УДК 533.9

Д. А. РЕДЧИЦ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ

Целью данной работы является разработка новой численно-аналитической модели, которая позволяет качественно и количественно воспроизводить процессы диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора. Данная модель включает описание нестационарных электродинамических процессов, кинетических явлений и плазмохимических реакций. Реализован единый неявный численный алгоритм для эффективного решения неоднородной системы исходных уравнений. Основной особенностью разработанной численно-аналитической модели является использование рационального количества уравнений для описания всех основных нестационарных параметров диэлектрического барьерного разряда в воздухе. Получено зарождение и развитие стримера для реальных конфигураций плазменных актуаторов на основе данной модели. Разработанная модель диэлектрического барьерного разряда предназначена для адекватного воспроизведения силы Лоренца, действующей на турбулентный поток частично ионизированного воздуха, в широком диапазоне амплитуд и частот приложенного напряжения, а также параметров и свойств диэлектрической поверхности.

Метою даної роботи є розробка нової чисельно-аналітичної моделі, яка дозволяє якісно і кількісно відтворювати процеси діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора. Дана модель включає опис нестаціонарних електродинамічних процесів, кінетичних явищ і плазмохімічних реакцій. Реалізовано єдиний неявний чисельний алгоритм для ефективного розв'язання неоднорідної системи вихідних рівнянь. Основною особливістю розробленої чисельно-аналітичної моделі є використання раціональної кількості рівнянь для опису всіх основних нестаціонарних параметрів діелектричного бар'єрного розряду в повітрі. Отримано зародження і розвиток стримера для реальних конфігурацій плазмових актуаторів на основі даної моделі. Розроблена модель діелектричного бар'єрного розряду призначена для адекватного відтворення сили Лоренца, що діє на турбулентний потік частково іонізованого повітря, в широкому діапазоні амплітуд і частот прикладеної напруги, а також параметрів і властивостей діелектричної поверхні.

The aim of this work is to develop a new numerical-analytical model for the qualitative and quantitative simulation of dielectric barrier discharge processes in operation of the plasma actuator. This model includes a description of nonstationary electrodynamic processes, kinetic phenomena and plasma chemical reactions. A uniform implicit numerical algorithm for an efficient solution of the inhomogeneous system of the initial equations was realized. The main feature of the developed numerical-analytical model is the use of a rational number of equations for the description of all the main nonstationary parameters of the dielectric barrier discharge in air. The generation and development of the streamer for a real configuration of the plasma actuators were obtained on the basis of this model. The developed model of the dielectric barrier discharge is designed for an adequate simulation of the Lorentz force acting on the turbulent flow of partially ionized air in a wide range of amplitudes and frequencies of the applied voltage as well as parameters and properties of the dielectric surface

Ключевые слова: *динамика плазмы, плазменный актуатор, диэлектрический барьерный разряд, химическая кинетика, численное моделирование, стример*

Введение. Применение плазменных актуаторов (ПА) на основе диэлектрического барьерного разряда (ДБР) относится к числу современных и перспективных способов изменения структуры течения [1].

Совершенствование существующих конструкций плазменных актуаторов на основе диэлектрического барьерного разряда и их работы требует полного анализа всей совокупности протекающих физико-химических процессов, включая как макроскопические характеристики ДБР, так и структуру отдельного микроразряда, а также состав продуктов плазмохимических реакций [2].

Существующие математические модели динамики частично ионизированного потока опираются на эмпирические константы и пригодны только для отдельных классов течений. Разработка модели для описания процессов, исследуемых в широком диапазоне определяющих параметров, является актуальной и пока не решенной задачей в данной области знаний.

Как показывает практика, для создания математической модели недостаточно просто выписать дифференциальные уравнения, описывающие конкретные физические процессы. Единая система, описывающая разнородные физико-химические процессы, сталкивается с проблемой рассогласования по характерным временам, скоростям, разнородностью протекания физических процессов (диффузия, адвекция, кросслагаемые в источниковых членах) и их математическим описанием.

Одной из главных проблем является различие масштабов по времени протекания нелинейных физических процессов. Так, слишком мелкий шаг интегрирования снижает общую работоспособность на 2 – 3 порядка. Процессы, приводящие к мелким шагам по времени (например, зарождение стримера), зачастую бывают локальными, т. е. происходят не во все время цикла, а в сравнительно небольшой период цикла. Использование традиционных численных методов связано с чрезвычайно большими и зачастую нерациональными затратами процессорного времени, что в свою очередь ведет к невозможности проведения вычислительного эксперимента.

В этой связи имеет смысл расширить понятие концепции математической модели до численно-аналитической. Аналитическая часть представляет собой систему исходных уравнений, граничные условия, оценку адекватности описываемых физических процессов. Численная сторона математической модели связана в первую очередь с обеспечением работоспособности специализированного пакета программ. Речь идет не столько о хорошо известных численных алгоритмах решения отдельных уравнений или систем уравнений, а о тех дополнительных мерах, обеспечивающих взаимную работоспособность различных аспектов общей математической модели. Такие дополнительные меры численного и алгоритмического характера необходимо рассматривать как неотъемлемую часть общей численно-аналитической модели.

1. Постановка проблемы исследования электродинамики, динамики и химической кинетики плазмы. Для описания пространственно-временной структуры диэлектрического барьерного разряда в воздухе в качестве базового выбран диффузионно-дрейфовый подход [3, 4, 5].

1.1. Кинетическая схема плазмы диэлектрического барьерного разряда. В качестве рабочего газа выступает воздух с фиксированной долей азота $N_2/N_{air} = 0,78$ и кислорода $O_2/N_{air} = 0,22$ при нормальном давлении на уровне моря $p = 101325$ Н/м² (1 атм.). Температура воздуха принимается постоянной и равной $T = 300$ K. Общее число молекул азота и кислорода в единице объема составляет $N_{air} = 2,447 \cdot 10^{25}$ $1/м^3$.

В работе рассматриваются электронно-возбуждённые и метастабильные (*) состояния молекул азота $N_2^*\left(A^3\Sigma_u^+\right)$, $N_2\left(B^3\Pi_g\right)$, $N_2^*\left(a'^1\Sigma_u^-\right)$, $N_2\left(C^3\Pi_u\right)$ и кислорода $O_2^*\left(a^1\Delta_g\right)$, $O_2^*\left(b^1\Sigma_g^+\right)$, атомы кислорода O, электроны e, а также положительные N_2^+, N_4^+, O_2^+, O_4^+ и отрицательные ионы O^-, O_2^-, в общей сложности 14 частиц и 97 плазмохимических реакций, включая поверхностные процессы.

Химические реакции включают процессы диссоциации, ионизации молекул электронным ударом из основного состояния, ступенчатую, ассоциативную и фотоионизацию, возбуждение молекул, ионизацию возбужденных (метастабильных) молекул, прилипание и отлипание электронов, рекомбинацию электронов и положительных ионов, химические превращения нейтральных атомов, молекул и ионов, а также процессы вторичной эмиссии электронов из открытого электрода и диэлектрической поверхности.

Температура, подвижность и диффузия электронов, а также коэффициенты некоторых химических реакций (ионизации, возбуждения, прилипания) зависят от напряженности электрического поля и рассчитываются с помощью солвера BOLSIG+ [6], который основан на решении уравнения Больцмана с использованием функции распределения электронов по скоростям и энергиям.

1.2. Уравнения электродинамики плазмы. В общем случае плазма может быть описана четырьмя уравнениями Максвелла в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t\,, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{H}$ – напряжённость магнитного поля, $\mathbf{B}$ – магнитная индукция, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля, $\mathbf{D}$ – электрическая индукция, $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, $\rho_c = e\left(n_+ - n_-\right)$ – плотность результирующего объемного заряда, e – элементарный заряд, n_+, n_- – объемная плотность положительных и отрицательных частиц. Уравнения (1) представляют собой закон Гаусса, закон Гаусса для магнитного поля, закон Фарадея и закон Ампера–Максвелла соответственно.

Закон Фарадея и закон Гаусса для магнитной индукции выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выразить через скалярный φ и векторный $\mathbf{A}$ потенциалы [7]

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t\,, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,. \qquad (2)$$

Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ связан с вектором напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ через абсолютную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$ и равен $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды, ε_o – электрическая постоянная.

Так как скорости движения заряженных частиц в плазме гораздо меньше релятивистских скоростей и отсутствуют внешние источники магнитного поля, то напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$ и магнитная индукция $\mathbf{B}$ полагаются равными нулю. К тому же, производная по времени магнитной индукции $\partial \mathbf{B} / \partial t$ равна нулю. Тогда $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ и закон Гаусса с учетом поверхностного заряда σ примет вид

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla \varphi\right) = -\rho_c / \varepsilon_o - \sigma \delta / \varepsilon_o\,, \qquad (3)$$

где δ – дельта-функция Дирака, σ – суммарная поверхностная плотность электрического заряда. Уравнение (3) представляет собой уравнение Пуассона для электрического поля.

Плотность результирующего заряда в любой точке плазмы определяется как разность между плотностью положительного и отрицательного заряда. Тогда можно записать

$$\nabla\cdot\left(£_r\nabla¨\right)=-e\left(n_{\mathrm{N}_4^+}+n_{\mathrm{N}_2^+}+n_{\mathrm{O}_4^+}+n_{\mathrm{O}_2^+}-n_{\mathrm{O}_2^-}-n_{\mathrm{O}^-}-n_e\right)\Big/£_0-\left(±_+-±_-\right)¢\Big/£_0\,, \quad (4)$$

где $±_+, ±_-$ – поверхностная плотность положительного и отрицательного зарядов, $n_{\mathrm{N}_4^+}, n_{\mathrm{N}_2^+}, n_{\mathrm{O}_4^+}, n_{\mathrm{O}_2^+}, n_{\mathrm{O}_2^-}, n_{\mathrm{O}^-}, n_e$ – объемная плотность положительных и отрицательных ионов азота и кислорода и электронов.

1.3. Уравнения динамики частиц плазмы в диффузионно-дрейфовом приближении. Исходя из кинетической схемы диэлектрического барьерного разряда, можно составить уравнения динамики для каждого сорта частиц. Система уравнений динамики частиц плазмы в диффузионно-дрейфовой формулировке с учетом того, что $\mathbf{E}=-\nabla¨$, может быть записана в декартовой форме

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial¨}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial¨}{\partial y}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial y}\right]=\mathbf{S}\,, \quad (5)$$

где $\mathbf{n}$ − вектор искомых переменных для объемной плотности частиц, $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{D}$ – векторные коэффициенты подвижности и диффузии частиц, $\mathbf{S}$ − вектор источниковых членов

$$\mathbf{n}=\begin{bmatrix} n_{\mathrm{N}_4^+}, & n_{\mathrm{N}_2^+}, & n_{\mathrm{N}_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)}, & n_{\mathrm{N}_2\left(B^3\Pi_g\right)}, & n_{\mathrm{N}_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)}, & n_{\mathrm{N}_2\left(C^3\Pi_u\right)}, \\ n_{\mathrm{O}_4^+}, & n_{\mathrm{O}_2^+}, & n_{\mathrm{O}_2^-}, & n_{\mathrm{O}^-}, & n_{\mathrm{O}}, & n_{\mathrm{O}_2\left(a^1\Delta_g\right)}, n_{\mathrm{O}_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)}, \quad n_e \end{bmatrix}^T, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\mu}=\left[«_{\mathrm{N}_4^+}, «_{\mathrm{N}_2^+}, 0,0,0,0, «_{\mathrm{O}_4^+}, «_{\mathrm{O}_2^+}, -«_{\mathrm{O}_2^-}, -«_{\mathrm{O}^-}, 0,0,0, -«_e\right]^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}=\left[D_{\mathrm{N}_4^+}, D_{\mathrm{N}_2^+}, 0,0,0,0, D_{\mathrm{O}_4^+}, D_{\mathrm{O}_2^+}, D_{\mathrm{O}_2^-}, D_{\mathrm{O}^-}, 0,0,0, D_e\right]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} S_{\mathrm{N}_4^+}, & S_{\mathrm{N}_2^+}, & S_{\mathrm{N}_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)}, & S_{\mathrm{N}_2\left(B^3\Pi_g\right)}, & S_{\mathrm{N}_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)}, & S_{\mathrm{N}_2\left(C^3\Pi_u\right)}, \\ S_{\mathrm{O}_4^+}, & S_{\mathrm{O}_2^+}, & S_{\mathrm{O}_2^-}, & S_{\mathrm{O}^-}, & S_{\mathrm{O}}, & S_{\mathrm{O}_2\left(a^1\Delta_g\right)}, S_{\mathrm{O}_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)}, \quad S_e \end{bmatrix}^T. \quad (9)$$

Здесь под произведением вида $\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}$ подразумевается вектор $\left[«_1 n_1, «_2 n_2, \ldots, «_\ell n_\ell\right]^T$.

Компоненты вектора источниковых членов $\mathbf{S}$ в выражении (5) формируются исходя из кинетической схемы диэлектрического барьерного разряда и отвечают за источники и стоки определенного сорта частиц. Принцип формирования источниковых членов, описание объемных, поверхностных химических реакций и их коэффициентов, а также значения коэффициентов переноса (подвижность и диффузия) положительных и отрицательных ионов приведены в работе [3, 5].

1.4. Уравнения баланса поверхностной плотности положительного и отрицательного заряда. Процессы на поверхности диэлектрика играют существенную роль в работе плазменного актуатора.

Уравнения баланса поверхностной плотности положительного и отрицательного заряда определяется по следующим выражениям

$$\partial ±_+/\partial t = -e\left(1+¥_{diel}\right)\Gamma_{i+} - \sim_{rw} ±_+ ±_- /e\,,\ \partial ±_-/\partial t = -e\Gamma_{i-} - e\Gamma_e - \sim_{rw} ±_+ ±_- /e\,, \quad (10)$$

где Γ_{i+}, Γ_{i-}, Γ_e – поток положительных, отрицательных ионов и электронов по нормали к поверхности, который определяется по типу граничных условий (табл. 1), $±_+, ±_-$ – поверхностная плотность положительного и отрицательного зарядов, $\sim_{rw}$ – коэффициент поверхностной рекомбинации, $¥_{diel} = 0{,}005$ – коэффициент ионно-электронной эмиссии из диэлектрика. Коэффициент поверхностной рекомбинации $\sim_{rw}$ определяется поверхностной диффузией электронов

$$\sim_{rw} = d_r \sqrt{® k_b T_w / m_e}\,, \quad (11)$$

где $d_r = 10^{-9}$ м – радиус рекомбинации (величина, характеризующая двумерные столкновения, аналогичная эффективному сечению столкновений для трехмерного случая); T_w – температура диэлектрической поверхности; m_e, T_e – масса и температура электронов; k_b – константа Больцмана.

1.5. Начальные и граничные условия для исходной системы уравнений. *Уравнение Пуассона для электрического потенциала.* В качестве начальных условий для уравнения Пуассона задавалось нулевое распределение электрического потенциала в области. Переменное напряжение, приложенное к открытому электроду, задается как

$$¨_{el}(t) = ¨^{\max} \sin(2®µt)\,, \quad (12)$$

где $µ$ – частота и $¨^{\max}$ – амплитуда колебаний. К изолированному электроду прикладывается нулевой потенциал. На внешних границах ставится условие Неймана $\partial ¨ / \partial \ell_n = 0$, где $\partial \ell_n$ – расстояние по нормали к внешней границе.

Уравнения динамики частиц плазмы. В качестве начальных условий для уравнения динамики заряженных частиц плазмы задавалась фоновая концентрация ионов и электронов в воздухе ($n_+ = 10^9\ 1/\text{м}^3$, $n_- = 10^9\ 1/\text{м}^3$, $n_e = 10^{10}\ 1/\text{м}^3$). Граничные условия для уравнений динамики заряженных частиц на твердой поверхности приведены в таблице 1.

Таблица 1

$E_{\ell_n} > 0$	$\Gamma_{i+} = -1/4\, n_{i+} V_{i+}^{th}$, $\Gamma_{i-} = -«_{i-} E_n n_{i-} - 1/4\, n_{i-} V_{i-}^{th}$, $\Gamma_e = -«_e E_n n_e - 1/4\, n_e V_e^{th}$
$E_{\ell_n} \le 0$	$\Gamma_{i+} = «_{i+} E_n n_{i+} - 1/4\, n_{i+} V_{i+}^{th}$, $\Gamma_{i-} = -1/4\, n_{i-} V_{i-}^{th}$, $\Gamma_e = -¥_{Cu,diel} \Gamma_{i+}$

Здесь $V_{i,e}^{th}$ – тепловая скорость движения частиц, $¥_{Cu}$ – коэффициент ионно-электронной эмиссии из медного анода, который зависит от напряженности электрического поля. На внешних границах ставится условие Неймана $\partial n / \partial \ell_n = 0$. Тепловая скорость движения частиц определяется по формуле

$$V_{i,e}^{th} = \sqrt{8 k_b T_{i,e} / ® m_{i,e}} \ , \tag{13}$$

где $m_{i,e}$, $T_{i,e}$ – масса и температура ионов и электронов.

2. Численный метод.

2.1. Система уравнений динамики частиц плазмы и электродинамики в криволинейной системе координат.

Нестационарная формулировка. Для моделирования диэлектрического барьерного разряда необходимо совместно решать систему уравнений динамики частиц плазмы с уравнением Пуассона для электрического поля. При решении нестационарной задачи динамики плазмы рассматриваются разнородные уравнения. Для их согласования введем псевдовремя $²$ для каждого уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial ²_n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{\mu n} \frac{\partial ¨}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{\mu n} \frac{\partial ¨}{\partial y} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right] = \mathbf{S} \ , \tag{14}$$

$$\frac{\partial ¨}{\partial ²_{¨}} + \frac{\partial}{\partial x} £_r \frac{\partial ¨}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} £_r \frac{\partial ¨}{\partial y} = -\frac{e}{£_0}\left(n_+ - n_- \right) - \frac{¢}{£_0}\left(±_+ - ±_- \right) , \tag{15}$$

где $²_n$ и $²_{¨}$ – псевдовремя для уравнений динамики частиц плазмы и электрического потенциала, $n_+ = n_{N_4^+} + n_{N_2^+} + n_{O_4^+} + n_{O_2^+}$, $n_- = n_{O_2^-} + n_{O^-} + n_e$ – объемная плотность положительных и отрицательных частиц. В дальнейшем для удобства вывода необходимых уравнений последнее слагаемое в (15) будем опускать.

Уравнения динамики частиц плазмы. Будем рассматривать уравнение для плотности частиц n в диффузионно-дрейфовом приближении в криволинейной системе координат в виде

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial ²_n} + \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{¶}}{\partial ¶} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{¦}}{\partial ¦} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{¶}}{\partial ¶} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{¦}}{\partial ¦} = \hat{\mathbf{S}} \ , \tag{16}$$

где $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/J$, $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}/J$, J – якобиан преобразования координат, $¶_x, ¦_x, ¶_y, ¦_y$ – метрические коэффициенты,

$$\hat{\mathbf{H}}_{¶} = \frac{\mathbf{\mu n}}{J}\left(\left(¶_x^2 + ¶_y^2 \right) \frac{\partial ¨}{\partial ¶} + \left(¶_x ¦_x + ¶_y ¦_y \right) \frac{\partial ¨}{\partial ¦} \right), \hat{\mathbf{H}}_{¦} = \frac{\mathbf{\mu n}}{J}\left(\left(¶_x ¦_x + ¶_y ¦_y \right) \frac{\partial ¨}{\partial ¶} + \left(¦_x^2 + ¦_y^2 \right) \frac{\partial ¨}{\partial ¦} \right),$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{¶} = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\left(¶_x^2 + ¶_y^2 \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial ¶} + \left(¶_x ¦_x + ¶_y ¦_y \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial ¦} \right), \hat{\mathbf{D}}_{¦} = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\left(¶_x ¦_x + ¶_y ¦_y \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial ¶} + \left(¦_x^2 + ¦_y^2 \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial ¦} \right).$$

Слагаемые $\partial \hat{\mathbf{H}}_\xi / \partial \xi$, $\partial \hat{\mathbf{H}}_\eta / \partial \eta$ отвечают за адвекцию (дрейф) заряженных частиц. Формальная математическая аппроксимация этих выражений с помощью симметричных конечно-разностных соотношений (как для диффузионных слагаемых) приводит к потере физического смысла данного оператора как адвекции заряженных частиц. Для сохранения физического смысла адвекции вводится несимметричная конечно-объемная аппроксимация для φ с учетом адвекции по $\mathbf{n}$ вида

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\Psi}_{i+1/2}\left(\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i,\ \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1}\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i+1/2} \ge 0 \\ \mathbf{n}_{i+1} - \boldsymbol{\Psi}_{i+1/2}\left(\mathbf{n}_{i+2} - \mathbf{n}_{i+1},\ \mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i+1/2} < 0 \end{cases}, \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{\Psi}_{i+1/2}$ – ограничитель потоков MinMod второго порядка точности.

Уравнение для электрического потенциала. Уравнение Пуассона для электрического потенциала в криволинейной системе координат примет следующий вид

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \tau_\varphi} + \frac{\partial \hat{\varphi}_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\varphi}_\eta}{\partial \eta} = -\frac{\hat{\rho}_c}{\varepsilon_0}, \qquad (18)$$

где $\hat{\varphi} = \varphi / J$, $\hat{\rho}_c = \rho_c / J$,

$$\hat{\varphi}_\xi = \frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad \hat{\varphi}_\eta = \frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right].$$

Аппроксимация вторых производных для φ производится по конечно-объемным соотношениям.

2.2. Неявный метод для уравнений динамики частиц плазмы и электродинамики

Уравнения динамики частиц плазмы. Рассмотрим уравнение (16) на новом временном слое

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1}}{\partial \tau_n} + \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\xi^{\,n+1,m+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\eta^{\,n+1,m+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\xi^{\,n+1,m+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\eta^{\,n+1,m+1}}{\partial \eta} = \hat{\mathbf{S}}^{n+1,m+1},$$

или

$$\frac{\left(\hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1} - \hat{\mathbf{n}}^{n+1,m}\right)}{\Delta \tau_n} = \hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1} + \hat{\mathbf{S}}^{n+1,m+1} - \frac{\left(1{,}5\hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1} - 2\hat{\mathbf{n}}^{n} + 0{,}5\hat{\mathbf{n}}^{n-1}\right)}{\Delta t}, \qquad (19)$$

где

$$\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1} = \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\xi^{\,n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\eta^{\,n+1,m+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\xi^{\,n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\eta^{\,n+1,m+1}}{\partial \eta}. \qquad (20)$$

Использованный алгоритм базируется на трехслойной неявной схеме с подитерациями по псевдовремени τ_n, второго порядка точности по физическому времени t.

Линеаризуем невязку $\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1}$, источниковый член $\hat{\mathbf{S}}$ и запишем уравнение (19) в дельта-форме

$$\begin{aligned}&\left[\left(1/(J\Delta\text{²}_n)+1{,}5/(J\Delta t)\right)\mathbf{E}_{14\times14}-\left(\partial\hat{\mathbf{R}}/\partial\mathbf{n}\right)^{n+1,m}-\left(\partial\hat{\mathbf{S}}/\partial\mathbf{n}\right)^{n+1,m}\right]\Delta\mathbf{n}^{n+1,m}=\\&=\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m}+\hat{\mathbf{S}}^{n+1,m}-\left(1{,}5\hat{\mathbf{n}}^{n+1,m}-2\hat{\mathbf{n}}^{n}+0{,}5\hat{\mathbf{n}}^{n-1}\right)\Big/\Delta t\end{aligned},\quad(21)$$

где $\Delta\mathbf{n}^{n+1,m}=\mathbf{n}^{n+1,m+1}-\mathbf{n}^{n+1,m}$, $\mathbf{E}_{14\times14}$ – единичная матрица 14×14. Линеаризация уравнения (19) выполнена по псевдовремени.

Уравнение электрического потенциала с учетом уравнений для плотности заряженных частиц. При решении уравнения Пуассона для электрического потенциала совместно с уравнениями динамики частиц плазмы важную роль играет шаг интегрирования по времени. Явное согласование этих уравнений накладывает ограничение на шаг по времени вида $\Delta t\le\Delta t_{Maxwell}$, где $\Delta t_{Maxwell}=\text{£}_0\Big/\sum e\text{«}_k n_k$ – максвелловское время ($k=i_+,i_-,e$). Максвелловское время (время релаксации объемного заряда) представляет собой характерное время, необходимое заряженным частицам для установления равновесного состояния под действием переменного электрического поля, которое они же и изменяют.

Взаимосвязь уравнения Пуассона с уравнениями динамики заряженных частиц заключается в расчете переноса частиц в суммарном электрическом поле, которое состоит из электрического поля, порожденного этими же заряженными частицами, и внешнего электрического поля.

Рассмотрим уравнение (18) на новом временном слое $n+1$ для подитерации $m+1$

$$\frac{\partial\text{·ˆ}^{n+1,m+1}}{\partial\text{²··}}+\frac{\partial\text{·ˆ}_{\text{¶}}^{\;n+1,m+1}}{\partial\text{¶}}+\frac{\partial\text{·ˆ}_{\text{¦}}^{\;n+1,m+1}}{\partial\text{¦}}=-\frac{e}{\text{£}_0}\left(\hat{n}_+^{\;n+1,m+1}-\hat{n}_-^{\;n+1,m+1}\right).\qquad(22)$$

Из разложения в ряд Тейлора по псевдовремени ² для значений n_+ и n_- получим

$$\hat{n}_\pm^{n+1,m+1}=\hat{n}_\pm^{n+1,m}+\Delta\text{²}_n\left(\partial\hat{n}_\pm/\partial\text{²}_n\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta\text{²}_n{}^2)\,.\qquad(23)$$

Подставляя (23) в (22), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\text{·ˆ}^{n+1,m+1}}{\partial\text{²··}}+\frac{\partial\text{·ˆ}_{\text{¶}}^{\;n+1,m+1}}{\partial\text{¶}}+\frac{\partial\text{·ˆ}_{\text{¦}}^{\;n+1,m+1}}{\partial\text{¦}}=-\frac{e}{\text{£}_0}\left(\hat{n}_+^{\;n+1,m}-\hat{n}_-^{\;n+1,m}\right)-\\&-\frac{e}{\text{£}_0}\Delta\text{²}_n\left(\frac{\partial\hat{n}_+}{\partial\text{²}_n}\right)^{n+1,m+1}+\frac{e}{\text{£}_0}\Delta\text{²}_n\left(\frac{\partial\hat{n}_-}{\partial\text{²}_n}\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta\text{²}_n{}^2)\end{aligned}.\qquad(24)$$

Из уравнения (16) имеем

$$\left(\frac{\partial\hat{n}_\pm}{\partial\text{²}_n}\right)^{n+1,m+1}=\left(-\frac{\partial\hat{n}_\pm}{\partial t}+\frac{\partial\hat{H}_{\text{¶},\pm}}{\partial\text{¶}}+\frac{\partial\hat{H}_{\text{¦},\pm}}{\partial\text{¦}}+\frac{\partial\hat{D}_{\text{¶},\pm}}{\partial\text{¶}}+\frac{\partial\hat{D}_{\text{¦},\pm}}{\partial\text{¦}}+\hat{S}_\pm\right)^{n+1,m+1},\qquad(25)$$

где $L_+=L_{\mathrm{N}_4^+}+L_{\mathrm{N}_2^+}+L_{\mathrm{O}_4^+}+L_{\mathrm{O}_2^+}$, $L_-=L_{\mathrm{O}_2^-}+L_{\mathrm{O}^-}+L_e$, $L=\hat{n},\hat{H}_{\text{¶}},\hat{H}_{\text{¦}},\hat{D}_{\text{¶}},\hat{D}_{\text{¦}},\hat{S}$.

Подставляя (25) в (24), получим

$$\frac{\partial \dot{\hat{}}^{\,n+1,m+1}}{\partial^2 ¨}+\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¶}^{\,n+1,m+1}}{\partial ¶}+\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¦}^{\,n+1,m+1}}{\partial ¦}+\frac{e\Delta^2{}_n}{£_0}\left[\frac{\partial\left(\hat H_{¶,+}-\hat H_{¶,-}\right)}{\partial ¶}+\frac{\partial\left(\hat H_{¦,+}-\hat H_{¦,-}\right)}{\partial ¦}\right]^{n+1,m+1}=$$

$$=-\frac{e}{£_0}\left(\hat n_+-\hat n_-\right)^{n+1,m}-\frac{e\Delta^2{}_n}{£_0}\left(-\frac{\partial \hat n_+}{\partial t}+\frac{\partial \hat D_{¶,+}}{\partial ¶}+\frac{\partial \hat D_{¦,+}}{\partial ¦}+\hat S_+ +\frac{\partial \hat n_-}{\partial t}-\frac{\partial \hat D_{¶,-}}{\partial ¶}-\frac{\partial \hat D_{¦,-}}{\partial ¦}-\hat S_-\right)^{n+1,m+1}.$$

Если в численном алгоритме вначале решается уравнение относительно ¨, а затем уравнения для плотности заряженных частиц n_+ и n_-, то в последнем соотношении все коэффициенты берутся с предыдущей подитерации m. Численная аппроксимация производных $\partial\hat n_+/\partial t$ и $\partial\hat n_-/\partial t$ в (25) может быть выполнена с необходимым порядком точности по Δt. Использование разложения в ряд Тейлора не накладывает ограничений по типу схемы (явная или неявная) для уравнений вида (16).

В результате имеем уравнение Пуассона для электрического потенциала ¨ на временном слое $n+1, m+1$ с учетом объемной плотности заряженных частиц n_+ и n_- на этом же временном слое в виде

$$\left(\dot{\hat{}}^{\,n+1,m+1}-\dot{\hat{}}^{\,n+1,m}\right)\Big/\Delta^2 ¨ = -\hat R_{¨}^{n+1,m+1}+\hat S_{¨}^{n+1,m}, \qquad (26)$$

$$\hat R_{¨}^{n+1,m+1}=\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¶}^{\,n+1,m+1}}{\partial ¶}+\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¦}^{\,n+1,m+1}}{\partial ¦}+\frac{e\Delta^2{}_n}{£_0}\left[\frac{\partial\left(\hat H_{¶,+}-\hat H_{¶,-}\right)}{\partial ¶}+\frac{\partial\left(\hat H_{¦,+}-\hat H_{¦,-}\right)}{\partial ¦}\right]^{n+1,m+1},$$

$$\hat S_{¨}^{n+1,m}=-\frac{e}{£_0}\left(\hat n_+-\hat n_-\right)^{n+1,m}-\frac{e\Delta^2{}_n}{£_0}\left(-\frac{\partial \hat n_+}{\partial t}+\frac{\partial \hat D_{¶,+}}{\partial ¶}+\frac{\partial \hat D_{¦,+}}{\partial ¦}+\hat S_+ +\frac{\partial \hat n_-}{\partial t}-\frac{\partial \hat D_{¶,-}}{\partial ¶}-\frac{\partial \hat D_{¦,-}}{\partial ¦}-\hat S_-\right)^{n+1,m}$$

Линеаризуем невязку $\hat R^{n+1,m+1}$ и запишем уравнение (26) в дельта-форме, учитывая $\Delta ¨^{\,n+1,m} = ¨^{\,n+1,m+1} - ¨^{\,n+1,m}$

$$\left[1/(J\Delta^2 ¨)+\left(\partial\hat R_{¨}/\partial ¨\right)^{n+1,m}\right]\Delta ¨^{\,n+1,m}=-\hat R_{¨}^{n+1,m}+\hat S_{¨}^{n+1,m}. \qquad (27)$$

Линеаризация уравнения (26) выполнена по псевдовремени. Невязка R данного уравнения может быть записана в виде

$$\hat R_{¨}^{n+1,m}=\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¶}^{\,n+1,m}}{\partial ¶}+\frac{\partial \dot{\hat{}}_{¦}^{\,n+1,m}}{\partial ¦}+\sum_k\frac{\partial \hat{¤}_{¶}^{\,n+1,m}}{\partial ¶}+\sum_k\frac{\partial \hat{¤}_{¦}^{\,n+1,m}}{\partial ¦}, \qquad (28)$$

где $k = \mathrm{N}_4^+, \mathrm{N}_2^+, \mathrm{O}_4^+, \mathrm{O}_2^+, \mathrm{O}_2^-, \mathrm{O}^-, e$, $\sim = e\Delta^2{}_n\left|«_k\right|\langle n_k\rangle/\left(£_0 J\right)$,

$$\dot{\hat{}}_{¶}=\frac{£_r}{J}\left[\left(¶_x^2+¶_y^2\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¶}+\left(¶_x ¦_x+¶_y ¦_y\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¦}\right],\ \dot{\hat{}}_{¦}=\frac{£_r}{J}\left[\left(¶_x ¦_x+¶_y ¦_y\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¶}+\left(¦_x^2+¦_y^2\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¦}\right],$$

$$\hat{¤}_{¶}=\sim\left[\left(¶_x^2+¶_y^2\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¶}+\left(¶_x ¦_x+¶_y ¦_y\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¦}\right],\ \hat{¤}_{¦}=\sim\left[\left(¶_x ¦_x+¶_y ¦_y\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¶}+\left(¦_x^2+¦_y^2\right)\frac{\partial ¨}{\partial ¦}\right].$$

Символ $\langle\ \rangle$ обозначает противопоточную аппроксимацию n на грань контрольного объема (17) для сохранения адвекции. Аппроксимация вторых производных для ¨ производится по конечно-объемным соотношениям с учетом несимметрично «отфильтрованного» значения n. Термин «фильтрация» вводится специально для акцентирования новой численной аппроксимации вторых производных по ¨ с учетом адвекции по n.

Основной особенностью разработанной численно-аналитической модели является использование рационального количества уравнений для описания всех основных нестационарных параметров диэлектрического барьерного разряда в воздухе. Выбранные 14 видов частиц обеспечивают высокую точность математического моделирования основных плазмохимических реакций, включая как поверхностные процессы, так и быстротекущие явления в пространстве (развитие стримера и электронных лавин).

3. Результаты и обсуждение. С целью верификации разработанной численно-аналитической математической модели проведены тестовые расчеты диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в неподвижном воздухе при атмосферном давлении.

Исходные данные соответствуют экспериментальным работам [8, 9]. Диэлектрик представляет собой керамический материал Macor с относительной диэлектрической проницаемостью $£_r = 6$ и толщиной $d = 2{,}1$ мм. Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха $£_r = 1{,}0006$. Электроды представляют собой полоски меди. Длина открытого электрода составляет 5 мм, а изолированного – 25 мм. К верхнему электроду прикладывалось напряжение амплитудой $¨^{\max} = 7$ кВ [8] и $¨^{\max} = 12$ кВ [9], частотой 5 кГц и 200 Гц, соответственно. Рассматривается четверть периода колебания приложенного напряжения для демонстрации возможностей разработанной новой математической модели.

В эксперименте диэлектрическая поверхность состояла из мелких сегментов, что дало возможность измерить распределение напряжения по поверхности диэлектрика.

Для адекватного описания зарождения, развития и прохождения стримера используется переменный шаг интегрирования по времени ($\Delta t = 10^{-7} \div 10^{-12}$ с). Начало координат совпадает с правым краем открытого электрода. Многоблочная сетка, описывающая геометрию расчетной области вблизи плазменного актуатора, состоит из пяти блоков: один для воздушной области ($1 \cdot 10^4$ узлов), а четыре для области диэлектрика (по $1 \cdot 10^4$ узлов). Минимальный шаг сетки вблизи правого края открытого электрода $1 \cdot 10^{-5}$ м.

На рисунках 1 – 3 показано изменение плотности различных химических элементов **n** плазмы диэлектрического барьерного разряда в пространстве и во времени при $¨^{\max} = 7$ кВ [10] и частоте 5 кГц, а также плотность результирующего объемного заряда ° и компоненты силы Лоренца f_x, f_y, отнесенные к единице объема. Здесь же приведены распределения суммарного $¨ = ¨_{el} + ¨_{\circ,\pm}$, приложенного $¨_{el}$ электрических потенциалов, а также распределения потенциала от объемного и поверхностного зарядов $¨_{\circ,\pm}$ и модуля напряженности электрического поля $|E|$.

Механизм формирования и развития отдельного микроразряда состоит из трех последовательных стадий (рис. 1 – 3).

На первой стадии с увеличением приложенного напряжения ¨$_{el}$ (рис. 1 д) происходит рост напряженности электрического поля вблизи правого края открытого электрода (рис. 1 ж). Это приводит к частичной ионизации воздуха в этой области (рис. 1 а) за счет формирования электронных лавин. На этой стадии концентрация заряженных частиц настолько мала, что результирующий объемный заряд практически не оказывает влияния на внешнее электрическое поле от электродов (рис. 1 г – е).

Четырнадцать рисунков группы (а) представляют собой распределение плотности частиц плазмы в порядке расположения компонент вектора $\mathbf{n} = \left[n_{N_4^+},\ \ n_{N_2^+},\ \ \ldots,\ \ n_e \right]^T$ (6) для момента времени $2{,}500677 \cdot 10^{-5}$ с. Количественные значения распределений параметров приведены в таблице 2.

Электроны, ускоряясь в электрическом поле, ионизируют молекулы азота и кислорода вблизи правого края открытого электрода, формируя электронные лавины, а при попадании на поверхность электрода поглощаются анодом. Когда напряженность электрического поля достигает величины порядка 10^7 В/м, в прианодном слое происходит значительный рост плотности результирующего заряда °, образованного положительными ионами азота и кислорода (рис. 1 б). Первая стадия микроразряда длилась $2{,}5007 \cdot 10^{-5}$ с.

На второй стадии процесса происходит лавинно-стримерный переход, при котором электрическое поле пространственного заряда головки лавины достигает внешнего. В этом случае потенциал от объемного заряда ¨$_{\circ,\pm}$ достигает величины приложенного напряжения ¨$_{el}$, что приводит к формированию катодонаправленного стримера.

В дальнейшем воздух ионизируется благодаря сильному собственному полю стримерной головки (рис. 2 и 3), что приводит к развитию стримера ($t = 2{,}500850 \cdot 10^{-5}$ с и $t = 2{,}504733 \cdot 10^{-5}$ с). Стример начинает распространяться от анода и движется над поверхностью диэлектрика. Внутри канала стримера плотность результирующего заряда близка к нулю и существенна лишь на поверхности, особенно в головке стримера (рис. 2 б и 3 б). В результате напряженность внутри стримерного канала значительно ниже, чем вне стримера (рис. 2 ж и 3 ж), что хорошо согласуется с имеющимися физическими представлениями.

На рис. 2 ж видно, как потенциал объемного и поверхностного зарядов ¨$_{\circ,\pm}$ искажает распределение приложенного потенциала (рис. 2 д). По результатам численного моделирования рассчитаны радиус стримерного канала $10^{-4} \div 10^{-3}$ м, плотность частиц в нём $10^{19} \div 10^{20}$ м$^{-3}$, степень ионизации воздуха $10^{-6} \div 10^{-5}$. Скорость роста стримера порядка 10^6 м/с, что хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными [10, 11]. Продолжительность второй стадии соответствует времени зарождения и распространения стримера и приблизительно равна $4{,}3 \cdot 10^{-8}$ с.

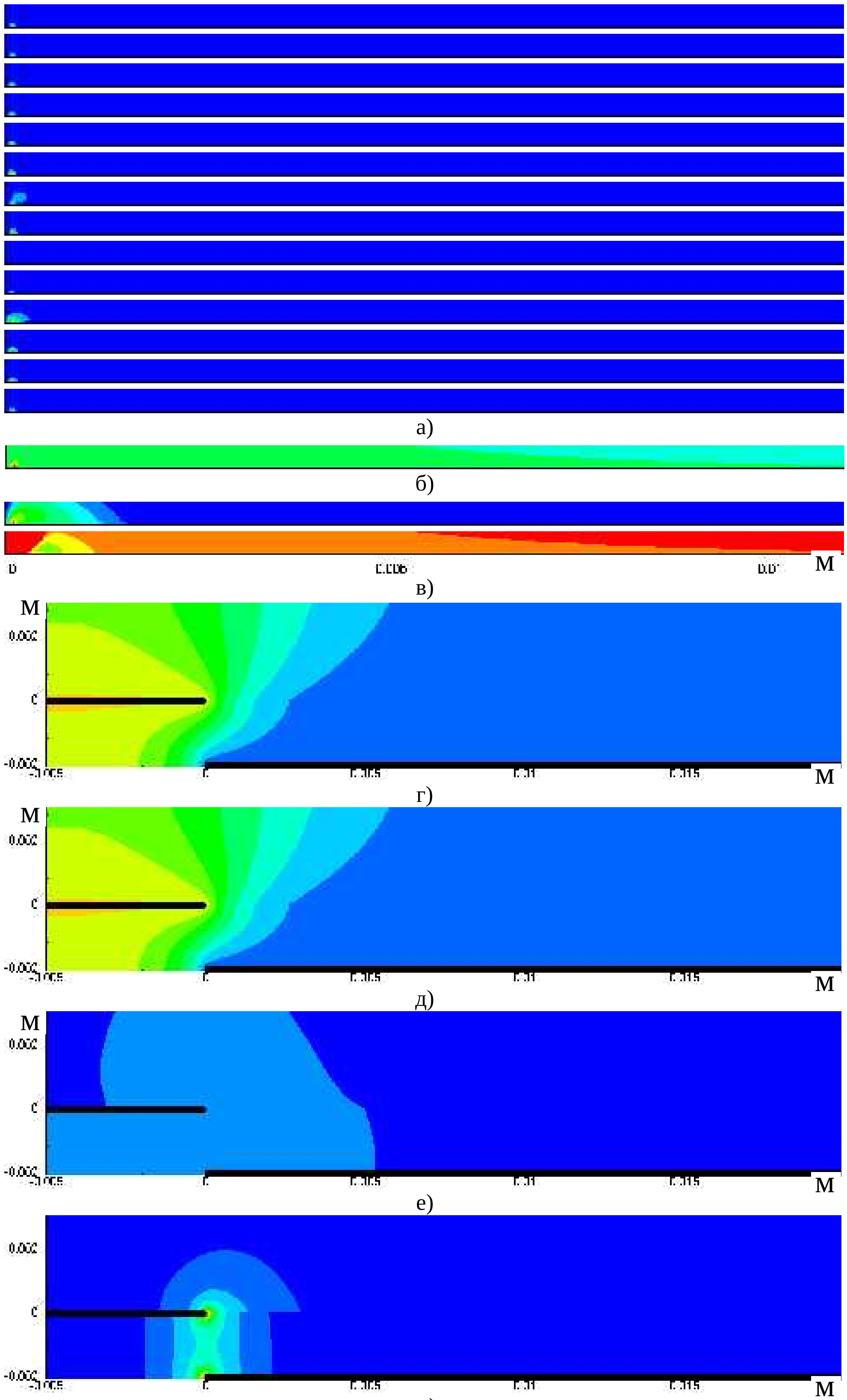


Рис. 1

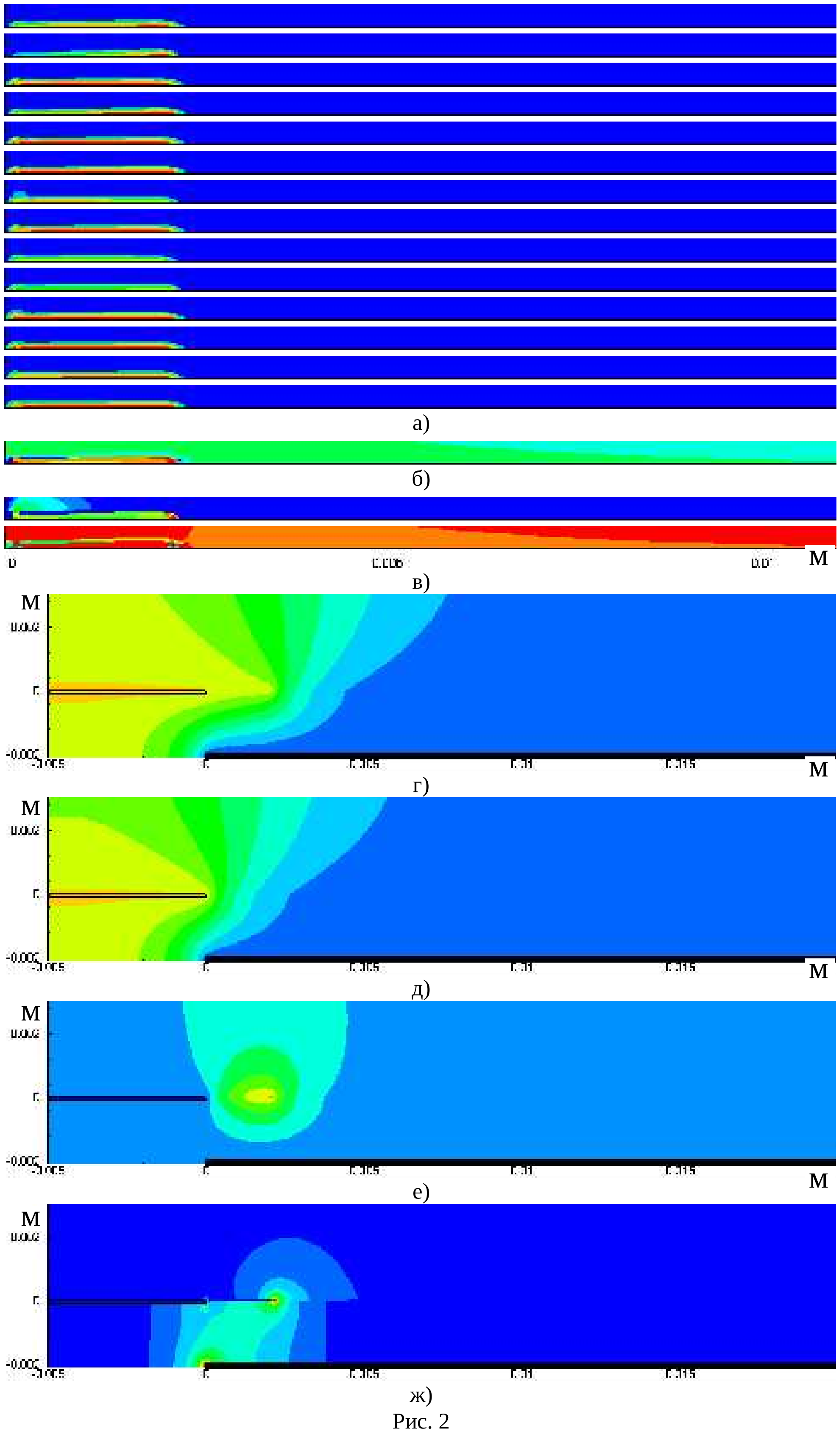
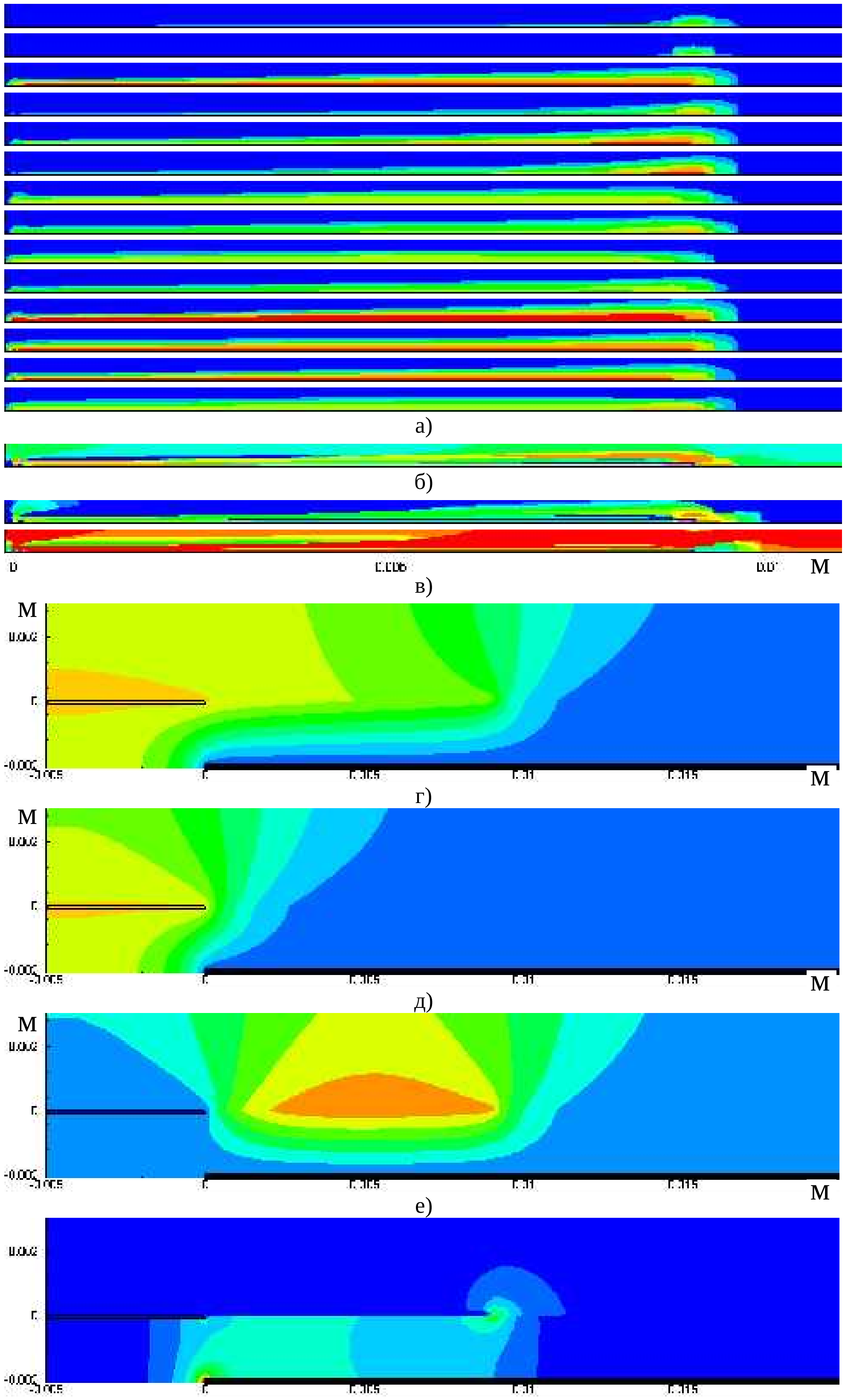


Рис. 2



а) б) в) г) д) е) ж)

Рис. 3

Таблица 2

$n,\frac{1}{м^3}$	$\circ,\frac{Кл}{м^3}$	$f_x,\frac{Н}{м^3}$	$f_y,\frac{Н}{м^3}$	$\frac{\ddot{}}{\ddot{}\ max},\frac{\ddot{}\ el}{\ddot{}\ max}$	$\frac{\ddot{}\ \circ,\pm}{\ddot{}\ max}$	$\lvert E\rvert,\frac{В}{м}$
1e+21	1	1e+7	0	0,9	0,6	1e+7
1e+20	0,05	1e+6	-1e+1	0,8	0,5	9e+6
1e+19	0,01	1e+5	-1e+2	0,7	0,4	8e+6
1e+18	0,005	1e+4	-1e+3	0,6	0,3	7e+6
1e+17	0	1e+3	-1e+4	0,5	0,2	6e+6
1e+16	-0,005	1e+2	-1e+5	0,4	0,1	5e+6
	-0,01	1e+1	-1e+6	0,3	0	4e+6
		0	-1e+7	0,2		3e+6
				0,1		2e+6
				0		1e+6

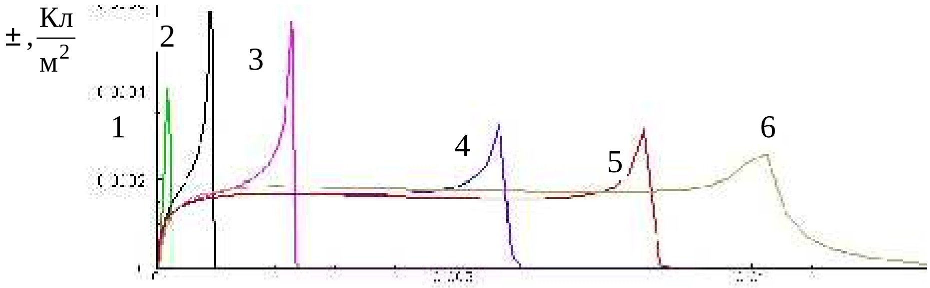


Рис. 4

L, м

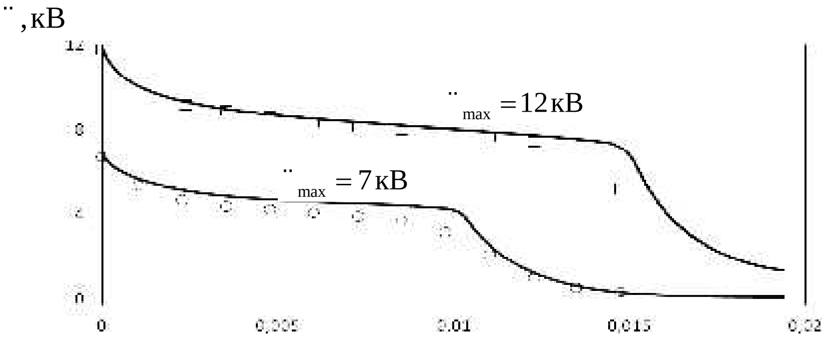


Рис. 5

L, м

При развитии стримера поверхность диэлектрика заряжается, поскольку образующийся объемный заряд при движении в электрическом поле встречает препятствие в виде поверхности диэлектрика и оседает на ней. Адсорбированный заряд искажает поле разрядного промежутка, в результате чего напряженность электрического поля в воздухе вблизи электродов ослабевает (рис. 3 ж), что приводит к затуханию разряда. Положительный заряд на поверхности диэлектрика обеспечивают в основном ионы азота N_4^+ и кислорода O_4^+. Распределение поверхностного заряда на диэлектрике (рис. 4) приведено для различных моментов времени (1 – $2{,}500772\cdot10^{-5}$ с, 2 – $2{,}500850\cdot10^{-5}$ с, 3 – $2{,}501045\cdot10^{-5}$ с, 4 – $2{,}502314\cdot10^{-5}$ с, 5 – $2{,}504733\cdot10^{-5}$ с, 6 – $5{,}0\cdot10^{-5}$ с).

На третьей стадии основную роль играют процессы диффузии и дрейфа заряженных частиц к диэлектрической поверхности и открытому электроду. Длительность последней стадии микроразряда порядка $2{,}495\cdot10^{-5}$ с.

Получено распределение электрического потенциала по поверхности диэлектрика при максимальном приложенном к электродам напряжении 7 и 12 кВ (рис. 5). Сплошной линией (▬) обозначены результаты настоящей работы, а экспериментальные данные ○ – [8], □ – [9]. Резкое падение напряжения на диэлектрике обусловлено длиной распространения стримера, как следствие, падением плотности поверхностного заряда. Так, при максимальных значениях приложенного напряжения 7 и 12 кВ длина распространения стримера составляет $L = 0,01$ м и $L = 0,015$ м соответственно. Результаты численного моделирования показывают удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

Выводы

1. Сформулирована новая математическая модель диэлектрического барьерного разряда в воздухе, включающая нестационарные электродинамические процессы, кинетические явления и плазмохимические реакции.

2. Предложена новая взаимносогласованная система исходных уравнений для электрического потенциала и 14 уравнений динамики заряженных частиц плазмы, записанная в произвольной криволинейной системе координат и использующая различный масштаб псевдовремени в отдельных уравнениях.

3. Разработана модификация уравнения Пуассона для электрического потенциала для непосредственного выделения дифференциальных операторов по ¨ с использованием противопоточной аппроксимации плотности заряженных частиц во вторых производных.

4. Реализован единый неявный численный алгоритм для эффективного решения неоднородной системы исходных уравнений.

5. Проведены тестовые расчеты зарождения и развития потока плазмы вблизи плоской пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Украины для одаренной молодежи (Распоряжение № 349/2013-рп).

1. 1. Application of weakly ionized plasmas as wing flow control devices / *T. Corke, E. Jumper, M. Post, D. Orlov* // AIAA Paper. – 2002. – № 350. – P. 9.
2. Plasma structure in the aerodynamic plasma actuator / *C. Enloe, T. McLaughlin, R. VanDyken, J. Fischer* // AIAA Paper. – 2004. – № 844. – P. 8.
3. Scaling laws for oxygen discharge plasmas */ E. A. Bogdanov, V. I. Kolobov, A. A. Kudryavtsev, L. D. Tsendin* // Technical Physics. – 2002. – Vol. 47, № 8. – P. 946 – 954.
4. Optimization of a dielectric barrier discharge actuator by stationary and non-stationary measurements of the induced flow velocity – application to airflow control */ M. Forte, J. Jolibois, E. Moreau, G. Touchard* // AIAA Paper. – 2006. – № 2863. – P. 9.
5. *Kossyi A.* Kinetic scheme of the non-equilibrium discharge in nitrogen-oxygen mixtures / A. *Kossyi, A. Kostinsky, A. Matveyev* // Plasma Sources Science and Technology. – 1992. – Vol. 1, № 3. – P. 207 – 220.
6. BOLSIG+: Electron Boltzmann equation solver [Электронный ресурс] / Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE), Universite Paul Sabatier. – Toulouse : France, 2013. – Режим доступа : WWW.URL: http://www.bolsig.laplace.univ-tlse.fr/copyright.php. – 10.02.2013.
7. *Ландау Л. Д.* Теория поля / *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. – М. : Наука, 1988. – 512 с.
8. Surface potential and electric field structure in the aerodynamic plasma actuator / *C. Enloe, T. McLaughlin, J. Gregory, R. Medina, W. Miller* // AIAA Paper. – 2008. – № 1103. – P. 11.
9. Effects of oxygen content on the behavior of the dielectric barrier discharge aerodynamic plasma actuator / *G. Font, C. Enloe, J. Newcomb, A. Teague, A. Vasso* // AIAA Paper. – 2010. – № 545. – P. 16.
10. *Abe T.* Momentum coupling and flow induction in a DBD plasma actuator / *T. Abe, M. Takagaki* // AIAA Paper. – 2009. – № 1622. – 8 p.
11. Rate of plasma thermalization of pulsed nanosecond surface dielectric barrier discharge / *M. Nudnova, S. Kindusheva, N. Aleksahdrov, A. Starikovskiy* // AIAA Paper. – 2010. – № 465. – P. 15.

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины,
Днепропетровск

Получено 10.11.14
в окончательном варианте 25.11.14