УДК 531.39 https://doi.org/10.15407/itm2020.01.114

В. В. КРАВЕЦ, К. М. БАСС, Вл. В. КРАВЕЦ

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНЫХ АСИММЕТРИЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Национальный технический университет "Днепровская политехника",
пр. Д.Яворницкого, 19, 49005, Днепр, Украина; e-mail: prof.w.kravets@gmail.com

Математичний апарат мономіальних (1, 0, -1) -матриць- (4х4) застосовано до розробки алгоритму перетворення матриці інерції, обчислення центру мас складових асиметричних транспортних засобів як складних механічних систем при перенесенні і повороті систем відліку в просторі. Розрахункові формули представлені в гармонійному, упорядкованому, компактному матричному вигляді, безпосередньо адаптованому до комп'ютерних технологій. Запропонований новий матричний алгоритм дозволяє оперативно вирішувати широке коло завдань динамічного проектування складових транспортних екіпажів при істотних змінах компонувальної схеми як за структурою, так і за складом. Компонувальні схеми транспортних систем представляються складними просторовими конфігураціями в формі окремих підконструкцій. Підконструкції є асиметричними твердими тілами, положення і орієнтація яких у компонувальній схемі варіюється в процесі динамічного проектування складної механічної системи, наприклад, ракети-носія. В цілому така система розглядається як складене асиметричне тверде тіло, що має складну просторову конфігурацію. Динамічні якості транспортних засобів в основному визначаються інерційними характеристиками, що включають повну масу, розташування центру мас, осьові і відцентрові моменти інерції, обчислені в конструктивно зручній базовій системі відліку. Прикладами подібного роду транспортних засобів можуть служити гібридні автомобілі, екіпажі залізничного транспорту, літальні апарати різного призначення та ін.

Завдання стійкості руху, стабілізації, керованості, динамічного навантаження вирішуються на основі коректного розрахунку інерційних характеристик транспортних засобів. Коректний розрахунок інерційних характеристик передбачає багаторазовий просторовий перенос центрів приведення підконструкцій і поворот їх осей. Цю складну і громіздку задачу вдається ефективно вирішити застосуванням нового математичного апарату мономіальних (1,0, -1) -матриць- (4х4), що зручно реалізується в комп'ютерних технологіях.

Ключові слова*: інерційні характеристики, моменти інерції, центр мас, мономіальні матриці, кватерніонні матриці, параметри Родрига–Гамільтона, транспортні засоби.*

Математический аппарат мономиальных (1, 0, -1)-матриц-(4х4) применен к разработке алгоритма преобразования матрицы инерции, вычисления центра масс составных асимметричных транспортных средств как сложных механических систем при переносе и повороте систем отсчета в пространстве. Расчетные формулы представлены в гармоничном, упорядоченном, компактном матричном виде, непосредственно адаптированном к компьютерным технологиям. Предложенный новый матричный алгоритм позволяет оперативно решать широкий круг задач динамического проектирования составных транспортных экипажей при существенных изменениях компоновочной схемы как по структуре, так и по составу. Компоновочные схемы транспортных систем представляются сложными пространственными конфигурациями в форме отдельных подконструкций. Подконструкции являются асимметричными твердыми телами, положение и ориентация которых в компоновочной схеме варьируется в процессе динамического проектирования сложной механической системы, например, ракеты-носителя. В целом такая система рассматривается как составное асимметричное твердое тело, имеющее сложную пространственную конфигурацию. Динамические качества транспортных средств в основном определяются инерционными характеристиками, включающими полную массу, расположение центра масс, осевые и центробежные моменты инерции, вычисленные в конструктивно удобной базовой системе отсчета. Примерами подобного рода транспортных средств могут служить гибридные автомобили, экипажи железнодорожного транспорта, летательные аппараты различного назначения и др.

Задачи устойчивости движения, стабилизации, управляемости, динамической нагрузки решаются на основе корректного расчета инерционных характеристик транспортных средств. Корректный расчет инерционных характеристик предполагает многократный пространственный перенос центров приведения подконструкций и поворот их осей. Эту сложную и громоздкую задачу удается эффективно разрешить применением нового математического аппарата мономиальных (1,0,-1)-матриц-(4х4), удобно реализуемого в компьютерных технологиях.

Ключевые слова*: инерционные характеристики, моменты инерции, центр масс, мономиальные матрицы, кватернионные матрицы, параметры Родрига–Гамильтона, транспортные экипажи.*

In this paper, the mathematical apparatus of monomial (1, 0. -1) 4x4 matrices is applied to the development of an algorithm of inertia matrix transformation and the calculation of the center of mass of composite asymmetric vehicles as complex mechanical systems under translations and rotations of coordinate systems in space. Formulas for calculation are presented in harmonic, ordered, and compact matrix form directly adapted to computer technologies. The proposed new matrix algorithm allows one to effectively solve a wide range of problems of dynamic design of composite vehicles under substantial changes in the layout diagram both in structure and in composition. Vehicle layout diagrams are represented as complex spatial configurations in the form of individual subconstructions, which are asymmetric rigid bodies whose position and orientation in the layout diagram are varied in the course of the dynamic design of a complex mechanical system, for example, a launch vehicle. On the whole, a system of this type is considered as a composite asymmetric rigid body of complex spatial configuration. The dynamic performance of vehicles is mainly governed by their inertia characteristics, which include the total mass, the center of mass position, and the axial moment of inertia and the product of inertia calculated in a constructively convenient reference system. Vehicles of this type may be exemplified by hybrid motor vehicles, rail vehicles, flying vehicles of different purposes, etc.

The problems of motion stability, stabilization, steerability, and dynamic load are solved on the basis of a correct calculation of vehicle inertia characteristics. A correct calculation of inertia characteristics involves repeated spatial translations of the reduction centers of subconstructions and rotations of their axes, This complicated and cumbersome problem can be solved effectively by using the new mathematical apparatus of monomial (1, 0. -1) 4x4 matrices, which is conveniently implementable in computer technologies.

Keywords: *inertia characteristics, moments of inertia, center of mass, monomial matrices, quaternion matrices, Rodrigues–Hamilton parameters, vehicles.*

Введение. Современный этап развития транспортных средств направлен на комплексное решение экологических проблем и проблем энергетической эффективности. Предлагаются нестандартные структуры транспортных средств, оригинальные компоновочные схемы и конструкции. Компоновочные схемы представляются сложными пространственными конфигурациями отдельных подконструкций (суперэлементов). Суперэлементы являются асимметричными твердыми телами, положение и ориентация которых в компоновочной схеме варьируется в процессе динамического проектирования транспортных средств [1]. В целом современное транспортное средство рассматривается как составное асимметричное твердое тело, имеющее сложную пространственную конфигурацию. Динамические качества транспортных средств в основном определяются инерционными характеристиками, включающими полную массу, расположение центра масс, осевые и центробежные моменты инерции, вычисленные в конструктивно удобной базовой системе отсчета. Примерами подобного рода транспортных средств могут служить гибридные автомобили [2], экипажи железнодорожного транспорта [3], летательные аппараты [4] и др.

Задачи устойчивости движения, стабилизации, управляемости, динамического нагружения решаются на основе корректного расчета инерционных характеристик транспортных средств [5 – 7]. Корректный расчет инерционных характеристик предполагает многократный пространственный перенос центров приведения подконструкций и поворот их осей. Эту сложную и громоздкую задачу удается эффективно разрешить применением нового математического аппарата мономиальных (1,0,-1)-матриц-(4x4), удобно реализуемого в компьютерных технологиях [8, 9].

Постановка задачи. Рассматривается асимметричное твердое тело, составленное из суперэлементов в соответствии с заданной компоновочной схемой. Положение и ориентация суперэлементов полагаются заданными в строительной системе координат $OX_1X_2X_3$, связанной с асимметричным твердым телом и выбранной с учетом технических условий. Положение i-го суперэлемента определяется координатами полюса O_i собственных осей $O_iY_1Y_2Y_3$ в строительной системе отсчета: $x_1^{O_i}x_2^{O_i}x_3^{O_i}$. Ориентация i-го суперэлемента определяется заданным конечным поворотом собственных осей $O_iY_1Y_2Y_3$ относительно строительных $OX_1X_2X_3$ в принятой здесь системе углов Эйлера–Крылова: $\alpha_i^y, \beta_i^y, \gamma_i^y$ [10]. Для каждого суперэлемента полагаются известными координаты центра масс в собственной системе отсчета: $y_1^{c_i}, y_2^{c_i}, y_3^{c_i}$, а также масса m_i. Полагается известной ориентация главных центральных осей инерции i-го суперэлемента $C_i H_1 H_2 H_3$ относительно собственных осей $O_i Y_1 Y_2 Y_3$ в системе углов Эйлера–Крылова: $\alpha_i^\eta, \beta_i^\eta, \gamma_i^\eta$, а также главные центральные моменты инерции i-го суперэлемента $I_{11}^{\eta c_i}, I_{22}^{\eta c_i}, I_{33}^{\eta c_i}$, образующие диагональную матрицу:

$$I_\eta^{c_i} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11}^{\eta c_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{22}^{\eta c_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{33}^{\eta c_i} \end{Vmatrix}.$$

Например, для гибридного автомобиля к числу суперэлементов могут быть отнесены:

– двигатель внутреннего сгорания;
– электродвигатель;
– аккумуляторные батареи

и другие суперэлементы конструкции.

Задача заключается в построении алгоритма вычисления осевых и центробежных моментов инерции, координат центра масс составного асимметричного транспортного средства в целом, в выбранной, конструктивно удобной системе отсчета (строительной системе координат $OX_1X_2X_3$).

Преобразование матрицы инерции i-го суперэлемента в главных центральных осях к собственной системе отсчета. По заданному повороту главных центральных осей инерции к собственной системе отсчета (углы Эйлера–Крылова $\alpha_i^\eta, \beta_i^\eta, \gamma_i^\eta$) находятся параметры Родрига–Гамильтона:

$$a_0^i = \cos\frac{\gamma_i^\eta}{2}\cos\frac{\beta_i^\eta}{2}\cos\frac{\alpha_i^\eta}{2} - \sin\frac{\gamma_i^\eta}{2}\sin\frac{\beta_i^\eta}{2}\sin\frac{\alpha_i^\eta}{2},$$
$$a_1^i = \cos\frac{\gamma_i^\eta}{2}\cos\frac{\beta_i^\eta}{2}\sin\frac{\alpha_i^\eta}{2} + \sin\frac{\gamma_i^\eta}{2}\sin\frac{\beta_i^\eta}{2}\cos\frac{\alpha_i^\eta}{2},$$
$$a_2^i = \cos\frac{\gamma_i^\eta}{2}\sin\frac{\beta_i^\eta}{2}\cos\frac{\alpha_i^\eta}{2} - \sin\frac{\gamma_i^\eta}{2}\cos\frac{\beta_i^\eta}{2}\sin\frac{\alpha_i^\eta}{2},$$
$$a_3^i = \sin\frac{\gamma_i^\eta}{2}\cos\frac{\beta_i^\eta}{2}\cos\frac{\alpha_i^\eta}{2} + \cos\frac{\gamma_i^\eta}{2}\sin\frac{\beta_i^\eta}{2}\sin\frac{\alpha_i^\eta}{2},$$

и формируются четыре кватернионные матрицы:

$$A_i = \begin{Vmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i & a_3^i \\ -a_1^i & a_0^i & -a_3^i & a_2^i \\ -a_2^i & a_3^i & a_0^i & -a_1^i \\ -a_3^i & -a_2^i & a_1^i & a_0^i \end{Vmatrix} \quad {}^tA_i = \begin{Vmatrix} a_0^i & -a_1^i & -a_2^i & -a_3^i \\ a_1^i & a_0^i & -a_3^i & a_2^i \\ a_2^i & a_3^i & a_0^i & -a_1^i \\ a_3^i & -a_2^i & a_1^i & a_0^i \end{Vmatrix}.$$

$${}^tA_i^t = \begin{Vmatrix} a_0^i & -a_1^i & -a_2^i & -a_3^i \\ a_1^i & a_0^i & a_3^i & -a_2^i \\ a_2^i & -a_3^i & a_0^i & a_1^i \\ a_3^i & a_2^i & -a_1^i & a_0^i \end{Vmatrix} \quad A_i^t = \begin{Vmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i & a_3^i \\ -a_1^i & a_0^i & a_3^i & -a_2^i \\ -a_2^i & -a_3^i & a_0^i & a_1^i \\ -a_3^i & a_2^i & -a_1^i & a_0^i \end{Vmatrix}$$

По заданному переносу полюса главных центральных осей инерции C_i к полюсу собственной системы отсчета O_i (координаты $y_1^{C_i}, y_2^{C_i}, y_3^{C_i}$) формируются две кватернионные матрицы:

$$Y_{C_i} = \begin{Vmatrix} 0 & y_1^{C_i} & y_2^{C_i} & y_3^{C_i} \\ -y_1^{C_i} & 0 & -y_3^{C_i} & y_2^{C_i} \\ -y_2^{C_i} & y_3^{C_i} & 0 & -y_1^{C_i} \\ -y_3^{C_i} & -y_2^{C_i} & y_1^{C_i} & 0 \end{Vmatrix}; \quad Y_{C_i}^t = \begin{Vmatrix} 0 & y_1^{C_i} & y_2^{C_i} & y_3^{C_i} \\ -y_1^{C_i} & 0 & y_3^{C_i} & -y_2^{C_i} \\ -y_2^{C_i} & -y_3^{C_i} & 0 & y_1^{C_i} \\ -y_3^{C_i} & y_2^{C_i} & -y_1^{C_i} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Представляется целесообразным введение диагональной матрицы i-го суперэлемента в виде:

$$\bar{I}_\eta^{C_i} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{11}^{\eta C_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{22}^{\eta C_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{33}^{\eta C_i} \end{Vmatrix},$$

где

$$\bar{I}_{11}^{\eta C_i} = \frac{I_{11}^{\eta C_i}}{m_i}, \quad \bar{I}_{22}^{\eta C_i} = \frac{I_{22}^{\eta C_i}}{m_i}, \quad \bar{I}_{33}^{\eta C_i} = \frac{I_{33}^{\eta C_i}}{m_i}.$$

Находится матрица i-го суперэлемента в собственной системе отсчета при повороте осей и переносе начала отсчета [8, 9]:

$$2\bar{I}_{y_i} = 2\left[A_i \cdot {}^tA_i\right] \bar{I}_\eta^{C_i} \left[A_i^t \cdot {}^tA_i^t\right] + Y_{C_i} \cdot Y_{C_i}^t - Y_{C_i} \cdot Y_{C_i}.$$

Преобразование матрицы инерции i-го суперэлемента в собственной системе отсчета к строительной системе координат транспортного средства. По заданному повороту собственной системы осей i-го суперэлемента к строительной системе координат транспортного средства (углы Эйлера–Крылова: $\alpha_i^y, \beta_i^y, \gamma_i^y$) находятся параметры Родрига–Гамильтона:

$$b_0^i = \cos\frac{\gamma_i^y}{2}\cos\frac{\beta_i^y}{2}\cos\frac{\alpha_i^y}{2} - \sin\frac{\gamma_i^y}{2}\sin\frac{\beta_i^y}{2}\sin\frac{\alpha_i^y}{2},$$

$$b_1^i = \cos\frac{\gamma_i^y}{2}\cos\frac{\beta_i^y}{2}\sin\frac{\alpha_i^y}{2} + \sin\frac{\gamma_i^y}{2}\sin\frac{\beta_i^y}{2}\cos\frac{\alpha_i^y}{2},$$

$$b_2^i = -\sin\frac{\gamma_i^y}{2}\cos\frac{\beta_i^y}{2}\sin\frac{\alpha_i^y}{2} + \cos\frac{\gamma_i^y}{2}\sin\frac{\beta_i^y}{2}\cos\frac{\alpha_i^y}{2},$$

$$b_3^i = \sin\frac{\gamma_i^y}{2}\cos\frac{\beta_i^y}{2}\cos\frac{\alpha_i^y}{2} + \cos\frac{\gamma_i^y}{2}\sin\frac{\beta_i^y}{2}\sin\frac{\alpha_i^y}{2},$$

и формируются четыре кватернионные матрицы установленной структуры:

$$B_i\ ,\ {}^tB_i\ ,\ {}^tB_i^t\ ,\ B_i^t\,.$$

По заданному переносу полюса O_i собственной системы отсчета i -го суперэлемента к полюсу O строительной системы координат транспортного средства (координаты $x_1^{O_i}$, $x_2^{O_i}$, $x_3^{O_i}$) формируются две кватернионные матрицы установленной структуры $X_{O_i}, X_{O_i}^t$.

Находится матрица инерции i -го суперэлемента в строительной системе координат транспортного средства при повороте и переносе собственной системы отсчета [8, 9]

$$2\bar{I}_{xi} = 2\left[B_i\cdot{}^tB_i\right]\bar{I}_{yi}\left[B_i^t\cdot{}^tB_i^t\right] + \left[B_i\cdot Y_{Ci}\cdot{}^tB_i^t\right]\left(X_{Oi}^t - X_{Oi}\right) +$$
$$+ X_{Oi}\left\{\left(X_{Oi}^t - X_{Oi}\right) + \left[{}^tB_i\cdot Y_{Ci}^t\cdot B_i^t\right] - \left[B_i\cdot Y_{Ci}\cdot{}^tB_i^t\right]\right\}.$$

Инерционные характеристики составного транспортного средства. Масса транспортного средства находится по тривиальной формуле:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i\,.$$

Результирующая матрица инерции составного транспортного средства в строительной системе координат находится как средняя взвешенная по массе величина:

$$\bar{I}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\ \bar{I}_{x\,i}}{M}\,.$$

Откуда следует:

$$I_x = M\ \bar{I}_x\,.$$

Кватернионная матрица, составленная по координатам центра масс транспортного средства в строительной системе отсчета, находится как средняя взвешанная по массе величина:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \; X_{C_i}}{M},$$

где приведение координат центра масс i -го суперэлемента к строительным осям осуществляется по матричной формуле [8, 9]:

$$X_{C_i} = X_{O_i} + B_i \cdot Y_{C_i} \cdot {}^t B_i^t .$$

Элементы верификации матричного алгоритма расчета. С целью верификации предлагаемых формул целесообразно использовать свойства кватернионных матриц [8, 9]:

$$A_i \cdot {}^t A_i^t = E_o; \quad {}^t A_i \cdot A_i^t = E_o;$$

$$B_i \cdot {}^t B_i^t = E_o; \quad {}^t B_i \cdot B_i^t = E_o;$$

$$Y_{C_i} \cdot Y_{C_i} = -\left[(y_1^{C_i})^2 + (y_2^{C_i})^2 + (y_3^{C_i})^2\right] \cdot E_o = Y_{C_i}^t \cdot Y_{C_i}^t;$$
$$X_{O_i} \cdot X_{O_i} = -\left[(x_1^{Oi})^2 + (x_2^{Oi})^2 + (x_3^{Oi})^2\right] \cdot E_o = X_{O_i}^t \cdot X_{O_i}^t;$$

где E_o – единичная матрица – (4х4).

Выводы. Предлагается новый алгоритм расчета инерционных характеристик составных асимметричных транспортных средств, основанный на применении математического аппарата мономиальных (1, 0, -1)-матриц-(4Х4). Расчетные формулы представляются в гармоничном, упорядоченном, компактном матричном виде, непосредственно адаптированном к компьютерным технологиям. Алгоритм позволяет решать широкий круг задач динамического проектирования составных транспортных средств при существенных изменениях компоновочной схемы как по структуре, так и по составу.

1 *Kravets V. V., Bass K. M., Kravets T. V., Tokar L. A.* Dynamic design of ground transport with the help of computational experiment. MMSE Journal. 1. October 2015. P.p. 105–111. ISSN 2412-5954. Open access www.mmse.xyz. DOI 10.13140/RG.2.1.2466.6643.

2 *Кравец В. В., Басс К. М., Кравец Т. В., Харченко А. В.* Определение матрицы инерции гибридного автомобиля на основе кватернионных матриц. Системні технології. 2012. 3 (80). С. 61–66.

3 *Kharchenko A. V., Kravets T. V.* Usage of quaternionic matrices to define inertia moments of wheel set taking into account manufacturing and assembly errors. 20-th International conference "Current Problems in Rail Vehicles", Zilina, September 21–23, 2011, Slovakia, Proceedings Nol. II. P. 109–114.

4 *Алпатов А. П.* Динамика космических летательных аппаратов. К.: Наук. Думка, 2016. 488 с.

5 *Kravets V. V.* Evaluating the Dynamic Load jn a High-Speed Railroad Car. Int. Appl. Mech. 2005. 41, № 3. P. 324–329. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0091-7

6 *Kravets V. V., Kravets T. V.* On the Nonlinear Dynamics of Elastically Interacting Asymmetric Rigid Bodies. Int. Appl. Mech. 2006. 42, №1. P. 110–114. https://doi.org/10.1007/s10778-006-0065-4

7 *Kravets V. V., Kravets T. V.* Evaluation of the Centrifugal. Coriolis, and Gyroscopic Forces on a Railroad Vehicle Moving at High Speed. Int. Appl. Mech. 2008. 44, № 1. P. 101–109. https://doi.org/10.1007/s10778-008-0024-3

8 *Kravets V., Kravets T., Burov O.* Monomial (1, 0, -1)-matrices-(4x4). Application to the transfer in space. Lap Lambert Academic Publishing, 2016. 137 p. ISBN: 978-3-330-01784-9.

9 *Kravets V., Kravets T., Burov O.* Monomial (1, 0, -1)-matrices-(4x4). Part 2. Application to the rotation in space. Lap Lambert Academic Publishing, 2017. 82 p. ISBN: 978-3-330-34185-2.

10 *Kravets V., Kravets T., Burov O.* Applying Calculation of quaternionic matrices for formation of the tables of directional cosines. MMSE Journal. Vol. 11, 2017. P. 248–259. DOI 10.2412/mmse.78.59.591 provided by Seo40.link.

Получено 13.11.2019,
в окончательном варианте 07.02.2020