УДК 539.312

В. І. ПОЖУЄВ, А. В. ФАСОЛЯК

ДИНАМІКА КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ ІНЕРЦІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Запорізький національний технічний університет
вул. Жуковського, 64, 69063, Запоріжжя, Україна; e-mail: antfas@ukr.net

Роботу присвячено дослідженню динамічного напружено-деформованого стану лінійно-пружного інерційного однорідного середовища із двома коаксіальними порожнинами, що підкріплені тонкими циліндричними оболонками, під дією динамічних поверхневих навантажень. В роботі розглянуто два випадки: дві коаксіальні оболонки розташовані в необмеженому середовищі; дві коаксіальні оболонки розташовані в середовищі із вільною поверхнею, причому оболонки розташовані на одній глибині. Ціль роботи – вивчити залежність величини взаємного впливу оболонок у першому випадку; у другому випадку – дослідити взаємний вплив коаксіально-розташованих оболонок та вільної поверхні. В обох випадках припускається, що динамічне навантаження діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок та залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Задача розв'язана методом скінченних елементів. В першому випадку науковою новизною роботи є врахування взаємного впливу двох коаксіальних оболонок. У другому випадку науковою новизною є врахування впливу вільної поверхні на динамічний напружено-деформований стан розглянутої механічної системи. Отримані результати проілюстровано графічно та проаналізовано.

Работа посвящена исследованию динамического напряженно-деформированного состояния линейно-упругой инерциальной однородной среды с двумя коаксиальными цилиндрическими полостями, которые подкреплены тонкими оболочками, под действием динамических поверхностных нагрузок. В работе рассмотрены два случая: две коаксиальные оболочки расположены в неограниченной среде; две коаксиальные оболочки расположены в среде со свободной поверхностью, причем обе оболочки расположены на одной глубине. Цель работы – изучить зависимость величины взаимного влияния оболочек в первом случае; во втором случае – исследовать взаимное влияние коаксиально-расположенных оболочек и свободной поверхности. В обоих случаях предполагается, что динамическое нагружение действует на внутреннюю поверхность одной из оболочек и зависит от времени как единичная функция Хевисайда. Задача решена методом конечных элементов. В первом случае научной новизною является учет взаимного влияния двух коаксиальных оболочек. Во втором случае научной новизной является учет влияния свободной поверхности на динамическое напряженно-деформированное состояние рассмотренной механической системы. Полученные результаты проиллюстрированы графически и проанализированы.

This paper is concerned with the study of the dynamic stress and strain field in a linearly elastic inertial homogeneous medium with two coaxial cavities reinforced with thin elastic shells under the action of dynamic surface loads. Two cases are considered: two coaxial shells in an infinite medium; two coaxial shells in a medium with a free surface, both shells lying at the same depth. The aim of this paper is to study the mutual effect of the shells in the first case and the mutual effect of the shells and the free surface in the second case. In both cases, it is assumed that the dynamic load acts on the inner surface of one of the shells and depends on time as the unit step function. The problem is solved by the finite-element method. In the first case, the scientific novelty lies in accounting for the mutual effect of two coaxial shells. In the second case, the scientific novelty lies in accounting for the effect of the free surface on the dynamic stresses and strains in the mechanical system under consideration. The results of this study are illustrated by graphs and analyzed.

Ключові слова: *пружне середовище, тонка циліндрична оболонка, коаксіальні оболонки, вільна поверхня середовища, метод скінченних елементів.*

Вступ. На сьогодні важливою практичною задачею є моделювання динамічних процесів у системі середовище – дві коаксіальні оболонки. До такої розрахункової схеми приводять задачі моделювання трубопроводів, тунелів метрополітену та ін. Тому дослідження динамічного напружено-деформованого стану (НДС) розглянутої механічної системи є актуальною задачею.

До цього часу досить добре досліджені динамічні задачі для однієї циліндричної оболонки, що розташована у необмеженому середовищі. Даним задачам у стаціонарній постановці присвячена монографія [1]. У нестаціонарній постановці подібні задачі розглядаються в роботах [2, 3], причому в роботі [2] розглядається невісесиметричний випадок, а в роботі [3] – вісесиметричний.

В роботах [4, 5] розглянуто взаємний вплив оболонки та поверхні середовища при динамічних навантаженнях. Причому в роботі [4] динамічне навантаження діє на ділянку внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища вільна від навантажень. В роботі [5] динамічне навантаження діє на ділянці поверхні середовища, а внутрішня поверхня оболонки вільна від навантажень. В обох роботах задача розв'язана методом скінченних елементів (МСЕ).

В даній роботі розглядаються дві коаксіальні оболонки у пружному середовищі. Розглядається два випадки: середовище, що оточує оболонки є необмеженим; середовище має вільну поверхню, площина якої паралельна осям оболонок. В другому випадку припускається, що оболонки розташовані на однаковій глибині від вільної поверхні. В обох випадках припускається, що динамічне навантаження прикладене до внутрішньої поверхні однієї оболонки та рівномірно по нормалі до цієї поверхні. Інша оболонка вільна від поверхневих навантажень.

В першому випадку необхідно вивчити вплив відстані між оболонками на динамічний НДС системи коаксіальні оболонки – необмежене середовище, та встановити, починаючи з якої відстані між оболонками без суттєвої втрати точності можна розглядати динамічну задачу для однієї оболонки у необмеженому середовищі.

В другому випадку потрібно дослідити взаємний вплив коаксіальних оболонок та вільної поверхні середовища.

Постановка задачі. Розглядається нестаціонарна деформація нескінченно довгих коаксіальних циліндричних оболонок, які знаходяться у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному середовищі. Розглядаються два випадки: необмежене середовище, та середовище, що має вільну поверхню, площина якої паралельна осям оболонки. В другому випадку припускаємо, що оболонки знаходяться на однаковій глибині. На внутрішню поверхню однієї з оболонок діє нормальне динамічне навантаження, що рівномірно розподілене по внутрішній поверхні цієї оболонки та залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Внутрішня поверхня іншої оболонки вільна від навантажень. В другому випадку поверхня середовища також вільна від навантажень. Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$; q – відстань по осі Ox від початку декартової системи координат до центрів окружностей, які описують оболонки. Тобто координати центрів цих окружностей мають вигляд (-q; 0) и (q; 0). Внутрішня поверхня першої оболонки задається рівнянням $(x+q)^2 + y^2 = b^2$, а другої – $(x-q)^2 + y^2 = b^2$. Аналогічно поверхні контакту між середовищем та оболонками – $(x+q)^2 + y^2 = a^2$ та $(x-q)^2 + y^2 = a^2$ (a – радіус окружності, яка описує межу контакту оболонки з навколишнім її середовищем; b – радіус окружності, яка описує внутрішню поверхню оболонки; $h = a - b$ – товщина оболонок). Контакт між оболонкою та середовищем вважаємо жорстким. У другому випадку, площина, що обмежує середовище, задається рівнянням $y = L(L > a)$. В момент часу $t < 0$ оболонки та середовища знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім в момент часу $t = 0$

прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок.

Слід зазначити, що в даній роботі приймається, що навантаження, яке діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, рівномірно розподілене по її довжині, тобто не залежить від змінної z, тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при $t=0$ дорівнюють нулю.

Задачу будемо розв'язувати у безрозмірних величинах:

$$\left\{U_x^{(k)},U_y^{(k)}\right\}=\frac{1}{a}\left\{u_x^{(k)},u_y^{(k)}\right\};\ \left\{\overline{\pm}_{xx}^{(k)},\overline{\pm}_{yy}^{(k)},\overline{\pm}_{xy}^{(k)}\right\}=\frac{1}{G_2}\left\{\pm_{xx}^{(k)},\pm_{yy}^{(k)},\pm_{xy}^{(k)}\right\};\ F=\frac{f}{G_2};$$

$$\{x_*,y_*\}=\frac{1}{a}\{x,y\};\ q_*=\frac{q}{a};\ ²=\frac{c_s}{a}t;\ ©=\frac{h}{a};\ ¥=\frac{G_1}{G_2};\ °^*=\frac{°_1}{°_2};\ d_1=1-©; \qquad (1)$$

$$c_s=\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{°_2}};\ L_*=\frac{L}{a},$$

де $u_x^{(k)},u_y^{(k)}$ – відповідні компоненти вектора переміщень точок оболонок $(k=1)$ и середовища $(k=2)$; $\pm_{xx}^{(k)},\pm_{yy}^{(k)},\pm_{xy}^{(k)}$ – відповідні компоненти навантажень; $G_k, °_k$ – модулі зсуву та густина; F – динамічне поверхневе нормальне навантаження.

Задачу будемо розв'язувати МСЕ. Для цього перейдемо до варіаційної постановки задачі.

Варіаційна постановка задачі. Перейдемо тепер до варіаційної постановки задачі. Нехай $¢U^{(k)}=\left(¢U_x^{(k)},¢U_y^{(k)}\right)$ – додаткові можливі безрозмірні переміщення точок тіла Ω. Тоді $¢£^{(k)}=\left(¢£_{xx_*}^{(k)},¢£_{yy}^{(k)},¢£_{xy}^{(k)}\right)$ – можливі безрозмірні деформації, які відповідають можливим переміщенням $¢U^k=\left(¢U_x^{(k)},¢U_y^{(k)}\right)$ та задаються такими співвідношеннями:

$$¢£_{xx}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_x^{(k)}\right)}{\partial x_*},¢£_{yy}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_y^{(k)}\right)}{\partial y_*},$$

$$¢£_{xy}^{(k)}=\frac{\partial\left(¢U_x^{(k)}\right)}{\partial y_*}+\frac{\partial\left(¢U_y^{(k)}\right)}{\partial x_*}.$$

Нехай тіло знаходиться у рівновазі під дією поверхневих сил F та внутрішніх сил R. Причому поверхневі сили діють на поверхні ´ (в першому випадку

$$´=\left\{(x_*,y_*)\in R^2\,\middle|\,(x_*-q_*)^2+y_*^2=d_1^2\right\}\cup\left\{(x_*,y_*)\in R^2\,\middle|\,(x_*+q_*)^2+y_*^2=d_1^2\right\},$$

а в другому –

$$´=\left\{(x_*,y_*)\in R^2\,\middle|\,(x_*-q_*)^2+y_*^2=d_1^2\right\}\cup$$

$\cup\left\{(x_*,y_*)\in R^2\,\middle|\,(x_*+q_*)^2+y_*^2=d_1^2\right\}\cup\left\{(x_*,y_*)\in R^2\mid y_*=L_*\right\}\Big)$, що обмежує тіло

Ω, а внутрішні – всередині області Ω. Розглянемо тепер варіаційне рівняння Лагранжа [12]:

$$\delta\overline{V}^{(k)} = 0\,, \tag{2}$$

де $\overline{V}^{(k)} = \overline{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}$ – повна безрозмірна потенціальна енергія оболонки та півпростору, що оточує оболонку. Перетворимо вираз (2) таким чином:

$$\delta\overline{V}^{(k)} = \delta\left(\overline{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}\right) = \delta\overline{U}^{(k)} + \delta\,\Pi^{(k)},$$

де

$$\delta\overline{U}^{(k)} = \iint\limits_{\Omega}\left(\overline{\sigma}_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \overline{\sigma}_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \overline{\sigma}_{xy}\delta\varepsilon_{xy}\right)d\,\Omega\,, \tag{3}$$

$$\delta\,\Pi^{(k)} = -\iint\limits_{\Gamma}\left(\delta\,U^{(k)}\right)^{T} F\,d\,\Gamma - \iint\limits_{\Omega}\left(\delta\,U^{(k)}\right)^{T} R\,d\,\Omega\,. \tag{4}$$

Вираз (3) є варіацією безрозмірної енергії деформації, а (4) – варіацією безрозмірної роботи зовнішніх сил. Тоді, згідно з варіаційним принципом Лагранжа [6], потрібно знайти такі значення переміщень $\delta\,U^{(k)}$, для яких повна енергія системи мінімальна, тобто такі переміщення, які задовольняють варіаційному рівнянню Лагранжа (2).

Розв'язок задачі МСЕ. Для розв'язку задачі МСЕ спочатку проведемо дискретизацію тіла. Для цього розіб'ємо це тіло на трикутники. Спочатку розділяємо початкове тіло на два по осі $O\,y_*$. В результаті отримуємо два тіла, які дзеркально розташовані відносно осі $O\,y_*$. Далі проводимо триангуляцію однієї з отриманих частин. При розбитті на трикутники для середовища та оболонки використовуються різні елементи. Також розбиття середовища на трикутники проводиться таким чином, що при наближенні до межі контакту з оболонкою відбувається згущення сітки. На основі результатів, отриманих в [7], будемо припускати, що на відстані понад 25 радіусів від межі контакту оболонки із середовищем переміщення останнього дорівнюють нулю. Тому при дискретизації залишаємо лише ті елементи, які знаходяться від центра оболонки на відстані не більше 26 радіусів. Потім для отримання розбиття всього тіла на трикутники дзеркально відображуємо вже отримане розбиття із врахуванням глобальної нумерації вузлів та елементів.

Потім, на основі отриманої дискретизації тіла, будуємо безрозмірні матриці жорсткості та мас, та вектор еквівалентних вузлових навантажень за співвідношеннями, описаними в роботі [4]. Диференціальне матричне рівняння, яке моделює динамічну задачу, розв'язується θ-методом Вілсона [8], який зводить початкову задачу до ітераційної послідовності квазістатичних задач. Оскільки матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь для статичної та квазістатичної задачі є симетричними та додатньовизначеними [8, 9], для розв'язку цих систем було застосовано метод спряжених градієнтів, алгоритм якого наведено в роботі [4].

Результати числового аналізу. Розглянемо випадок, коли у момент часу $\tau = 0$ прикладається імпульсивне навантаження $F(x_*, y_*, \tau) = F(x_*, y_*)H(\tau)$, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок та залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

Розрахунки, зокрема формування матриць жорсткості та мас, було проведено для таких значень безрозмірних величин:

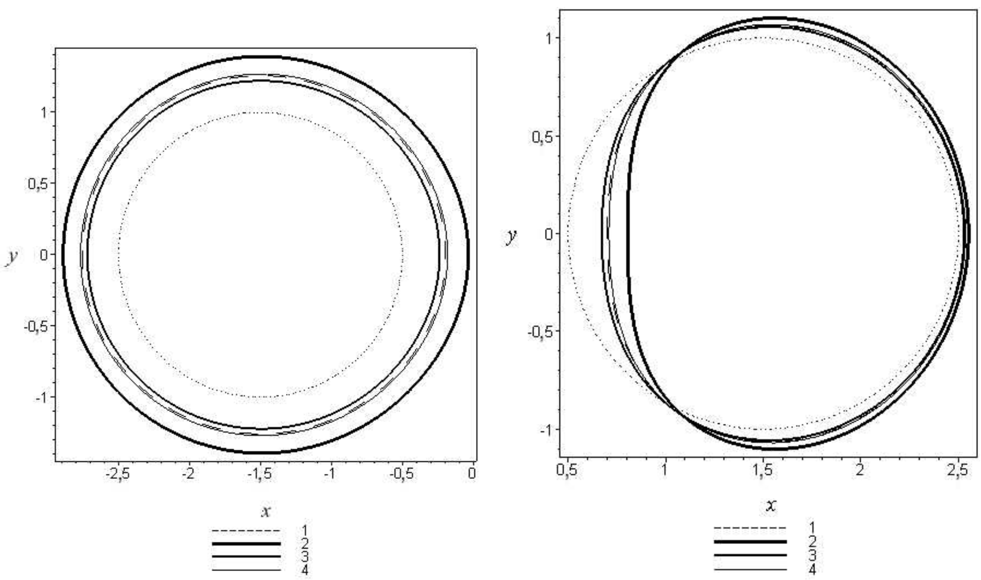
$$© = 0{,}02; ¥ = 30; °^{*} = 4; d_1 = 1 - © = 0{,}98.$$

Величини $x_*, y_*, ², L_*, q_*$ – змінювались.

Далі на всіх графіках крива 1 – статичний розв’язок, крива 2 – розв’язок при $² = 0{,}75$; 3 – $² = 1{,}5$; 4 – $² = 2{,}5$. Точками зображено початкове положення межі контакту (тобто до навантаження).

Спочатку розглянемо перший випадок, тобто дві коаксіальні оболонки в необмеженому середовищі.

На рис. 1 зображені переміщення межі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 1, а)) та оболонки вільної від навантажень (рис. 1, б)). Відстань між оболонками – один радіус (тобто $q_* = 1{,}5$).



а) б)

Рис. 1 – Переміщення межі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

На рис. 2 зображені переміщення вздовж осі $O x_*$ точок середовища, які розташовані між оболонками на лінії $y_* = 0$. Причому на рис. 2, а) відстань між оболонками дорівнює одному радіусу ($q_* = 1{,}5$), на рис. 2, б) – трьом радіусам ($q_* = 2{,}5$), на рис. 2, в) – п’ятьом радіусам ($q_* = 3{,}5$), на рис. 2, г) – шісти радіусам ($q_* = 4$).

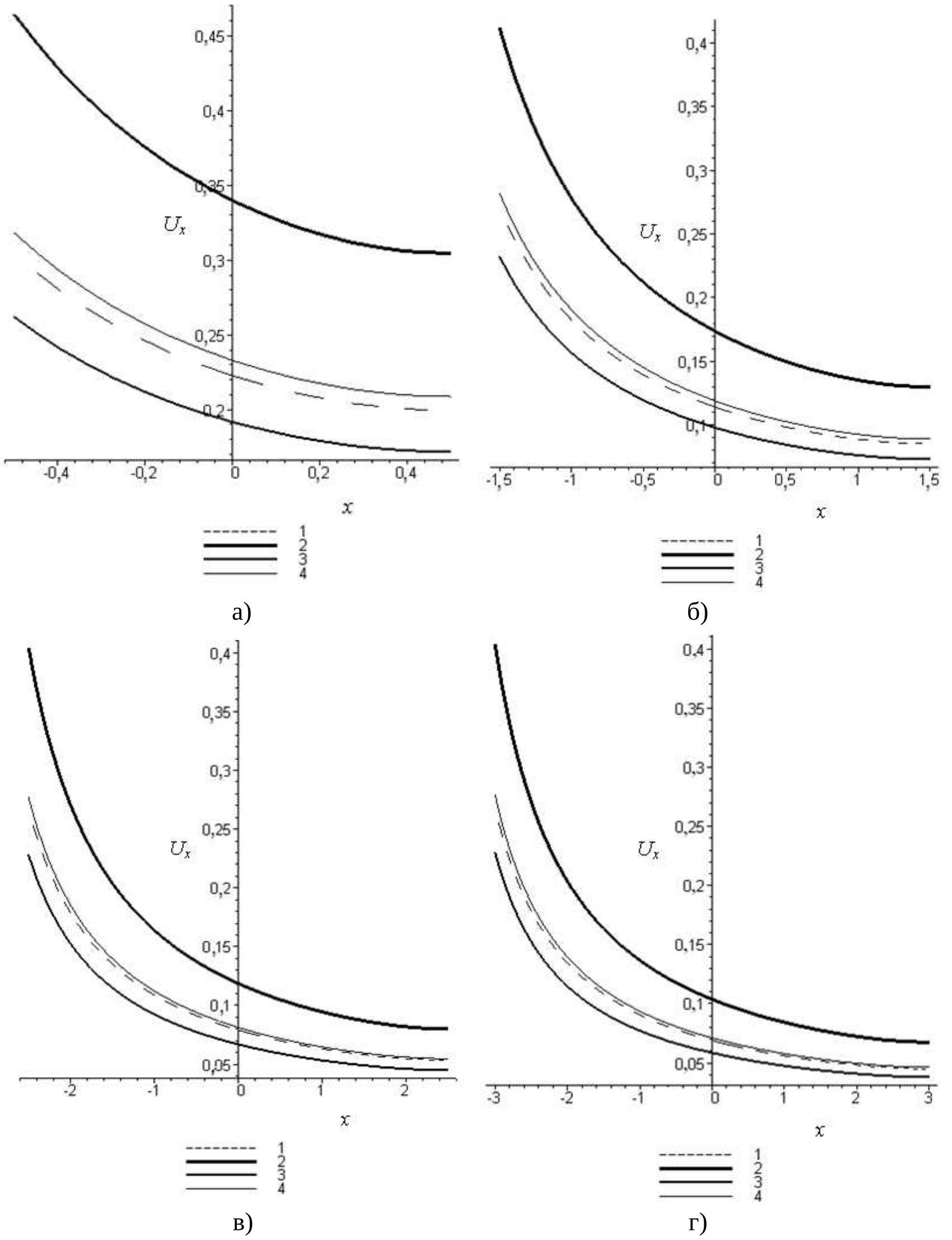
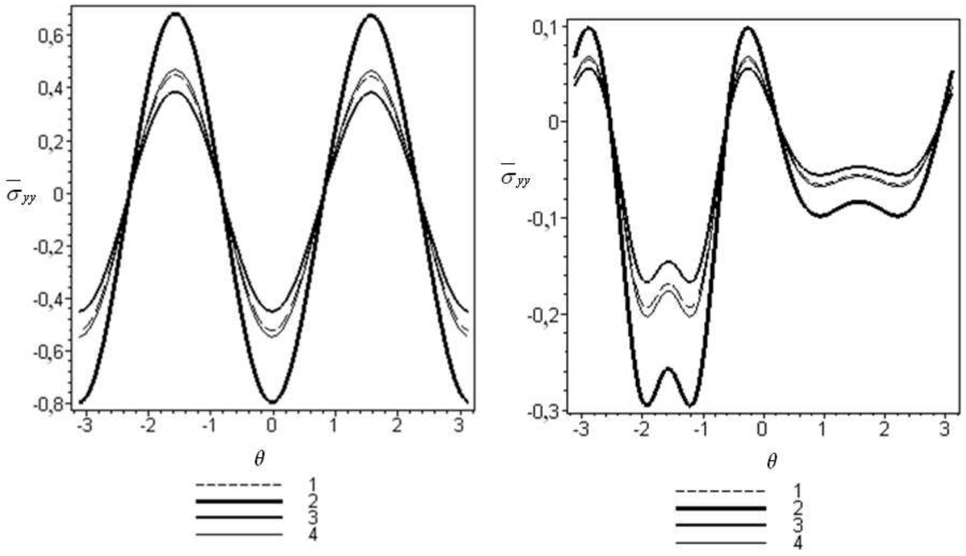


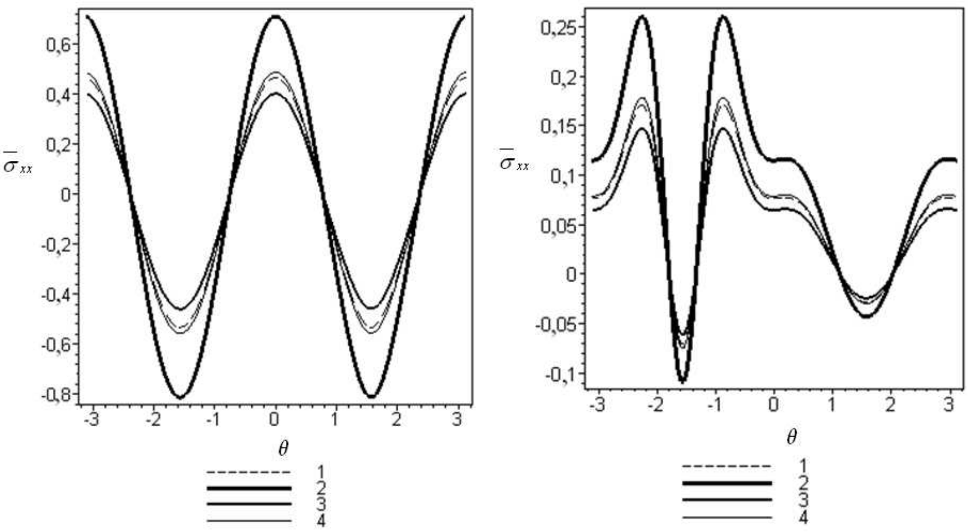
Рис. 2 – Переміщення точок середовища між оболонками по лінії $y_* = 0$ в різні моменти часу

На рис. 3 – 5 зображені напруження середовища за кутовою координатою на межі контакту оболонок із середовищем, причому випадок а) – навантажена оболонка, випадок б) – оболонка вільна від навантажень. Відстань між оболонками – один радіус (тобто $q_* = 1{,}5$).



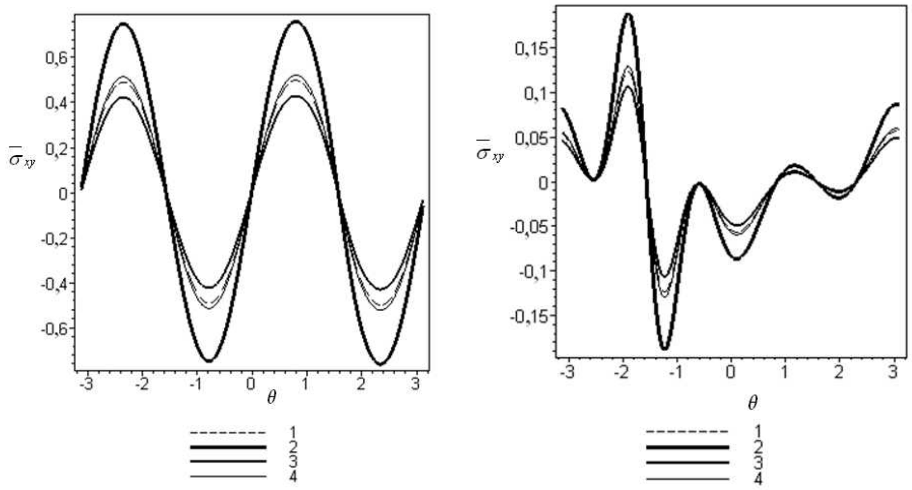
а) б)

Рис. 3 – Напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ середовища на межі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу



а) б)

Рис. 4 – Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ середовища на межі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу



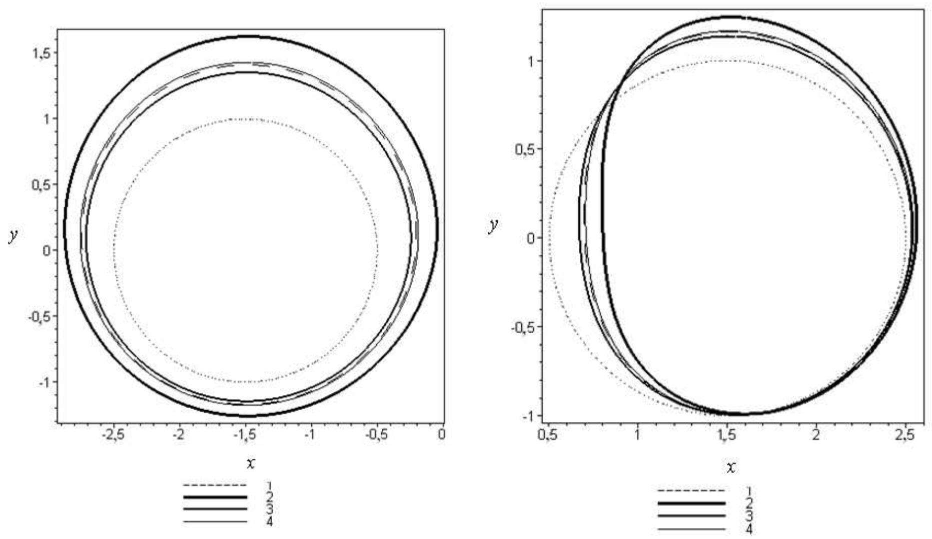
а) б)

Рис. 5 – Напруження $\bar{\sigma}_{xy}$ середовища на межі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що для відстані між оболонками понад 6 її радіусів взаємний вплив оболонок одна на одну при динамічному навантаженні внутрішньої поверхні однієї оболонки є незначним. Тому, у випадках відстані понад 6 радіусів (без суттєвої втрати точності) можна розглядати одну оболонку у необмеженому середовищі та, в залежності від вигляду навантаження, використовувати методи, описані в роботах [1 – 3].

Тепер розглянемо випадок, коли дві коаксіальні оболонки знаходяться у середовищі з вільною поверхнею, площина якої паралельна осям оболонки. Відстань від кожної оболонки до поверхні однакова. Також будемо вважати, що відстань між оболонками дорівнює одному радіусу (тобто $q_* = 1{,}5$).

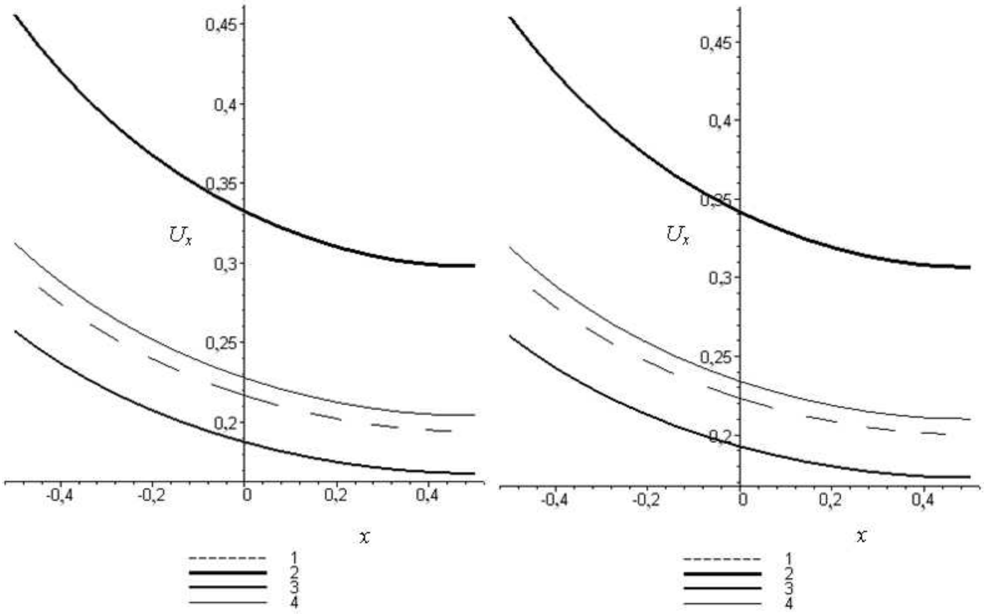
На рис. 6 зображені переміщення межі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 6, а)) та оболонки, вільної від навантажень (рис. 6, б)). Відстань між оболонками – один радіус (тобто $q_* = 1{,}5$).



а) б)

Рис. 6 – Переміщення межі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

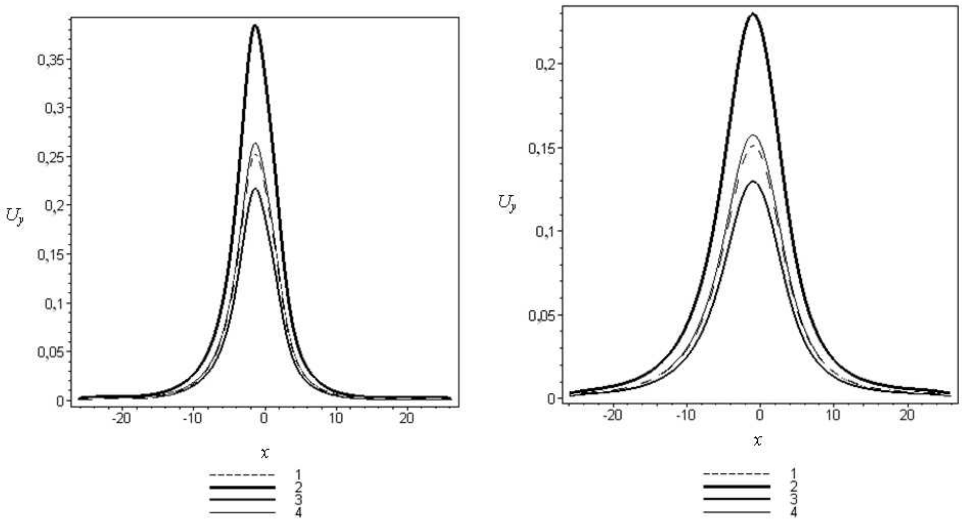
На рис. 7 зображені переміщення вздовж осі Ox_* точок середовища, які розташовані між оболонками на лінії $y_* = 0$. Причому на рис. 7, а) відстань від оболонок до поверхні дорівнює двом радіусам (тобто $L_* = 2$), а на рис. 7, б) – чотирьом радіусам (тобто $L_* = 4$).



а) б)

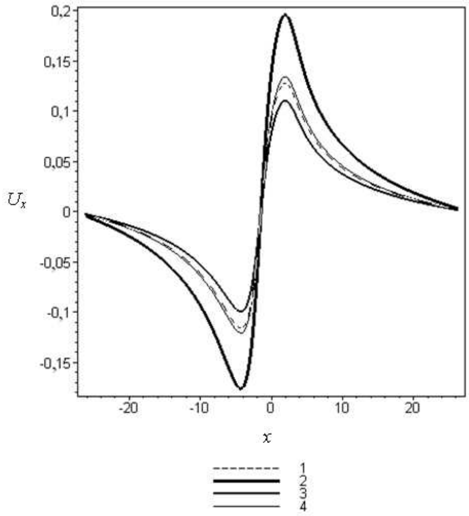
Рис. 7 – Переміщення точок середовища між оболонками по лінії $y_* = 0$ в різні моменти часу

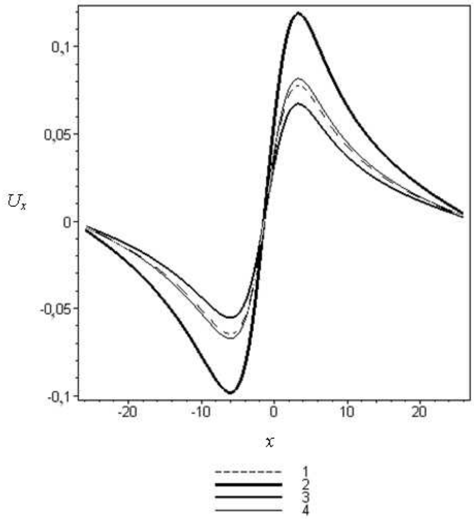
На рис. 8 – 9 зображені переміщення поверхні середовища, причому випадок а) – $L_* = 2$, випадок б) – $L_* = 4$. Відстань між оболонками – один радіус (тобто $q_* = 1{,}5$).



а) б)

Рис. 8 – Переміщення U_y поверхні середовища в різні моменти часу





а) б)

Рис. 9 – Переміщення U_x поверхні середовища в різні моменти часу

Висновки. Отримано розв'язок динамічної задачі для коаксіальних оболонок у необмеженому пружному середовищі, а також у пружному середовищі із вільною поверхнею. Розв'язок задачі отримано МСЕ. Проаналізовано вплив відстані між оболонками на динамічний НДС розглянутої системи. Також досліджено вплив вільної поверхні на розглянуту механічну систему. Отримані результати можуть бути застосовані при проектуванні та експлуатації підземних конструкцій, зокрема трубопроводів, тунелів метрополітену та ін.

1. *Горшков А. Г., Пожуев В. И.* Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. М.: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. *Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 2. С. 108–114.
3. *Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2016. № 1. С. 200–213.
4. *Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2016. № 1. С. 119–126.
5. *Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В.* Динаміка пружного півпростору з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, при поверхневих навантаженнях. Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій. 2017. Випуск 26. С. 142–152.
6. *Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Ч. С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 393 с.
7. *Самуль В. И*. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
8. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
9. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 393 с.

Отримано 27.07.2017,
в остаточному варіанті 10.10.2017