УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2021.04.104

К. В. АВРАМОВ[2,3], Б. В. УСПЕНСЬКИЙ[1], І. І. ДЕРЕВЯНКО[3,1]

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ САНДВІЧ-ПЛАСТИНИ ЗІ СТІЛЬНИКОВИМ НАПОВНЮВАЧЕМ, СТВОРЕНИМ МЕТОДОМ 3D-ДРУКУ

[1] *Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного*
Національної академії наук України,
вул. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail:admi@ipmach.kharkov.ua
[2] *Національний технічний університет «ХПІ»*
Міністерство освіти і науки України,
вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна; e-mail:omsroot@kpi.kharkov.ua
[3]*Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»*
вул. Криворізька, 3, 49008, Дніпро, Україна; e-mail: info@yuzhnoye.com

Розглянуто тришарову сандвіч-пластину зі стільниковим заповнювачем, який надруковано за допомогою FDM-технології з полікарбонату. Верхню та нижню поверхні пластини створено з вуглепластику. Для дослідження відгуку сандвіч-пластини стільниковий заповнювач замінюється однорідним шаром з відповідними механічними властивостями. Для верифікації моделі заповнювача використано скінченноелементне моделювання репрезентативного об’єму заповнювача за допомогою програмного комплексу ANSYS. При описі динаміки конструкції застосовано модифікацію зсувної теорії високого порядку. Для моделювання нелінійних вимушених коливань пластини використано метод заданих форм. Методом Релея–Рітца обчислюються власні частоти та форми коливань пластини, за якими розкладаються переміщення її точок у нелінійних коливаннях. Частотний відгук системи розраховано методом продовження розв’язку двоточкової крайової задачі для нелінійних звичайних диференційних рівнянь та методом мультиплікаторів Флоке, що дозволяє визначити стійкість та біфуркації періодичних розв’язків. Для аналізу резонансної поведінки системи отримується її частотний відгук.

Запропоновану методику застосовано для аналізу вимушених коливань квадратної тришарової пластини, защемленої за контуром. Результати аналізу вільних коливань пластини порівняно зі скінченноелементним моделюванням за допомогою ANSYS та проведено аналіз збіжності результатів при підвищенні кількості базисних функцій. Порівняння свідчить про високу збіжність результатів. Аналіз вимушених коливань показує, що пластина здійснює суттєво нелінійні коливання, амплітудно-частотна характеристика яких має дві сідло-вузлові біфуркації, в яких змінюється стійкість періодичного руху системи. Нелінійні коливання пластини поблизу першого основного резонансу є моногармонійними. Для їх розрахунку може використовуватися метод гармонічного балансу.

Ключові слова: *сандвіч-пластина, стільниковий наповнювач, гомогенізований простір, частотний відгук.*

A three-layer sandwich plate with a FDM-printed honeycomb core made of polycarbonate is considered. The upper and lower faces of the sandwich are made of a carbon fiber-reinforced composite. To study the response of the sandwich plate, the honeycomb core is replaced with a homogeneous layer with appropriate mechanical properties. To verify the honeycomb core model, a finite-element simulation of the representative volume of the core was performed using the ANSYS software package. A modification of the high-order shear theory is used to describe the structure dynamics. The assumed-mode method is used to simulate nonlinear forced oscillations of the plate. The Rayleigh–Ritz method is used to calculate the eigenfrequencies and eigenmodes of the plate, in which the displacement of the plate points during nonlinear oscillations are expanded. This technique allows one to obtain a finite-degree-of-freedom nonlinear dynamic system, which describes the oscillations of the plate. The frequency response of the system is calculated using the continuation approach applied to a two-point boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations and the Floquet multiplier method, which allows one to determine the stability and bifurcations of periodic solutions. The resonance behavior of the system is analyzed using its frequency response.

The proposed technique is used to analyze the forced oscillations of a square three-layer plate clamped along the contour. The results of the analysis of the free oscillations of the plate are compared with those of ANSYS finite-element simulation, and the convergence of the results with increasing number of basis functions is analyzed. The comparison shows that the results are in close agreement. The analysis of the forced oscillations shows that the plate executes essentially nonlinear oscillations with two saddle-node bifurcations in the frequency response curve, in which the periodic motion stability of the system changes. The nonlinear oscillations of the plate near the first fundamental resonance are mostly monoharmonic. They may be calculated using the describing function method.

Keywords*: sandwich plate, honeycomb core, homogenization, nonlinear dynamic system, frequency response.*

Конструкції з сандвіч-панелей використовуються в аерокосмічній техніці більше 70 років, оскільки вони дають можливість досягти високої жорсткості на згин при невеликій масі. Їх можливо з великим успіхом використати при проєктуванні літаків та ракет. Вивчення таких конструкцій проводилось досить щільно. Диференціальні рівняння в частинних похідних вільних коливань конічної сандвіч-оболонки отримано за допомогою варіаційного принципу в [1]. Для аналізу вільних коливань застосовано метод Галеркіна. Композитні сандвіч-конструкції досліджені чисельно з використанням теорії пластин Міндліна в роботах [2, 3]. Теорія високих порядків, яка базується на варіаційному принципі, запропонована для сандвіч-балки з гнучким сердечником у [4]. Запропоновано балкову теорію для обшивок та двовимірну теорію пружності для заповнювача. Аналіз вільних коливань сандвіч-панелей з гнучким заповнювачем розглядається в [5, 6]. Класична теорія тонких пластин застосовується для лицьових панелей, а тривимірна теорія пружності – для заповнювача. У [7] стільниковий заповнювач моделюється товстим шаром ортотропного матеріалу. Порівняльне дослідження, яке проведено на алюмінієвій стільниковій панелі, вказує на те, що класична теорія не дозволяє описати згинальні коливання стільникової панелі. Для дослідження динаміки сандвіч-плити з в'язкопружним стільниковим заповнювачем пропонується використовувати теорію вищих порядків у роботі [8]. Виправлену формулу Гібсона застосовано для визначення механічних властивостей заповнювача в [9]. Теорія вищих порядків в поєднанні з нелінійною моделлю Кармана пропонується для аналізу згинів сандвіч-плити з ортотропним середнім шаром у [10]. Отримано диференціальні рівняння в частинних похідних для опису руху конструкції. У роботі [11] запропоновано розширену теорію високого порядку для аналізу вільних коливань сандвіч-пластини зі стисливим заповнювачем. У [12] застосовано теорію Флюгге для аналізу циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем. Деякі фундаментальні питання теорій оболонок і діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів розглядаються в роботах [13–15].

В цій статті досліджено лінійні та нелінійні коливання сандвіч-плити зі стільниковим заповнювачем, який створено із застосуванням FDM-технології 3D-друку. Верхня та нижня поверхні сандвіча виготовлені з композиту, армованого вуглецевим волокном. Стільниковий заповнювач замінено однорідним ортотропним шаром, параметри якого знайдено за допомогою скінченно-елементного моделювання стільникового шару. Досліджено геометрично нелінійні вимушені коливання сандвіч-пластини. Для опису коливань конструкції використано модифіковану теорію високого порядку. Для отримання нелінійної динамічної системи зі скінченною кількістю ступенів свободи використано метод заданих форм з використанням параметрів сандвіч-пластини. Частотний відгук нелінійної системи визначається розв'язком двоточкової крайової задачі для звичайних диференційних рівнянь.

Постановка задачі та основні співвідношення. Розглянуто вимушені коливання тришарової пластини (рис. 1). Серединний шар пластини є шестикутним стільниковим заповнювачем, який вироблено за допомогою адитивної FDM-технології з полікарбонату. Геометрію надрукованого наповнювача наведено на рис. 2. Вона характеризується параметрами l_1, l_2, h_c, θ, де h_c – товщина стінки наповнювача.

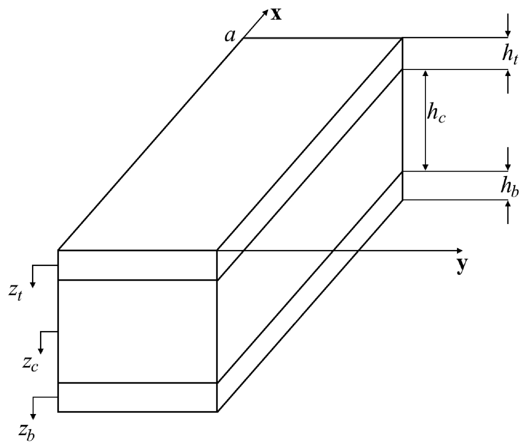
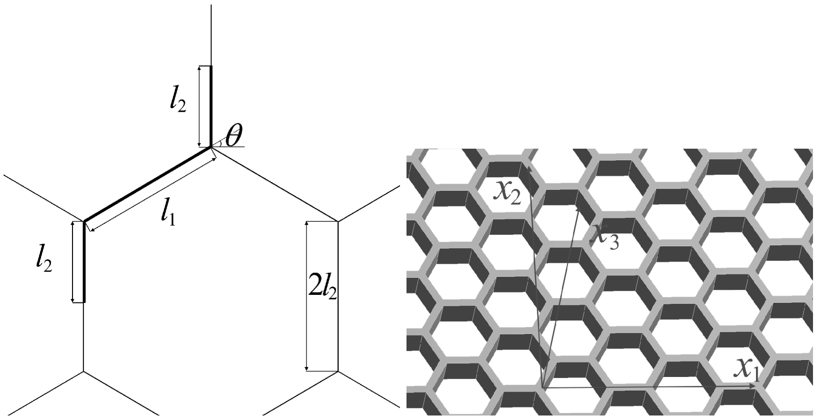


Рис. 1 – Ескіз тришарової пластини



а) б)

Рис. 2 – Ескіз стільникового заповнювача: а) – ескіз ланки; б) – загальний вигляд

В результаті процедури гомогенізації стільникового заповнювача [16, 17] співвідношення зводяться до еквівалентного однорідного середовища, закон Гука для якого має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{yy}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{yz}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \\ \sigma_{xy}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{yy}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де $\sigma_{xx}^{(c)}$, $\sigma_{yy}^{(c)}$, $\sigma_{zz}^{(c)}$, $\sigma_{yz}^{(c)}$, $\sigma_{xz}^{(c)}$, $\sigma_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору напружень серединного шару; $\varepsilon_{xx}^{(c)}$, $\varepsilon_{yy}^{(c)}$, $\varepsilon_{zz}^{(c)}$, $\varepsilon_{yz}^{(c)}$, $\varepsilon_{xz}^{(c)}$, $\varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору деформацій сердечника. Елементи матриці жорсткості C_{11}, C_{12},… отримано шляхом скінченно-елементного розрахунку в комерційному програмному пакеті ANSYS та процедури гомогенізації. Зв'язок елементів матриці жорсткості з інженерними константами наведено в [18].

Зверху та знизу до стільникового заповнювача прикріплено дві композитні ортотропні пластини з вуглепластика, що створює тришарову пластину (сандвіч). Композитні пластини мають однакові пружні характеристики, які описуються законом Гука для ортотропного матеріалу таким чином:

$$\begin{bmatrix} \pm^{(j)}_{xx} \\ \pm^{(j)}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} £^{(j)}_{xx} \\ £^{(j)}_{yy} \end{bmatrix};$$

$$\sigma^{(j)}_{xy} = 2\overline{C}_{33}\varepsilon^{(j)}_{xy};$$

$$\sigma^{(j)}_{xz} = 2\overline{C}_{44}\varepsilon^{(j)}_{xz};$$

$$\sigma^{(j)}_{yz} = 2\overline{C}_{55}\varepsilon^{(j)}_{yz};\ j = b,t, \tag{2}$$

де $\sigma^{(j)}_{xx}$, $\sigma^{(j)}_{yy}$, $\sigma^{(j)}_{yz}$, $\sigma^{(j)}_{xz}$, $\sigma^{(j)}_{xy}$ – елементи тензору напружень композитної пластинки; $\varepsilon^{(j)}_{xx}$, $\varepsilon^{(j)}_{yy}$, $\varepsilon^{(j)}_{yz}$, $\varepsilon^{(j)}_{xz}$, $\varepsilon^{(j)}_{xy}$ – елементи тензору деформацій композитної пластинки; $j=t,b$ відповідає верхньому та нижньому шару.

Напружений стан композитної конструкції описується проєкціями переміщень на координатні осі трьох пов'язаних між собою шарів. Проєкції переміщень верхнього та нижнього шарів позначимо $u_t(x,y,z_t)$, $v_t(x,y,z_t)$, $w_t(x,y,z_t)$ та $u_b(x,y,z_b)$, $v_b(x,y,z_b)$, $w_b(x,y,z_b)$ відповідно. Проєкції переміщень середнього шару на координатні осі (x,y,z_c) позначимо $u_c(x,y,z_c)$, $v_c(x,y,z_c)$, $w_c(x,y,z_c)$. Проєкції переміщень верхнього та нижнього шарів розкладемо за поперечною координатою таким чином [19]:

$$u_i = u_{0i}(x,y) + z_i \mathrm{f}^{(u)}_i(x,y) + z_i^2 \hat{u}_{2i}(x,y);$$

$$v_i = v_{0i}(x,y) + z_i \mathrm{f}^{(v)}_i(x,y) + z_i^2 \hat{v}_{2i}(x,y); \tag{3}$$

$$w_i = w_{0i}(x,y);\ i = t,b,$$

де $u_{0i}(x,y)$, $v_{0i}(x,y)$, $w_{0i}(x,y)$ – проєкції переміщень серединної площини відповідного шару композиту; $\ddot{}^{(u)}_i(x,y)$, $\ddot{}^{(v)}_i(x,y)$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні відповідного шару; z_t, z_b – локальні координатні осі, які наведено на рис. 1. Функції $\hat{u}_{2i}(x,y)$, $\hat{v}_{2i}(x,y)$ визначаються з граничних умов, які розглянуто нижче.

Проєкції переміщень серединного шару визначаються таким чином:

$$u_c = u_{0c}(x,y) + z_c \mathrm{f}^{(u)}_c(x,y) + z_c^2 \hat{u}_{2c}(x,y) + z_c^3 \hat{u}_{3c}(x,y);$$

$$v_c = v_{0c}(x,y) + z_c \mathrm{f}^{(v)}_c(x,y) + z_c^2 \hat{v}_{2c}(x,y) + z_c^3 \hat{v}_{3c}(x,y); \tag{4}$$

$$w_c = w_{0c}(x,y) + z_c \hat{w}_{1c}(x,y) + +z_c^2 \hat{w}_{2c}(x,y),$$

де $u_{0c}(x,y)$, $v_{0c}(x,y)$, $w_{0c}(x,y)$ – проєкції переміщень серединної поверхні сердечника; $\ddot{}^{(u)}_c(x,y)$, $\ddot{}^{(v)}_c(x,y)$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні сердечника. Функції $\hat{u}_{2c}(x,y)$, $\hat{u}_{3c}(x,y)$, $\hat{v}_{2c}(x,y)$, $\hat{v}_{3c}(x,y)$, $\hat{w}_{1c}(x,y)$, $\hat{w}_{2c}(x,y)$ визначаються з умов безперервності переміщень, які розглянуто далі. Таким чином, напружено-деформований стан сандвіч-пластини описується п'ятнадцятьма функціями $u_{0i}(x,y)$, $v_{0i}(x,y)$, $w_{0i}(x,y)$, $\ddot{\ }_{i}^{(u)}(x,y)$, $\ddot{\ }_{i}^{(v)}(x,y)$, $u_{0c}(x,y)$, $v_{0c}(x,y)$, $w_{0c}(x,y)$, $\ddot{\ }_{c}^{(u)}(x,y)$, $\ddot{\ }_{c}^{(v)}(x,y)$; $i = b, t$, які повинні бути визначені.

Лінійна теорія пластини дозволяє коректно аналізувати коливання, амплітуда яких порядку 1/10 її товщини. Якщо амплітуди коливань є порівняними до товщини пластини, для їхнього аналізу необхідно використовувати геометрично нелінійну теорію.

Граничні умови на верхній поверхні композитної пластини мають вигляд [20, 21]:

$$\pm_{yz}\Big|_{z_t=0{,}5h_t} = \pm_{xz}\Big|_{z_t=0{,}5h_t} = 0, \tag{5}$$

де h_t – товщина верхнього шару. Граничні умови на нижній поверхні пластини є такими:

$$\pm_{yz}\Big|_{z_t=-0{,}5h_b} = \pm_{xz}\Big|_{z_t=-0{,}5h_b} = 0, \tag{6}$$

де h_b – товщина нижнього шару. Умови безперервності переміщень між шарами мають вигляд:

$$\begin{aligned}
u_t\left(z_t=-0{,}5h_t\right) &= u_c\left(z_c=0{,}5h_c\right);\\
v_t\left(z_t=-0{,}5h_t\right) &= v_c\left(z_c=0{,}5h_c\right);\\
w_t\left(z_t=-0{,}5h_t\right) &= w_c\left(z_c=0{,}5h_c\right);\\
u_b\left(z_b=0{,}5h_t\right) &= u_c\left(z_c=-0{,}5h_c\right);\\
v_b\left(z_b=0{,}5h_b\right) &= v_c\left(z_c=-0{,}5h_c\right);\\
w_b\left(z_b=0{,}5h_b\right) &= w_c\left(z_c=-0{,}5h_c\right);
\end{aligned} \tag{7}$$

де h_c – товщина сердечника.

Підстановка (3,4) в граничні умови (5, 6) та умови (7) дозволяє отримати систему 10 лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується відносно змінних $\hat{u}_{2t}(x,y)$, $\hat{v}_{2t}(x,y)$, $\hat{u}_{2b}(x,y)$, $\hat{v}_{2b}(x,y)$, $\hat{u}_{2c}(x,y)$, $\hat{u}_{3c}(x,y)$, $\hat{v}_{2c}(x,y)$, $\hat{v}_{3c}(x,y)$, $\hat{w}_{1c}(x,y)$, $\hat{w}_{2c}(x,y)$.

В умовах геометрично нелінійного деформування сандвіч-пластини зв'язок між деформаціями та переміщеннями має такий вигляд [22, 23]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(j)} &= \frac{\partial u_j}{\partial x} + 0.5\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right)^2\right];\\
\varepsilon_{yy}^{(j)} &= \frac{\partial v_j}{\partial y} + 0.5\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)^2\right];\\
\varepsilon_{xy}^{(j)} &= \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial y};\\
\varepsilon_{xz}^{(j)} &= \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial z};\\
\varepsilon_{yz}^{(j)} &= \frac{\partial v_j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial u_j}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\frac{\partial v_j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial y}\frac{\partial w_j}{\partial z};\\
& j = t,b,c.
\end{aligned} \tag{8}$$

Використання розкладень (3,4) у (8) дозволяє отримати такі вирази:

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \varepsilon_{xx,0}^{(j)} + z_j k_{xx,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xx,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xx,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{yy}^{(j)} = \varepsilon_{yy,0}^{(j)} + z_j k_{yy,0}^{(j)} + z_j^2 k_{yy,1}^{(j)} + z_j^3 k_{yy,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{xy}^{(j)} = \varepsilon_{xy,0}^{(j)} + z_j k_{xy,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xy,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xy,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{xz}^{(j)} = \varepsilon_{xz,0}^{(j)} + z_j k_{xz,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xz,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xz,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{yz}^{(j)} = \varepsilon_{yz,0}^{(j)} + z_j k_{yz,0}^{(j)} + z_j^2 k_{yz,1}^{(j)} + z_j^3 k_{yz,2}^{(j)}; \qquad (9)$$
$$j = t,b,c.$$

Параметри розкладень (9) є квадратичними диференційними операторами відносно функцій, які розшукуються.

Поперечна деформація сердечника $\varepsilon_{zz}^{(c)}$ є такою:

$$\varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{zz,0}^{(c)} + z_c k_{zz,0}^{(c)};$$
$$\varepsilon_{zz,0}^{(c)} = \frac{w_{0b} - w_{0t}}{h_c};$$
$$k_{zz,0}^{(c)} = \frac{4}{h_c^2}\left(w_{0t} + w_{0b} - 2w_{0c}\right).$$

Потенційна енергія деформування верхнього та нижнього шарів з урахуванням закону Гука (2) може бути представлена таким чином:

$$U_i = 0{,}5\int_0^a\int_0^b\int_{-0{,}5h_i}^{0{,}5h_i}\Big[\overline{C}_{11}\varepsilon_{xx}^{(i)2} + \overline{C}_{22}\varepsilon_{yy}^{(i)2} + 2\overline{C}_{12}\varepsilon_{xx}^{(i)}\varepsilon_{yy}^{(i)} + 2\overline{C}_{55}\varepsilon_{yz}^{(i)2} + 2\overline{C}_{44}\varepsilon_{xz}^{(i)2} + \qquad (10)$$
$$+ 2\overline{C}_{33}\varepsilon_{xy}^{(i)2}\Big]dz_i dxdy, i = b,t.$$

де a,b – розміри пластини, які наведено на рис. 1. Потенційна енергія деформування середнього шару з урахуванням закону Гука (1) має такий вигляд:

$$U_c = 0{,}5\int_0^a\int_0^b\int_{-0{,}5h_c}^{0{,}5h_c}\Big[C_{11}\varepsilon_{xx}^{(c)2} + 2C_{12}\varepsilon_{xx}^{(c)}\varepsilon_{yy}^{(c)} + C_{22}\varepsilon_{yy}^{(c)2} + 2C_{23}\varepsilon_{zz}^{(c)}\varepsilon_{yy}^{(c)} + 2C_{13}\varepsilon_{zz}^{(c)}\varepsilon_{xx}^{(c)} + \qquad (11)$$
$$+ C_{33}\varepsilon_{zz}^{(c)2} + 2C_{44}\varepsilon_{yz}^{(c)2} + 2C_{55}\varepsilon_{xz}^{(c)2} + 2C_{66}\varepsilon_{xy}^{(c)2}\Big]dz_c dxdy.$$

Урахування розкладення (9) та інтегрування виразів для потенційної енергії (10), (11) дозволяє звести вирази для потенційних енергій шарів до форми:

$$U_i = 0{,}5\int_0^a\int_0^b\left(U_i^{(0)} + U_i^{(2)} + U_i^{(4)}\right)dxdy, i = t,c,b. \qquad (12)$$

Параметри $U_i^{(0)}, U_i^{(2)}, U_i^{(4)}; i = t,b$ є квадратичними формами відносно коефіцієнтів розкладень (9).

Кінетична енергія шарів композитної пластини має вигляд:

$$T_j = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-0,5h_j}^{0,5h_j}\rho_j\left(\dot{u}_j^2+\dot{v}_j^2+\dot{w}_j^2\right)dz_j dxdy, j=t,c,b, \qquad (13)$$

де ρ_j – густина відповідного шару. Використавши розкладення (3), з виразу (13) можна отримати:

$$T_i = 0,5\int_0^a\int_0^b\Big[r_0^{(i)}\left(\dot{u}_{0i}^2+\dot{v}_{0i}^2+\dot{w}_{0i}^2\right)+r_2^{(i)}\left(\dot{\varphi}_i^{(u)2}+2\dot{u}_{0i}\dot{u}_{2i}+\dot{\varphi}_i^{(v)2}+2\dot{v}_{0i}\dot{v}_{2i}\right)+ + r_4^{(i)}\left(\dot{u}_{2i}^2+\dot{v}_{2i}^2\right)\Big]dxdy, i=t,b \qquad (14)$$

де $r_j^{(i)} = \int_{-0,5h_i}^{0,5h_i}\rho_i z_i^j dz_i; i=t,c,b; j=0,1,\ldots$

Аналогічне використання розкладення (4) дозволяє отримати кінетичну енергію середнього шару в формі:

$$T_c = 0,5\int_0^a\int_0^b\Big[r_0^{(c)}\left(\dot{u}_{0c}^2+\dot{v}_{0c}^2+\dot{w}_{0c}^2\right)+r_2^{(c)}\left(\dot{\varphi}_c^{(u)2}+2\dot{u}_{0c}\dot{u}_{2c}+\dot{\varphi}_c^{(v)2}+2\dot{v}_{0c}\dot{v}_{2c}+ +\dot{w}_{1c}^2+2\dot{w}_{0c}\dot{w}_{2c}\right)+r_4^{(c)}\left(\dot{u}_{2c}^2+\dot{v}_{2c}^2+2\dot{\varphi}_c^{(v)}\dot{v}_{3c}+\dot{w}_{2c}^2\right)\Big]dxdy. \qquad (15)$$

Кінетична та потенційна енергії тришарової пластини представляються у вигляді:

$$T_p = T_t + T_b + T_c; \qquad (16)$$

$$U_p = U_t + U_b + U_c. \qquad (17)$$

Геометричні граничні умови для защемленої пластини мають вигляд [13]:

$$u_{0i}\big|_{x=0} = v_{0i}\big|_{x=0} = w_{0i}\big|_{x=0} = \varphi_i^{(u)}\big|_{x=0} = \varphi_i^{(v)}\big|_{x=0} = u_{0i}\big|_{x=a} = v_{0i}\big|_{x=a} = = w_{0i}\big|_{x=a} = \varphi_i^{(u)}\big|_{x=a} = \varphi_i^{(v)}\big|_{x=a} = 0; i=t,c,b;$$

$$u_{0i}\big|_{y=0} = v_{0i}\big|_{y=0} = w_{0i}\big|_{y=0} = \varphi_i^{(u)}\big|_{y=0} = \varphi_i^{(v)}\big|_{y=0} = u_{0i}\big|_{y=b} = v_{0i}\big|_{y=b} = = w_{0i}\big|_{y=b} = \varphi_i^{(u)}\big|_{y=b} = \varphi_i^{(v)}\big|_{y=b} = 0; i=t,c,b. \qquad (18)$$

Оскільки для визначення власних частот та форм коливань використано метод Релея–Рітца, достатньо обмежитися використанням лише геометричних граничних умов (18) [23, 24].

Лінійні коливання конструкції. Лінійні коливання пластини досліджуються методом Релея–Рітца. Проєкції переміщень та кути обертання нормалі до серединної площини розшукуються в формі:

$$\begin{bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \varphi_i^{(v)} \\ \varphi_i^{(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \Phi_i^{(v)} \\ \Phi_i^{(u)} \end{bmatrix} \cos(\omega t), i = t,c,b, \qquad (19)$$

де ω – частота власних коливань; $U_i(x,y)$, $V_i(x,y)$, $W_i(x,y)$, $\Phi_i^{(v)}(x,y)$, $\Phi_i^{(u)}(x,y)$ невідомі функції, які задовольняють геометричним граничним умовам. Ці функції представимо у вигляді:

$$U_i = \sum_{m=1}^{N_X^{(u)}} \sum_{n=1}^{N_Y^{(u)}} U_{m,n}^{(i)} F_{m,n}^{(u)}(x,y); \; V_i = \sum_{m=1}^{N_X^{(v)}} \sum_{n=1}^{N_Y^{(v)}} V_{m,n}^{(i)} F_{m,n}^{(v)}(x,y);$$

$$W_i = \sum_{m=1}^{N_X^{(w)}} \sum_{n=1}^{N_Y^{(w)}} W_{m,n}^{(i)} F_{m,n}^{(w)}(x,y); \; \Phi_i^{(u)} = \sum_{m=1}^{N_x^{(\varphi u)}} \sum_{n=1}^{N_Y^{(\varphi u)}} \Phi_{m,n,i}^{(u)} F_{m,n}^{(\varphi u)}(x,y);$$

$$\Phi_i^{(v)} = \sum_{m=1}^{N_x^{(\varphi v)}} \sum_{n=1}^{N_Y^{(\varphi v)}} \Phi_{m,n,i}^{(v)} F_{m,n}^{(\varphi v)}(x,y), i = t,c,b, \qquad (20)$$

де $F_{m,n}^{(u)}(x,y), F_{m,n}^{(v)}(x,y), F_{m,n}^{(w)}(x,y), F_{m,n}^{(\varphi u)}(x,y), F_{m,n}^{(\varphi v)}(x,y)$ – базисні функції; $U_{m,n}^{(i)}$, $V_{m,n}^{(i)}$, $W_{m,n}^{(i)}$, $\Phi_{m,n,i}^{(u)}$, $\Phi_{m,n,i}^{(v)}$ – невідомі коефіцієнти розкладень. Ці коефіцієнти об'єднаємо в вектор $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_N)$. З урахуванням розкладень (19), (20) механічні енергії (16), (17) приймають такий вигляд:

$$T_p = \omega^2 \sin^2(\omega t) \tilde{T}(A);$$
$$U_p = \cos^2(\omega t) \tilde{U}(A). \qquad (21)$$

Функції $\tilde{T}(A), \tilde{U}(A)$ отримано в результаті проведення подвійного інтегрування (15, 14, 12).

Вільні коливання конструкції відбуваються за умови мінімізації функціоналу дії відомим способом

$$\int_0^{2\pi/\omega} (U_p - T_p) dt \to min. \qquad (22)$$

Використання (21) в функціоналі (22) зводить задачу аналізу вільних коливань до такої задачі:

$$\frac{\pi}{\omega}\left[\tilde{U}(A) - \omega^2 \tilde{T}(A)\right] \to min. \qquad (23)$$

Розв'язок задачі (23) описується рівняннями $\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\tilde{U}(A) - \omega^2 \tilde{T}(A)\right] = 0; \; j = 1,2,\ldots$, які відповідають проблемі власних значень, що дозволяє отримати власні частоти та форми коливань конструкції.

Рівняння нелінійних коливань. Розглянемо вимушені коливання пластини під дією зосередженої сили $Fcos(\Omega t)$, яка застосовується перпендикулярно поверхні нижнього шару пластини в точці $(x,y)=0{,}5(a,b)$. Розглянемо вимушені коливання пластини зі спектром власних частот $\omega_1,\omega_2,\ldots$ у випадку, коли частота ω_1 є значно меншою за інші власні частоти, а частота збуджуючої сили Ω є близькою до ω_1.

Першу власну частоту та відповідну власну форму отримано завдяки розрахунку лінійних коливань з проблеми власних значень. Власну форму коливань композитної пластинки позначимо таким чином:

$$V_i^{(1)}(x,y); U_i^{(1)}(x,y); W_i^{(1)}(x,y); \Phi_{i,1}^{(u)}(x,y); \Phi_{i,1}^{(v)}(x,y); i=t,c,b.$$

Вимушені коливання пластини коло її першої власної частоти будемо шукати в формі:

$$\begin{aligned} w_{0i} &= q_i(t) W_i^{(1)}(x,y);\\ u_{0i} &= q_{i+3}(t) U_i^{(1)}(x,y);\\ v_{0i} &= q_{i+6}(t) V_i^{(1)}(x,y);\\ \Phi_i^{(u)}(x,y) &= q_{i+9}(t) \Phi_{i,1}^{(u)}(x,y);\\ \Phi_i^{(v)}(x,y) &= q_{i+12}(t) \Phi_{i,1}^{(v)}(x,y). \end{aligned} \qquad (24)$$

Індекс i при q приймає значення 1,2,3, а у інших функцій (24) він має значення t, c, b. Узагальнені координати конструкції $(q_1,\ldots,q_{15})$ позначимо вектором q**.** Використання розкладення (24) у механічних енергіях (16), (17) та проведення необхідного інтегрування дозволяє представити кінетичну енергію як квадратичну форму узагальнених швидкостей:

$$T_p = T_p(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{15}). \qquad (25)$$

Потенційна енергія при цьому представляється у вигляді:

$$U_p = P_2(q_1,\ldots,q_{15}) + P_3(q_1,\ldots,q_{15}) + P_4(q_1,\ldots,q_{15}), \qquad (26)$$

де $P_2(q_1,\ldots,q_{15})$ – квадратична форма узагальнених координат; $P_3(q_1,\ldots,q_{15})$ – сума кубічних поліномів відносно узагальнених координат; $P_4(q_1,\ldots,q_{15})$ – сума поліномів четвертого ступеня відносно узагальнених координат.

Введемо безрозмірні змінні та деякі параметри:

$$\tau=\omega_1 t; g_j=\frac{q_j}{h}; \Omega=\frac{\Omega}{\omega_1}; m_{ij}=\frac{m_{ij}}{M}; k_{ij}=\frac{k_{ij}}{M\omega_1^2}; f=\frac{W_t^{(1)}(0{,}5a;0{,}5b)F}{Mh\omega_1^2};$$

$$\beta_i=\frac{\beta_i}{M\omega_1}; \alpha_{vj}^{(i)}=\frac{h\alpha_{vj}^{(i)}}{M\omega_1^2}; \beta_{vjj_1}^{(i)}=\frac{\beta_{vjj_1}^{(i)}h^2}{M\omega_1^2}; M=\rho_c hab, \qquad (27)$$

де $h=h_t+h_c+h_b$ – загальна товщина пластини

Кінетичну та потенційну енергію (25), (26) використано для побудови рівнянь руху у формі рівнянь Лагранжа. Тоді рух конструкції описується такою системою звичайних диференціальних рівнянь відносно безрозмірних координат (27) у матричній формі:

$$\hat{M}\ddot{\vartheta} + \hat{K}\vartheta + \hat{B}\dot{\vartheta} = \hat{F}(\vartheta) + \hat{\hat{F}}(\vartheta) + R\cos(\Omega t), \qquad (28)$$

де $\hat{M}$ – матриця мас; $\hat{K}$ – матриця жорсткостей; $\hat{B}$ – діагональна матриця лінійного демпфування; $R = \{R_1, \ldots, R_{15}\}; R_1 = f; R_j = 0; j = 1, \ldots, 15$.

Для аналізу нелінійних періодичних коливань (28) використовується метод продовження розв'язку та метод мультиплікаторів Флоке [25–28], що дозволяє визначити стійкість та біфуркації періодичних розв'язків (28). Для аналізу резонансної поведінки системи отримується її частотний відгук.

Розрахунок пружних характеристик стільникового заповнювача. Стільниковий заповнювач моделюється за допомогою однорідної пластини [29, 30], механічні характеристики якої визначаються моделюванням напружено-деформованого стану стільникового заповнювача. Моделювання проводиться скінченно-елементним методом у комерційному програмному комплексі ANSYS за допомогою методики, яку запропоновано в [16]. Розглядається класичний стільниковий заповнювач (рис. 2), виготовлений з ортотропного полімеру полікарбонату. Він складається з правильних шостикутних ланок. Довжина його стінки складає 6,1054 мм, товщина стінки – 0,4 мм, висота стільникового шару дорівнює 1 см. Із заповнювачем зв'язано декартову систему координат x_1, x_2, x_3 (рис. 2, б), в якій обчислюються його гомогенізовані характеристики. Процедура гомогенізації дозволяє знайти характеристики однорідного ортотропного середовища, яке демонструє статичний та динамічний відгук, аналогічний до досліджуваного стільникового заповнювача.

Для визначення характеристик гомогенізованого матеріалу використовується серія скінченно-елементних розрахунків, в яких чверть ланки заповнювача, що є характерним об'ємом, піддається навантаженням в різних граничних умовах [16, 17]. Шість розрахунків дозволяють отримати матрицю жорсткості закону Гука (1) та визначити характеристики гомогенізованого матеріалу.

Розглянуто заповнювач, який надруковано за FDM-технологією таким чином, що його стінка має товщину в одну нитку. Ця нитка прокладена вздовж стінок осередків стільника. При числовому моделюванні напружено-деформованого стану ділянки стільника проводився аналіз збіжності результатів розрахунку за допомогою згущення скінченно-елементної сітки.

В результаті числових розрахунків отримано наступні інженерні константи однорідної пластини, яка моделює стільниковий шар:

$$E_{11} = 0{,}978 \text{ МПа}; \; E_{22} = 1{,}109 \text{ МПа}; \; E_{33} = 149{,}101 \text{ МПа};$$
$$\nu_{12} = 0{,}926; \; \nu_{23} = 0{,}003; \; \nu_{13} = 0{,}003; \; G_{12} = 0{,}868 \text{ МПа};$$
$$G_{23} = 25{,}559 \text{ МПа}; \; G_{13} = 35{,}777 \text{ МПа}; \; \rho_c = 253{,}189 \; \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \qquad (29)$$

Числовий аналіз лінійних коливань. Розглянемо власні частоти коливань квадратної тришарової сандвіч-пластини, защемленої по всьому контуру. Пружні характеристики та властивості її середнього шару описуються параметрами (29). Верхній та нижній шар виготовлено з вуглепластику IMS 65. Ці шари є однаковими та мають такі параметри:

$$E_x = 160 \text{ ГПа}; \; E_y = 6{,}8 \text{ ГПа}; \; \nu_{xy} = 0{,}32; \nu_{yx} = 0{,}0136;$$

$$G_{xy} = 800 \text{ ГПа}; \; G_{xz} = G_{yz} = 4 \text{ ГПа}; \; \rho_t = \rho_b = 1400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$
$$a = b = 0{,}3 \text{ м}; h_t = h_b = 1 \text{мм}, \qquad (30)$$

де E_x, E_y – модулі Юнга; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модулі зсуву; $\neg_{xy}, \neg_{yx}$ – коефіцієнти Пуасона.

Для аналізу власних частот та форм коливань застосовано метод Релея–Рітца. З розробленням програми в середовищі Maple, всі базисні функції розкладень (20) обираються в формі $\sin\left(\frac{m®x}{a}\right)\sin\left(\frac{n®y}{b}\right)$.

Результати аналізу збіжності власних частот коливань защемленої пластинки наведено в таблиці 1. В першому стовпчику наведено загальну кількість складових розкладення (20). У другому стовпчику наведено кількість складових у кожному з розкладень (20). В інших стовпчиках наведено перші п’ять власних частот коливань пластини в Гц. З таблиці можливо зробити висновок, що при збільшенні кількості складових розкладень (20) власні частоти повільно збігаються зверху до одного значення. Задля верифікації отриманих результатів в передостанньому рядку табл. 1 наведено результати розрахунку власних частот в програмному комплексі ANSYS. В останньому рядку таблиці наведено відносні різниці між частотами, які отримано в ANSYS, та за допомогою розробленої програми. Видно, що відносна похибка власних частот не перевищує 2,6 %. Таким чином, власні частоти, які отримано двома різними методами, є близькими. Аналогічні результати було отримано при застосуванні запропонованого методу до аналізу квадратної шарнірно-опертої та прямокутної защемленої пластинки.

Числовий аналіз нелінійних коливань. У цьому розділі розглянуто результати числового моделювання нелінійних коливань квадратної защемленої на всьому контурі пластинки. Параметри верхнього та нижнього шарів сандвіч-пластини були прийняті в вигляді (30). Механічні характеристики еквівалентного стільниковому заповнювачу однорідного шару відповідали (29). Інші параметри системи (28): $\hat{B}_{i,i} = 0{,}02; f = 0{,}1$.

Таблиця 1. Власні частоти коливань квадратної защемленої пластинки

		ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц
$N_* = 4335$	$N_X^{(u)} = N_Y^{(u)} = N_X^{(v)} =$ $= N_Y^{(v)} = N_X^{(w)} = N_Y^{(w)} = N_x^{(u)} =$ $= N_Y^{(u)} = N_x^{(v)} = N_Y^{(v)} = 17$	684,7	1030,6	1165,6	1406,2	1528,1
$N_* = 6000$	$N_X^{(u)} = N_Y^{(u)} = N_X^{(v)} =$ $= N_Y^{(v)} = N_X^{(w)} = N_Y^{(w)} = N_x^{(u)}$ $= N_Y^{(u)} = N_x^{(v)} = N_Y^{(v)} = 20$	678,5	1022,9	1158,8	1391,9	1519,4
$N_* = 9375$	$N_X^{(u)} = N_Y^{(u)} = N_X^{(v)} =$ $= N_Y^{(v)} = N_X^{(w)} = N_Y^{(w)} = N_x^{(u)} =$ $= N_Y^{(u)} = N_x^{(v)} = N_Y^{(v)} = 25$	674,0	1013,9	1149,7	1380,1	1504,3
	Скінченно-елементне моделювання	660,81	989,44	1131,5	1344,4	1471,7
	Відносна похибка, %	1,9	2,4	1,6	2,6	2,2

Результати розрахунку власних частот коливань такої пластинки наведено в табл. 1. Перша власна частота її коливань дорівнює 674 Гц. Поблизу цієї власної частоти спостерігаються резонансні вимушені коливання.

П'ятнадцять узагальнених координат нелінійних коливань конструкції визначаються співвідношеннями (24). Резонансні коливання при п'ятнадцяти степенях свободи, описуються співвідношеннями (28). Результати розрахунків нелінійних коливань для системи (28) на частотному відгуку [31, 32] при гармонійному аналізі рухів поблизу першого резонансу наведено на рис. 3, де наведено залежність першої гармоніки ряду Фур'є узагальненої координати g_1 від безрозмірної частоти зовнішньої сили Ω. Стійкі коливання наведено суцільною лінією, нестійкі – пунктирною. При цьому розраховано множники Флоке [33] (у точках Sn_1 та Sn_2 спостерігаються сідло-вузлові біфуркації [33], в яких виникає зміна стійкості періодичних рухів).

Нелінійні коливання на всьому частотному діапазоні, який наведено на рис. 3, є моногармонійними, частотний відгук є жорстким [33]. Коливання, які наведено на рис. 3, є суттєво нелінійними, оскільки відхилення резонансного частотного відгуку вправо є значним. Сандвіч-пластина є жорсткою конструкцією, оскільки при великих значеннях амплітуд зовнішнього впливу амплітуди резонансних нелінійних коливань є меншими за 1.

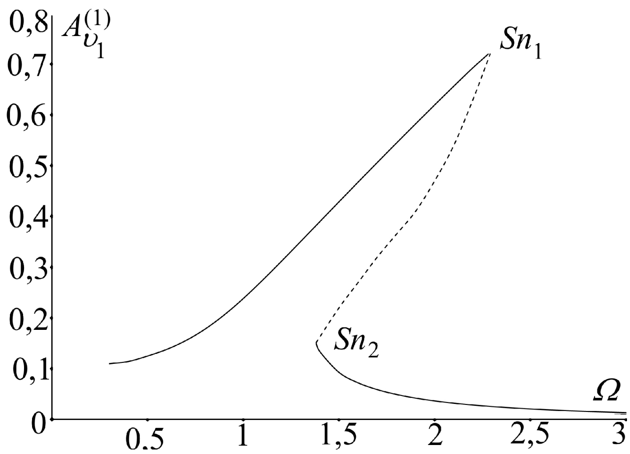


Рис. 3 – Частотний відгук сандвіч-пластини

Висновки. У статті запропоновано новий підхід до аналізу геометрично нелінійних вимушених коливань сандвіч-пластин зі стільниковим наповнювачем, який виготовлено за FDM-технологією. Для верхнього та нижнього шарів пластини використано композит з вуглепластиків. Для побудови моделі відгуку стільникового заповнювача використано методику гомогенізації за допомогою скінченно-елементного аналізу. Для моделювання напружено-деформованого стану пластинки використано модифіковану теорію, в якій переміщення залежать від третього степеня поперечної координати.

Аналіз лінійних коливань конструкції передує аналізу її нелінійних коливань. Для аналізу лінійних коливань використано метод Релея–Рітца. Рух конструкції представлено в формі подвійних рядів Фур'є. Досліджено збіжність результатів у порівнянні з результатами моделювання в комерційному програмному комплексі ANSYS.

Геометрично нелінійні вимушені коливання сандвіч-пластини поблизу від основного резонансу описуються динамічною системою з п'ятнадцятьма степенями свободи, для отримання якої використовуються форми власних коливань. При аналізі стійкості періодичних коливань та їхніх біфуркацій розраховані множники Флоке.

Частотний відгук поблизу основного резонансу містить дві сідло-вузлові біфуркації, в яких спостерігається зміна стійкості періодичних рухів (інших біфуркацій навколо першого основного резонансу не знайдено). Нелінійні коливання поблизу першого основного резонансу є моногармонійними.

Фінансування. Дослідження було фінансовано Національним фондом досліджень України (проєкт 128/02.2020).

1. *Wilkins D. J., Bert C. W., Egle D. M.* Free vibrations of orthotropic sandwich conical shells with various boundary conditions. Journal of Sound and Vibration. 1970. 13. V. P. 211–228. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)81175-0
2. *Kanematsu H. H., Hirano Y.* Bending and vibration of CFRP – faced rectangular sandwich plates. Composite Structures. 1988. V. 10. P. 145–163. https://doi.org/10.1016/0263-8223(88)90044-X
3. *Lee L. J., Fan Y. J.* Bending and vibration analysis of composite sandwich plates. Composite Structures. 1996. V. 60. P. 103–112. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00357-6
4. *Frostig Y., Baruch M., Vilnay O., Sheinman I.* High-oder theory for sandwich beam with transversely flexible core. ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1992. V. 118 (5). P. 1026–1043. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:5(1026)
5. *Frostig Y., Thomsen O. T.* High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. International Journal of Solids and Structures. 2004. V. 41. P. 1697–1724. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051
6. *Frostig Y., Thomsen O. T.* On the free vibration of sandwich panels with a transversely flexible and temperature-dependent core material – Part I: Mathematical formulation. Composites Science and Technology. 2009. V. 69. P. 856–862. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2008.03.003
7. *Yu S. D., Cleghorn W. L.* Free flexural vibration analysis of symmetric honeycomb panels. Journal of Sound and Vibration. 2005. V. 284. P. 189–204. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.028
8. *Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K.* Local and global damped vibrations of plates with a viscoelastic soft flexible core: An improved high-order approach. Journal of Sandwich Structures and Materials. 2005. V. 7. P. 431–456. https://doi.org/10.1177/1099636205053748
9. *Yongqiang L., Zhiqiang J.* Free flexural vibration analysis of symmetric rectangular honeycomb panels with SCSC edge supports. Composite Structures. 2008. V. 83. P. 154–158. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.004
10. *Kheirikhah M. M., Khalili S. M. R., Fard K. M.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. European Journal of Mechanics A/Solids. 2012. V. 31. P. 54–66. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.07.003
11. *Ramian A., Jafari-Talookolaei R.-A., Valvo P. S., Abedi M.* Free vibration analysis of sandwich plates with compressible core in contact with fluid. Thin–Walled Structures. 2020. V. 157. Paper No. 107088. alled Structures. 2020. V. 157. Paper no. 107088. https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107088
12. *Li Y., Yao W., Wang T.* Free flexural vibration of thin-walled honeycomb sandwich cylindrical shells. Thin–Walled Structures. 2020. V. 157. Paper No. 107032. https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107032
13. *Гудрамович В. С., Деменков А. Ф.* Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1991. 176 с.
14. *Гудрамович В. С., Скальський В. Р.,* Селіванов Ю. М. Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів / за ред. Назарчука З. Т. Львів: Простір-М, 2017. 492 с.
15. *Гудрамович В. С.* Міцність, надійність і ресурс конструкцій ракетно-космічної техніки і енергетики. Технічна механіка. 2021. № 2. С. 100–106. https://doi.org/10.15407/itm2021.02.100
16. *Catapano A., Montemurro M.* A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. Composite Structures. 2014. V. 118. P. 664–676. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057
17. *Grediac M.* A finite element study of the transverse hear in honeycomb cores. International Journal of Solids and Structures. 1993. V. 30, No 13, P. 1777–1788. https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90233-W
18. *Jones R. M.* Mechanics of composite materials. CRC Press. 1998. 538 p.
19. *Ramian A., Jafari-Talookolaei R.-A., Valvo P. S., Abedi M.* Free vibration analysis of sandwich plates with compressible core in contact with fluid. Thin–Walled Structures. 2020. 157. Paper No. 107088. https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107088
20. *Reddy J. N.* A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME Journal of Applied Mechanics. 1984. V. 51. P. 745–752. https://doi.org/10.1115/1.3167719
21. *Reddy J. N.* A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. International Journal of Solids and Structures. 1984. V. 20, No. 9/10. P. 881–896. https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8
22. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Москва: ОГИЗ. 1948. 211 с.
23. *Meirovitch L.* Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill, New York. 1998. 560 p.

24. *Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M.* Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. V. 49, № 12. P. 2839–2845. https://doi.org/10.1007/s11012-014-0027-6
25. *Parker T. S., Chua L. O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag. 1989. 348 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9
26. *Seydel R.* Tutorial on continuation. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. P. 3–11. https://doi.org/10.1142/S0218127491000026
27. *Seydel R.* Nonlinear computation. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. P. 2105–2126. https://doi.org/10.1142/S0218127497001564
28. *Avramov K., Raimberdiyev T.* Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 178. P. 22–38. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.006
29. *Hohe J., Becker W*. Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties. Applied Mechanics Reviewer. 2002. V. 5, No. 1. P. 61–87. https://doi.org/10.1115/1.1425394
30. *Burton W. S., Noor A. K.* Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1997. V. 145. P. 341–360. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01196-6
31. *Avramov K***.** Bifurcations of parametric oscillations of beams with three equilibrium. Acta Mechanica. 2003. V. 164. P. 115–138. https://doi.org/10.1007/s00707-003-0022-9
32. *Avramov K.* Nonlinear beam oscillations excited by lateral force at combination resonance. Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 257. P. 337–359. https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5043
33. *Amabili M.* Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York. 2008. 390 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694

Отримано 21.04.2021,
в остаточному варіанті 24.11.2021