УДК 539.312

**В. И. ПОЖУЕВ, А. В. ФАСОЛЯК**

# ДИНАМИКА УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКОЙ, ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЗКАХ

*Запорожский национальный технический университет*
*ул. Жуковского, 64, 69063, Запорожье, Украина; e-mail: antfas@ukr.net*

Работа посвящена исследованию динамического напряженно-деформированного состояния линейно-упругого изотропного однородного полупространства, содержащего цилиндрическую полость, подкрепленную тонкой упругой оболочкой, под действием осесимметричных динамических поверхностных нагрузок. Рассмотрен случай, когда ось оболочки перпендикулярна плоскости, которая ограничивает полупространство. Цель работы – изучить взаимное влияние оболочки и свободной поверхности полупространства под действием нестационарных поверхностных нагрузок. Изучено действие двух видов поверхностных осессиметричных нагрузок: одни действуют по участку внутренней поверхности оболочки, а вторые – по участку поверхности полупространства. В обоих случаях нагрузки зависят от времени как единичная функция Хевисайда. До настоящего времени динамические задачи для оболочек в упругом пространстве рассматривались лишь для случая неограниченного пространства. Также при рассмотрении динамических задач для упругого полупространства не учитывалось влияние вертикальной полости, подкрепленной оболочкой. Научной новизной работы является учет взаимного влияния оболочки и свободной поверхности упругого полупространства под действием поверхностных динамических нагружений. Для исследования динамического напряженно-деформированного состояния описанной механической системы был применен метод конечных элементов. Полученные результаты проиллюстрированы графически и проанализированы.

Роботу присвячено дослідженню динамічного напружено-деформованого стану лінійно-пружного ізотропного однорідного півпростору, який містить циліндричну порожнину, що підкріплена тонкою пружною оболонкою, під дією динамічних поверхневих вісесиметричних навантажень. Ціль роботи – вивчити взаємний вплив оболонки та вільної поверхні півпростору під дією нестаціонарних поверхневих навантажень. Розглянуто випадок, коли вісь оболонки перпендикулярна до площини, що обмежує півпростір. Вивчено дію двох типів поверхневих вісесиметричних навантажень: одне діє на ділянці внутрішньої поверхні оболонки, а друге – на ділянці поверхні півпростору. В обох випадках навантаження залежать від часу як одинична функція Хевісайда. До теперішнього часу динамічні задачі для оболонок в пружному просторі розглядалися лише у випадку необмеженого простору. Також при дослідженні динамічних задач для пружного півпростору не враховувався вплив вертикальної порожнини, підкріпленої оболонкою. Науковою новизною роботи є врахування взаємного впливу оболонки та вільної поверхні пружного півпростору під дією поверхневих динамічних навантажень. Для дослідження динамічного напружено-деформованого стану описаної механічної системи було застосовано метод скінченних елементів. Отримані результати проілюстровано графічно та проаналізовано.

Attention focuses on the study of a dynamic stressed-strained state of the linear-elastic isotropic homogeneous half-space, which contains the cylindrical cavity reinforced by a thin elastic shell, under the action of dynamic axisymmetric surface loads. The case, when the shell axis is perpendicular to the plane, which limits the half-space, is considered. The work goal is to study cross coupling the shell and a free surface of the half-space affected by non-stationary surface loads. The action of two types of axisymmetric surface loads is studied: the first load acts along the inner surface portion of the shell and the second load acts along the half-space surface portion. In both cases, loads depend on time as the unit Heaviside function. Up to now, the dynamic problems for shells in an elastic space have been considered only for an unlimited space, and in the dynamic problems for half-space the effects of a vertical cavity reinforced by the shell have been omitted. Novelty in science is the consideration of cross coupling the shell and the free surface of the elastic half-space affected by dynamic surface loads. The finite element method has been applied to the study of the stressed-strained state of the mechanical system under consideration. The results obtained are graphically illustrated and analyzed.

***Ключевые слова:*** *упругое полупространство, тонкая цилиндрическая оболочка, осесимметричная динамическая задача, метод конечных элементов.*

**Введение.** В настоящее время важной практической задачей является моделирование динамических процессов в системе оболочка – упругая среда. В частности, к таким расчетным схемам приводят задачи моделирования динамики трубопроводов, туннелей, шахт и т. д. Поэтому задача исследования динамического напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной тонкой упругой оболочкой, при динамических поверхностных нагрузках является актуальной.

На сегодня достаточно хорошо исследованы динамические процессы в цилиндрических оболочках в неограниченной упругой среде. Данным задачам в стационарной постановке посвящена монография [1]. В нестационарной постановке таким задачам посвящены работы [2 – 5], причем в работах [2, 3] для описания реакции пространства применялась приближенная модель Власова–Пастернака, а в работах [4, 5] динамика пространства описывалась точными уравнениями теории упругости. Примененные в этих работах методы можно применять для динамических задач оболочек в упругом полупространстве при условии, что нагрузка действует на внутреннюю поверхность оболочки на большом удалении от поверхности полупространства.

В работах [6, 7] рассмотрена осесимметричная задача для упругого полупространства с цилиндрическим включением при линейно-сконцентрированной поверхностной нагрузке.

Данная работа посвящена исследованию динамического напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной тонкой упругой оболочкой, под действием осесимметричных поверхностных нагрузок. Предполагается, что ось оболочки перпендикулярна границе полупространства. Рассматриваются два типа нагрузок: первые действуют на внутреннюю поверхность оболочки, а вторые – на поверхность полупространства. Подобная задача рассмотрена в работе [8], но при условии, что поверхность полупространства жестко сцеплена с абсолютно жестким полупространством. В данной работе рассматривается случай, когда поверхность полупространства является свободной.

При динамическом нагружении внутренней поверхности оболочки необходимо изучить влияние свободной поверхности полупространства, а также определить, при какой глубине приложения нагрузки можно не учитывать влияние поверхности полупространства и рассматривать задачу для оболочек в неограниченной среде.

Для нагрузки второго типа необходимо определить влияние полости, подкрепленной тонкой упругой оболочкой, на динамику упругого полупространства.

**Постановка задачи.** Рассматривается осесимметричная динамическая задача для бесконечно длинной тонкой упругой оболочки в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве, причем ось оболочки перпендикулярна плоскости, которая ограничивает полупространство. Пусть оболочка и полупространство отнесены к неподвижной цилиндрической системе координат $\{r,\ \theta,\ x\}$, но для данной осесимметричесной задачи все величины не зависят от переменной $\theta$. Пусть внутренний радиус оболочки равен $b$, а внешний – $a$. Плоскость, которая ограничивает полупространство, задается уравнением $x = 0$ (рис 1). Для значений времени $t < 0$ оболочка и полупространство находятся в состоянии покоя и свободны от напряжений. Потом в момент времени $t = 0$ в области $|x - l| \le d$, $r = b$ (на внутренней поверхности оболочки) или в области $r_1 \le r \le r_2$, $x = 0$ (на поверхности полупространства) прикладывается импульсивное, нормальное к поверхности приложения нагружение интенсивностью $F_0$, которое зависит от времени как единичная функция Хевисайда. Для сравнения результатов были рассмотрены соответствующие статические задачи. Считаем, что оболочка и полупространство жестко сцеплены.

Начальные условия считаем нулевыми, то есть все искомые величины и их первые производные по времени при $t = 0$ равны нулю.

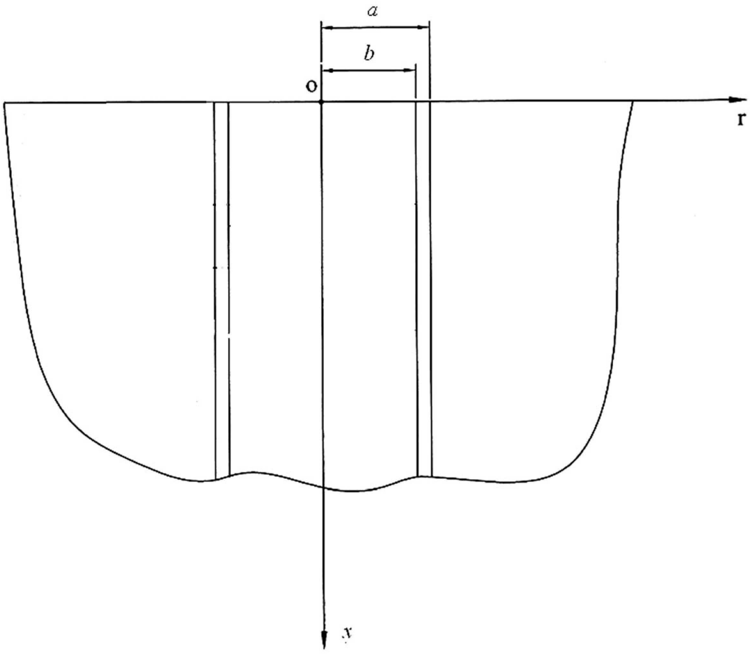



Рис. 1 – Упругое полупространство с цилиндрической полостью, подкрепленной оболочкой, в цилиндрической системе координат

Задачу будем решать в безразмерных величинах:

$$
\begin{gathered}
\left\{U_r^{(k)}, U_x^{(k)}\right\} = \frac{1}{a}\left\{u_r^{(k)}, u_x^{(k)}\right\};\\
\left\{\overline{\sigma}_{rr}^{(k)}, \overline{\sigma}_{xx}^{(k)}, \overline{\sigma}_{rx}^{(k)}, \overline{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}\right\} = \frac{1}{G_2}\left\{\sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{\theta\theta}^{(k)}\right\}; F = \frac{f}{G_2};\\
\{r_*, x_*\} = \frac{1}{a}\{r, x\}; \tau = \frac{c_s}{a}t; \delta = \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2};\\
d_1 = 1 - \delta; c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; L = \frac{l}{a}, R_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{a},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $u_r^{(k)}, u_x^{(k)}$ – радиальные и осевые перемещения точек оболочки $(k = 1)$ и полупространства $(k = 2)$; $\sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{\theta\theta}^{(k)}$ – радиальные, осевые, касательные и угловые напряжения; $G_k$, $\rho_k$ – модули сдвига и плотность; $F$ – динамическая поверхностная нормальная нагрузка.

Задачу будем решать методом конечных элементов (МКЭ). Для этого перейдем к вариационной постановке задачи.

**Вариационная постановка задачи.** Пусть $¢U^{(k)}=\left(¢U_{r_*}^{(k)},¢U_{x_*}^{(k)}\right)$ – дополнительные возможные перемещения точек тела $\Omega$. Тогда $¢£^{(k)}=\left(¢£_{r_*r_*}^{(k)},¢£_{x_*x_*}^{(k)}.¢£_{--}^{(k)},¢£_{r_*x_*}^{(k)}\right)$ – возможные безразмерные деформации, которые соответствуют перемещениям $¢U^{k}=\left(¢U_{r_*}^{(k)},¢U_{x_*}^{(k)}\right)$ и задаются соотношениями:

$$¢£_{r_*r_*}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_{r_*}^{(k)}\right)}{\partial r_*},¢£_{x_*x_*}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_{x_*}^{(k)}\right)}{\partial x_*},$$

$$¢£_{--}^{(k)}=\frac{¢U_{r_*}^{(k)}}{r_*},¢£_{r_*x_*}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_{r_*}^{(k)}\right)}{\partial x_*}+\frac{\partial\left(¢U_{x_*}^{(k)}\right)}{\partial r_*}.$$

Пусть тело находится в равновесии под действием поверхностных сил $F$ и внутренних сил $R$, причем поверхностные силы действуют на поверхности ´ (в данном случае $´=\left\{(r_*,¯,x_*)\in R^3 \,\middle|\, x_*=0\vee r_*=d_1\right\}$), которая ограничивает тело $\Omega$. Рассмотрим теперь вариационное уравнение Лагранжа [9]:

$$¢\overline{V}^{(k)}=0\,, \tag{2}$$

где $\overline{V}^{(k)}=\overline{U}^{(k)}+\Pi^{(k)}$ – полная безразмерная потенциальная энергия оболочки и окружающего ее полупространства. Преобразуем выражение (2) следующим образом:

$$¢\overline{V}^{(k)}=¢\left(\overline{U}^{(k)}+\Pi^{(k)}\right)=¢\overline{U}^{(k)}+¢\,\Pi^{(k)},$$

где

$$¢\overline{U}^{(k)}=\iint\limits_{\Omega}\left(\overline{±}_{r_*r_*}¢£_{r_*r_*}+\overline{±}_{x_*x_*}¢£_{x_*x_*}+\overline{±}_{--}¢£_{--}+\overline{±}_{r_*x_*}¢£_{r_*x_*}\right)d\,\Omega\,, \tag{3}$$

$$¢\,\Pi^{(k)}=-\iint\limits_{µ}\left(¢U^{(k)}\right)^T F\,d\,µ-\iint\limits_{\Omega}\left(¢U^{(k)}\right)^T R\,d\,\Omega_*\,. \tag{4}$$

Выражение (3) является вариацией безразмерной энергии деформации, а (4) – вариация безразмерной работы внешних сил. Тогда, согласно вариационному принципу Лагранжа [9], нужно найти такие значения перемещений $¢U^{(k)}$, для которых полная энергия системы минимальна, то есть такие перемещения, которые удовлетворяют вариационному уравнению Лагранжа (2).

**Решение задачи МКЭ.** Для решения задачи МКЭ проведем вначале дискретизацию тела. Для этого разобьем тело на рис. 1 на треугольники, причем для оболочки и полупространства используем различные элементы. Далее для решения осесимметричной задачи теории упругости будем использовать элементы, полученные вращением вышеупомянутых треугольников вокруг оси $Ox$ [10]. Потом строим матрицы функций формы для треугольников по схеме, описанной в [11]. После нахождения матрицы $[\sim]$ функций формы элемента, матрица жесткости элемента находится по формуле [10]:

$$\left[K^e\right]=\int_V[\ \ ]^T[D][\ \ ]dV=2® \int_S r_*[\ \ ]^T[D][\ \ ]dS\,, \tag{5}$$

где $V$ – тело, образованное вращением треугольника $S$ вокруг оси $Ox$; матрицы $[\ \ ]$ и $[D]$ имеют следующий вид [10]:

$$[\ \ ]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial[\sim]}{\partial r_*} \\ \dfrac{\partial[\sim]}{\partial x_*} \\ \dfrac{[\sim]}{r_*} \\ \dfrac{\partial[\sim]}{\partial x_*}+\dfrac{\partial[\sim]}{\partial r_*} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$[D]=g_k\begin{bmatrix} \dfrac{2(1-³_k)}{1-2³_k} & \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & 0 \\ \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & \dfrac{2(1-³_k)}{1-2³_k} & \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & 0 \\ \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & \dfrac{2³_k}{1-2³_k} & \dfrac{2(1-³_k)}{1-2³_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $g_k=\begin{cases} ¥\,, & k=1; \\ 1, & k=2; \end{cases}$ то есть, $g_k=¥$, если соответствующий элемент принадлежит оболочке, и $g_k=1$, если элемент принадлежит полупространству. Блок матрицы масс элемента определяется по формуле [10]:

$$\left[M^e\right]=\int_V °^*[\sim]^T[\sim]dV=2® \, °^*\int_S r_*[\sim]^T[\sim]dS\,, \tag{8}$$

где $°^*=4$, если соответствующий элемент принадлежит оболочке, и $°^*=1$, если элемент принадлежит полупространству.

Вычисление двойных интегралов в формулах (5) и (8) проводилось численно при помощи квадратур Гаусса на четырех узлах для треугольника. Вычисление эквивалентных узловых сил проводится по схеме, показанной в [11].

Для решения дифференциального матричного уравнения применялся $\bar{\ }$ -метод Вильсона [11]. Этот метод позволяет свести дифференциальное матричное уравнение к итерационной последовательности квазистатических задач.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые возникают при применении МКЭ к статическим задачам, а также в квазистатических задачах применялся метод сопряженных градиентов.

**Результаты численного анализа.** Рассмотрим два типа динамических нагрузок. Первая $F(x_*,²)=F(x_*)H(²)$ действует по нормали к внутренней поверхности оболочки на участке $x_*\in\left[L-\frac{1}{2},L+\frac{1}{2}\right]$, $r_*=d_1$. Вторая нагрузка

$F(r_*,{}^2)=F(r_*)H({}^2)$ действует по нормали к поверхности полупространства на участке $r_* \in [R_1, R_2]$, $x_* = 0$. Обе нагрузки зависят от времени как единичная функция Хевисайда. Аналогичные статические нагрузки прикладываются на тех же участках поверхности.

Расчеты были проведены для таких значений безразмерных величин:

$$© = 0,02; ¥ = 30; °^* = 4; d_1 = 1 - © = 0,98; R_1 = 1,5; R_2 = 2.$$

Величины $r_*, x_*, {}^2, L$ изменялись.

На рис. 2 изображены радиальные перемещения оболочки на границе контакта с полупространством в различные моменты времени в сравнении со статическими результатами. Глубина приложения нагрузки: $L = 5$. Учитывая, что перемещения на свободной поверхности достаточно малы, мы можем сравнить результаты, полученные МКЭ, с аналогичными результатами, полученными аналитически (при помощи техники интегральных преобразований) в работе [5]. Статическое решение отличается не более чем на 2 %, а динамическое – не более чем на 12 %. Таким образом, можно сделать вывод о надежности полученных результатов. Также наблюдается сходимость перемещений к статическому решению с увеличением значения переменной времени.

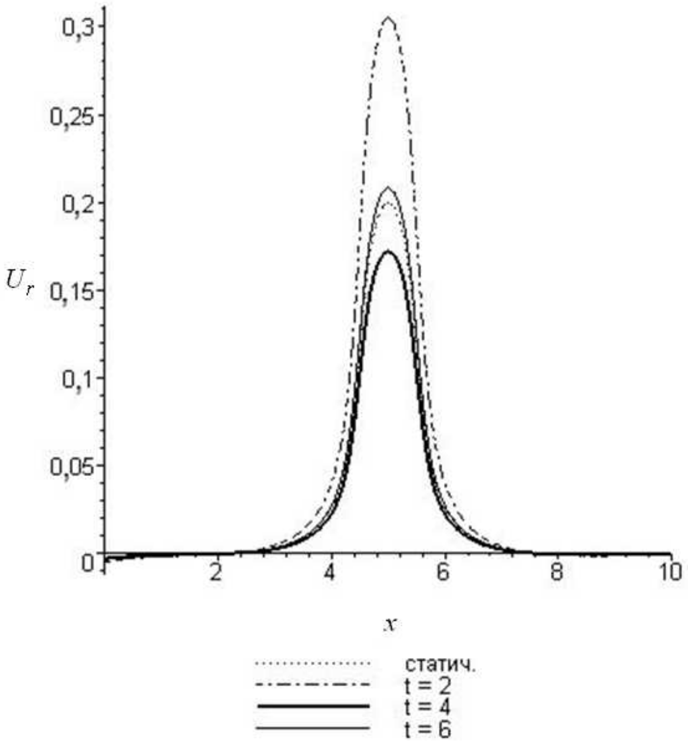
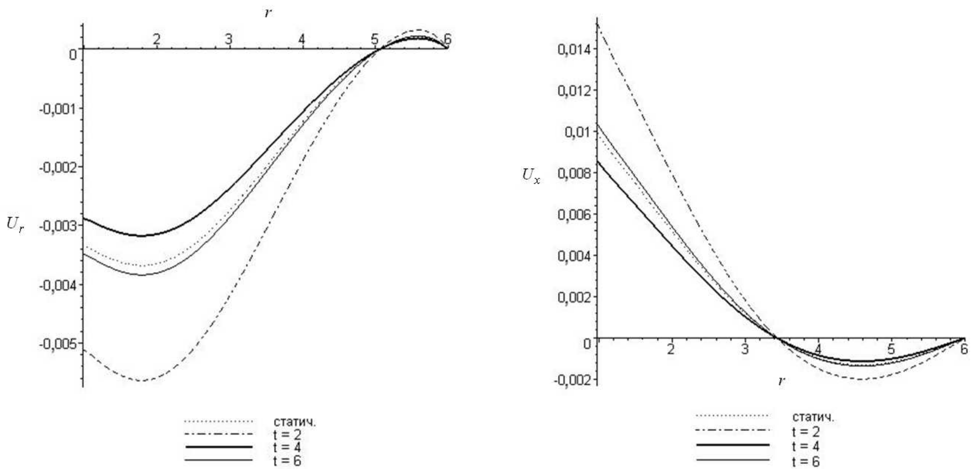



Рис. 2 – Радиальные перемещения на границе контакта оболочки и полупространства для нагрузки, приложенной на глубине 5 радиусов оболочки

На рис. 3, а) приведены радиальные перемещения, а на рис. 3, б) – осевые перемещения поверхности полупространства в различные моменты времени в сравнении со статическим решением. Учитывая, что величины перемещений сравнительно малы, при такой (и большей) глубине приложения нагрузки влиянием поверхности можно пренебречь и использовать расчетные схемы, полученные в работе [5].




а) б)

Рис. 3 – Радиальные и осевые перемещения на поверхности полупространства для нагрузки, приложенной на глубине 5 радиусов оболочки

На рис. 4 изображены радиальные перемещения оболочки на границе контакта с полупространством в различные моменты времени в сравнении со статическими результатами. Глубина приложения нагрузки: $L = 1{,}5$. На рис. 5, а), б) – графики, аналогичные рис. 3, а), б), но для глубины $L = 1{,}5$.

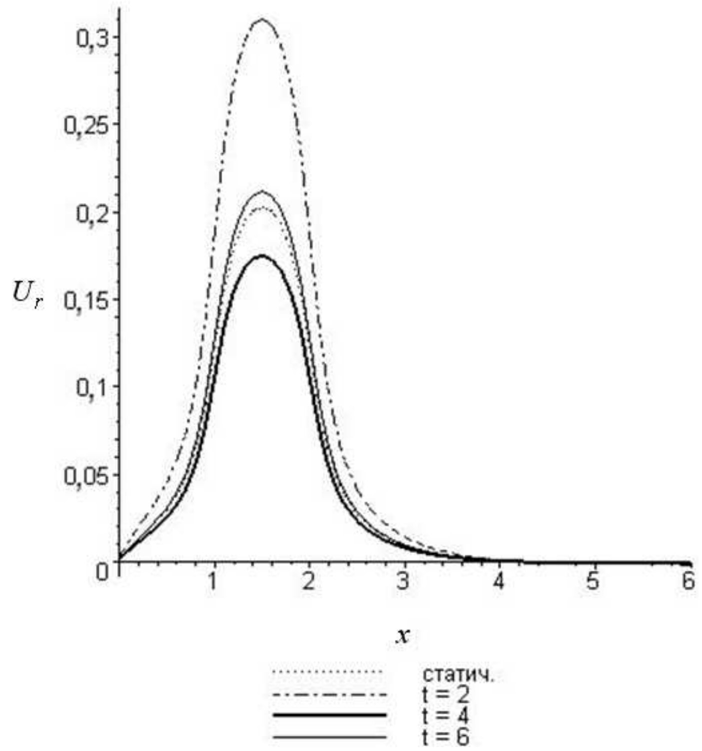
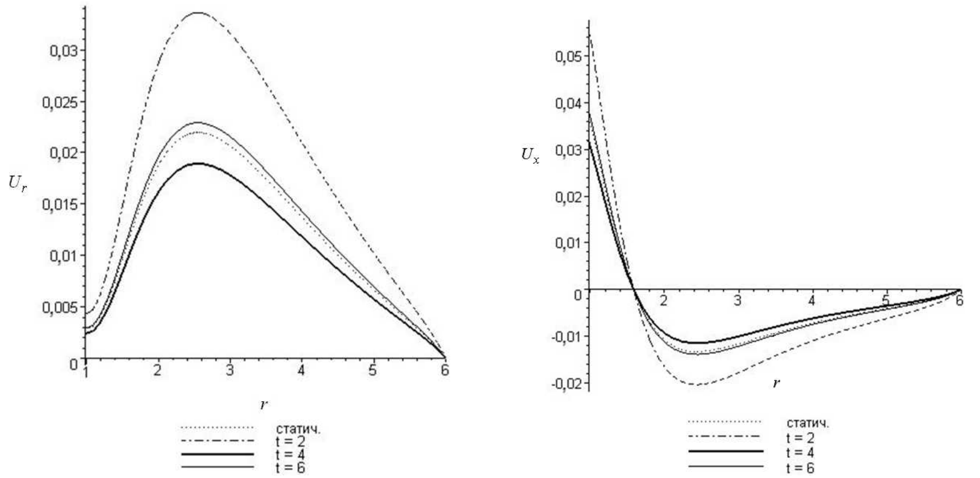


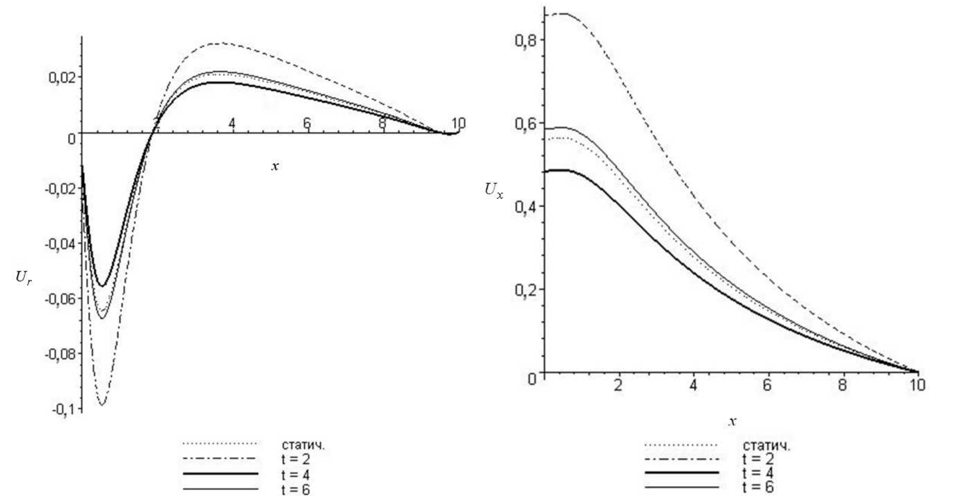

Рис. 4 – Радиальные перемещения на границе контакта оболочки и полупространства для нагрузки, приложенной на глубине 1,5 радиуса оболочки




а) б)

Рис. 5 – Радиальные и осевые перемещения на поверхности полупространства для нагрузки, приложенной на глубине 1,5 радиуса оболочки

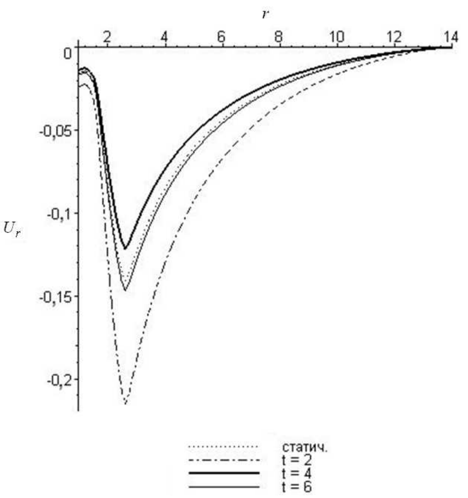
На рис. 6, а) приведены радиальные перемещения, а на рис. 6, б) – осевые перемещения границы контакта оболочки и полупространства в различные моменты времени в сравнении со статическим решением. В данном случае нагрузка действует на поверхности полупространства.



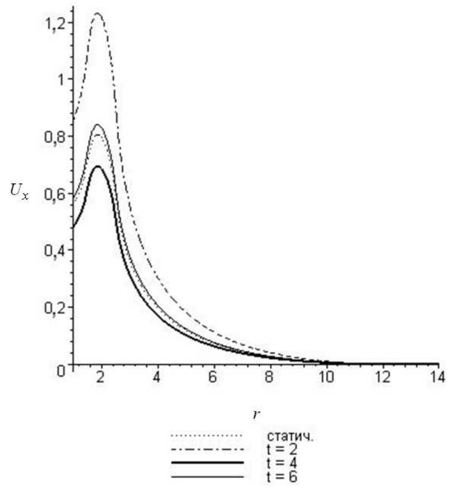

а) б)

Рис. 6 – Радиальные и осевые перемещения на границе контакта оболочки и полупространства при нагрузках, действующих на его поверхности

На рис. 7, а), б) приведены графики перемещений поверхности полупространства, аналогичные результатам на рис. 6, а), б), для нагрузки, которая действует на поверхности полупространства.



а)



б)

Рис. 7 – Радиальные и осевые перемещения поверхности полупространства при нагрузках, действующих на его поверхности

**Выводы.** Получено решение динамической задачи для упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной оболочкой, при действии поверхностных осесимметричных нагрузок. Проанализировано динамическое напряженно-деформированное состояние при помощи МКЭ. Полученные перемещения и напряжения проиллюстрированы графически. Полученные результаты могут быть применены для расчета подземных сооружений, в частности стволов шахт.


1. *Горшков А. Г., Пожуев В. И.* Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. М.: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. *Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед* Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосисимметрической подвижной нагрузки. Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. 1991. № 6. С. 33 – 37.
3. *Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед* Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой. Изв. ВУЗов. Строительство. 1992. № 4. С. 84 – 50.
4. *Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 2. С. 108 – 114.
5. *Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2016. № 1. С. 200 – 213.
6. *Johnson E. R., Parnes R.* Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a cylindrical inclusion. Part I: formulation and general integral solution. J. Mechanic and applied Mathematic. 1977. V. 30. № 3. P. 235 – 253
7. *Johnson E. R., Parnes R.* Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a cylindrical inclusion. Part II: analysis of singularities, behavior of wave fronts and numerical results. J. Mechanic and applied Mathematic. 1977. V. 30. № 3. P. 255 – 268.
8. *Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією нормальних поверхневих навантажень. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2016. № 2. С. 170 – 183.
9. *Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Ч. С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 393 с.
10. *Сегерлинд. Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 393 с.
11. *Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2016. № 1. С. 119 – 126.


Получено 06.02.2017
в окончательном варианте 16.03.2017