z_{ij} в сусідніх точках. Вибір функції коефіцієнтів сплайнів, використовуваних в даному методі, практично не впливає на якість апроксимації, за винятком хіба що ділянки поблизу кінцевих точок апроксимаційного інтервалу.

Сплайн-інтерполяція виконувалась для двох базових наборів даних коефіцієнта C_y із застосуванням бібліотечної програми пакета MATHCAD лінійними, квадратичними і кубічними функціями. Два останніх наближення показали практично ідентичні результати (для базового набору даних з кроком 10° – $\varepsilon = 6{,}7\%$, $s = 0{,}035$, а з кроком 5° – $\varepsilon = 5{,}6\%$, $s = 0{,}021$). Якість лінійних сплайнів також задовільна (зокрема, для $\Delta x = \Delta y = 10°$ – $\varepsilon = 6{,}8\%$ $s = 0{,}038$). Результат інтерполяції кубічними сплайнами представлено на рис. 4. Цей вид апроксимації дає можливість отримати дуже якісне наближення, але має такі самі недоліки, як і кусочно-поліноміальне наближення.

6 *Інтерполяція B-сплайнами*. На відміну від звичайної сплайн-інтерполяції, для елементарних B-сплайнів точки зшивання апроксимуючих поверхонь (u_i, v_j) не збігаються з вузлами (x_i, y_j). Застосовується інтерполяція B-сплайнами так само, як і звичайна сплайн-інтерполяція. Відмінність полягає тільки у визначенні допоміжної функції коефіцієнтів сплайна.

Стандартні підпрограми бібліотеки IMSL FORTRAN Power Station дозволяють вибирати степінь апроксимуючих поліномів. Для базового набору даних коефіцієнта C_y з кроком 10° найкращим є наближення поліномами 5-го степеня (рис. 4) ($\varepsilon = 6{,}5\%$, $s = 0{,}032$). Для базового набору з кроком 5° кращою є апроксимація поліномами 7-го степеня ($\varepsilon = 4{,}8\%$, $s = 0{,}017$). Отримані результати свідчать, що наближення B-сплайнами за критеріями згоди помітно перевершує апроксимацію відрізками поліномів і співставне з наближенням звичайними сплайнами.

7 *Нелінійна регресія тригонометричними функціями*. Крім поліноміальної, розглядалася також нелінійна регресія загального вигляду. Вибір наближуючої функції ґрунтувався на візуальному аналізі вигляду поверхонь, побудованих на базових точках даних вибраних АДХ. Оскільки у напрямку зміни кожного з аргументів за формою вони нагадують тригонометричні функції $\sin ax$ і $\cos ax$ (див. рис. 2), саме їх комбінацію і використовували в якості функції регресії. На рис. 5 відображені поверхні для коефіцієнтів C_x, C_y і C_z, побудовані відповідно функціям:

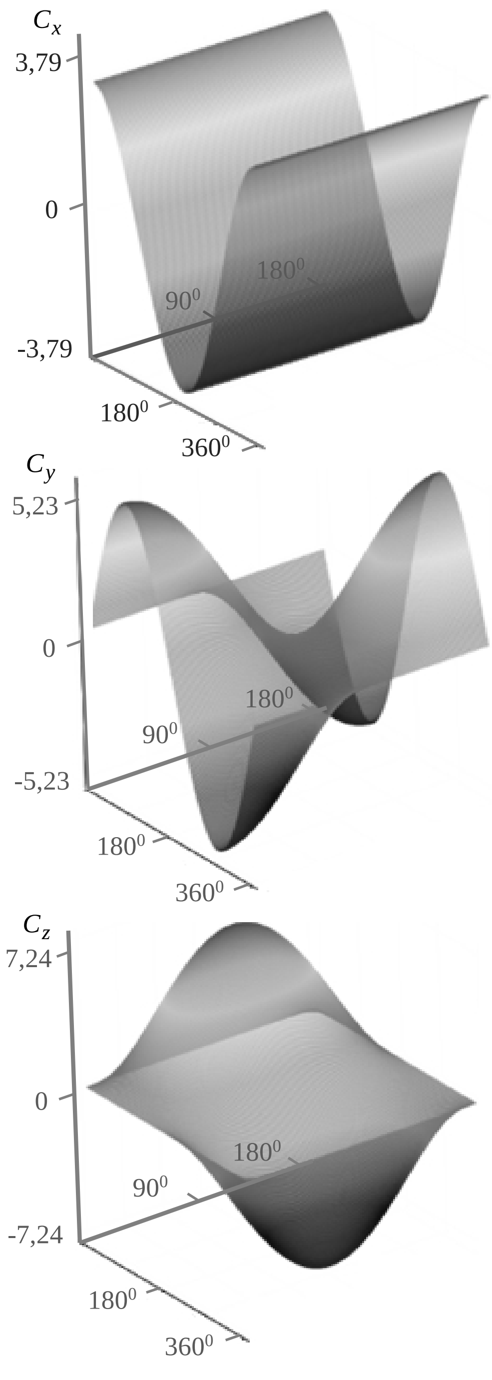

Рис. 5 – Зображення поверхонь для коефіцієнтів АДХ, апроксимованих функціями загального вигляду ($\Delta x = \Delta y = 10°$)

$$F_{C_x}(x,y) = \cos x \cdot k_y^{норм.},$$

$$F_{C_y}(x,y) = \sin x \cdot \cos y \cdot k_x^{норм.},$$

$$F_{C_z}(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot k_z^{норм.}$$

з нормуючими коефіцієнтами $k_x^{норм.}$ =3,79, $k_y^{норм.}$ =5,23, $k_z^{норм.}$ =7,24, які є максимальними значеннями для величин C_x, C_y і C_z на базовій сітці $\Delta x = \Delta y = 10°$.

Похибки при порівнянні з контрольним набором даних для будь-якої сітки розглянутих АДХ становлять: для C_x – ε =26,3%, s = 0,26, для C_y – ε =14,3%, s =0,20, для C_z – ε =25,3%, s =0,40. Ці показники співставні з наближенням відрізками поліномів і значно кращі, ніж у поліноміальної апроксимації (рис. 6).

Спроба підвищити точність наближення за рахунок розбиття області визначення функцій на шматки у місцях зламів значень функції дозволила помітно підвищити точність апроксимації: для C_x – ε =15,8%, s = 0,12, для C_y – ε =12,3%, s =0,18, для C_z – ε =7,8%, s =0,11. Але одночасно суттєво ускладнилось користування знайденою залежністю, а якість наближення все одно не набагато наблизилася до якості апроксимації сплайнами. Отже, основною перевагою цього наближення є зручність використання завдяки простоті аналітичного виразу, а також швидкість отримання результатів. Поліноміальна функція, яка має подібні переваги, програє не тільки за простотою виразу (бо найкраще наближення забезпечують поліноми достатньо високих степенів), але й за критеріями згоди.

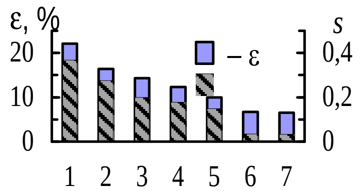

Рис. 6 – Відхилення коефіцієнту C_y у базових вузлах
(Δx = Δy =10°) для різних методів наближення
(1 – ступінчаста; 2 – поліноміальна; 3 – тригонометрична; 4 – шматково-тригонометрична; 5 – шматково-поліноміальна; 6 – кубічними сплайнами; 7 – B-сплайнами)

Висновки. Базуючись на отриманих результатах, зроблені наступні висновки:

– збільшення числа вузлів вихідного масиву не обов'язково покращує точність наближень;

– у порівнянні з іншими математичними конструкціями найкращими апроксимуючими властивостями беззаперечно володіють сплайни. Одночасно вони мають дуже суттєвий недолік – відсутність загального аналітичного виразу для всієї поверхні, що дуже ускладнює користування наближенням;

– досить перспективним для застосування в задачах динаміки і управління КА є простий і економічний метод вибірки, який дає можливість «ручного режиму» використання. Крім того, вибірка дозволяє досягти будь-якого рівня точності, що безпосередньо залежить від щільності сітки. Проте, ступінчаста апроксимація як самостійний вид наближення може застосовуватись для достатньо докладних початкових даних;

– значною перевагою поліноміальної апроксимації і наближення функцією загального вигляду є зручність їх використання завдяки можливості аналітичного опису апроксимуючої функції, а суттєвим недоліком – існування межі точності наближення.

Таким чином, в залежності від пріоритетів і цілей задачі, а також вимог до точності наближення і способу організації початкових даних серед розглянутих підходів завжди можна вибрати оптимальний метод наближення.

1. *Матусевич А. В.* Объемное моделирование геологических объектов на ЭВМ. М.: Недра, 1988. 184 с.
2. *Голубинский А.Н.* Математическая модель речевого сигнала, основанная на аппроксимации спектра набором постоянных составляющих в соответствующих полосах частот. Безопасность информационных технологий. 2009. № 2. С. 12–18.
3. *Дёмин А. В., Иванов А. И., Орлов О. И.* Методическое пособие по математической физиологии. Аппроксимация результатов измерений рядами Фурье. Часть 4. М.: Фирма «Слово». 2012. 24 с.
4. *Лапшин Э. В.* Методы аппроксимации функций многих переменных авиационных комплексов. Надежность и качество сложных систем. 2013. № 4. С. 14–20.
5. *Салеев Д. В.* Исследование возможности аппроксимации экспериментальных данных для процесса ионной имплантации бора в кремнии. Фундаментальные исследования. 2014. № 9–12. С. 2672–2676.
6. *Кашеутов А. В., Боклаг Т. А.* Информативные свойства автономных инверторов. Выбор метода аппроксимации кривой фазного тока автономного инвертора. Электромеханические преобразователи энергии: материалы VII Международной научно-технической конференции, 14-16 октября 2015 г., г. Томск. Томск: Изд-во ТПУ, 2015. С. 140–143.
7. *Цибульник С. О., Лисікова К. О.* Апроксимація функцій методом найменших квадратів. Вісник інженерної академії України. Київ, 2017. № 1. С. 106–110.
8. *Лапшин Э. В., Гришко А. К., Рыбаков И. М.* Методы аппроксимации функций многих переменных применительно к авиационным тренажерам. Надежность и качество сложных систем. 2018. № 1 (21). С. 3–9. DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-1.
9. *Мустафина Д. А., Буракова А. Е., Мустафин А. И., Александрова А. С.* Обобщенная многомерная интерполяция методом наименьших квадратов. Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. Пермь: ПНИПУ, 2018. №27. С.30-48.

10. *Испулов А. А., Сунцов Е. В., Иванов С. Л., Трущинский А. Ю.* Выбор метода аппроксимации экспериментальных данных. Известия ТулГУ. Технические науки. 2019. Вып. 3. С. 122–129.
11. *Катаева Л. И., Масленников Д. А., Михалев С. В., Киселева Н. Н.* Поиск оптимальных режимов полета тела на основе аппроксимации результатов CFD-моделирования. Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2019. № 4 (127). С. 27–35.
12. *Акантьев М. С.* Способы аппроксимации экспериментальных данных интерполяционным и экстраполяционным методами. Смоленский медицинский альманах. 2020. № 1. С. 4–8.
13. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания. М.: ИНФРА-М, 2003. 348 с.
14. *Попов В. П.* Основы теории цепей. Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 575 с.
15. *Нефедов В. И., Сигов А. С., Битюков В. К., Хахин В. И.* Метрология и радиоизмерения. М.: Высшая школа, 2006. 526 с.
16. *Грищенко Н. В., Семеріков С. О., Хараджян О. А., Чернов Э. В.* Порівняльний аналіз методів апроксимації. Кривий Ріг: КДПІ, 1998. 25 с.
17. *Некрасов О. Н., Мирмович Э. Г.* Интерполирование и аппроксимация данных полиномами степенного, экспоненциального и тригонометрического вида. Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. 2010. № 4. С. 23–32.
18. *Маркова И. А.* Обобщение методов аппроксимации наборов дискретных данных. Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2014. № 2. С. 404–409.
19. *Пахнутов И. А.* Многомерная интерполяция. Интерактивная наука. 2017. № 5(15). С. 83–87. https://doi.org/10.21661/r-130275
20. *Голубинский А. Н.* Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей. Вестник Воронежского института МВД России. 2007. № 2. С. 138–143.
21. *Задорин А. И., Задорин Н. А.* Полиномиальная интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях. Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2016. Т. 158, кн. 1. С. 40–50.
22. *Катрич С. А.* Вычислительные особенности минимизации погрешности аппроксимаций функций по чебышевским узлам интерполяции. Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. 2015. С. 67–72.
23. *Петрянин Д. Л.* Анализ методов повышения точности аппроксимации и новая уточненная модель повышения точности аппроксимации. Надежность и качество сложных систем. 2016. № 3 (15). С. 96–102.
24. *Цыбульник С. А., Коменчук И. Е.* Аппроксимация колебательных процессов в технической диагностике. International Journal “NDT Days”. Bulgarian Society for NDT. 2019. Vol. II, Is. 1. P. 48–57.
25. *Дьяконов В. П.* MATLAB 6.5 SP1/7+Simulink 5/6®. Основы применения: библиотека профессионала. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 800 с.
26. *Дьяконов В. П., Абраменкова И. В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений: специальный справочник. С. Пб. : ПИТЕР, 2002. 564 с.
27. *Дьяконов В. П.* MATLAB 6.5 SP1/7+Simulink 5/6 ® в математике и моделировании. Основы применения: библиотека профессионала. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.
28. *Поршнев С. В.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCad. М.: Горячая линия-Телеком, 2002. 252 с.
29. *Дьяконов В. П.* Maple 9,5/10 в математике, физике и образовании: библиотека. М.: СОЛОН-Пресс, 2006. 720 с.
30. *Бартеньев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL (Ч. 1). М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. 448 с.
31. *Бартеньев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL (Ч. 2). М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. 320 с.
32. *Шумихин А. Г., Кондрашов С. Н. Мельков Д. А., Зорин М. П.* Аналитический обзор научных работ по проблемам математического моделирования, идентификации и управления технологическими процессами в производстве формалина. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Химическая технология и биотехнология. 2017. № 1. С. 7–36. https://doi.org/10.15593/2224-9400/2017.1.01
33. *Терехин А. А., Даденков Д. А.* Обзор способов идентификации параметров асинхронного электропривода. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. 2017. № 22. С. 55–66.
34. *Жмако О. А., Голиков К. А., Чуприн Е. Н.* Применение метода наименьших квадратов в физико-химических методах анализа. Инновационные технологии в науке и образовании. 2015. № 3. С. 20–22.
35. *Утешев А. Ю., Тамасян Г. Ш.* К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами. Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 3. С. 76–85.
36. *Wen D. S., Wen H., Shi Y. G., Su B., Li Z. C.,* Fan *G. Z.* Use B-spline interpolation fitting baseline for low concentration 2, 6-di-tertbutyl p-cresol determination in jet fuels by differential pulse voltammetry. 2nd International Conference on New Material and Chemical Industry (NMCI2017); 18–20 November, Sanya, 2017. https://doi.org/10.1088/1757-899X/292/1/012071
37. *Крепкогорский В. Л.* О многомерных методах интерполяции. Известия высших учебных заведений. Математика. 1999. № 11.С. 41–49.
38. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Отримано 21.10.2021,
в остаточному варіанті 26.11.2021