УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2023.02.105

К. В. АВРАМОВ[1], І. В. БІБЛІК[1], І. В. ГРЕБЕННІК[2], І. А. УРНЯЄВА[2]

СКОРОЧЕННЯ РОЗМІРНОСТІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОСТІННОЇ НАНОТРУБКИ

[1] *Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, вул. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail; admi@ipmach.kharkov.ua*
[2]*Харківський національний університет радіоелектроніки пр. Науки, 14, 61166, Харків, Україна; e-mail; info@nure.ua*

Виводиться система нелінійних рівнянь у частинних похідних, що описує коливання багатостінної вуглецевої нанотрубки. Ця система рівнянь зводиться до нелінійної динамічної системи з великою кількістю степенів вільності. Для зменшення розмірності цієї динамічної системи застосовується метод нелінійних нормальних форм, в результаті чого отримано динамічну систему з двома степенями вільності, яка досліджується асимптотичним методом багатьох масштабів. За допомогою метода багатьох масштабів отримано систему модуляційних рівнянь, нерухомі точки якої описують вільні коливання нанотрубки. Нерухомі точки описуються нелінійними алгебраїчними рівняннями. Рішення цих рівнянь наводяться на скелетній кривій. Використовується оболонкова модель Сандерса–Коїтера, яка описує геометрично нелінійне деформування нанотрубки, та нелокальний анізотропний закон Гука для моделювання коливань багатостінної нанотрубки. Підкреслимо, що пружні константи стінок нанотрубок різняться. Моделлю нанотрубки є система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яка отримується за допомогою використання метода зважених нев'язок до нелінійних рівнянь в частинних плохідних. У моделі коливань нанотрубки враховуються три види нелінійностей. По-перше, сили Ван дер Ваальса є нелінійними функціями радіальних переміщень. По-друге, переміщення стін нанотрубок передбачаються помірними, що описується геометрично нелінійною моделлю. По-третє, так як інтегральні силові фактори є нелінійними функціями переміщень, то при використанні природних граничних умов в узагальненому методі Гальоркіна (методі зважених нев'язок) виходять додаткові нелінійні доданки. Виводиться нелінійна динамічна система із скінченним числом степенів вільності. Досліджуються вільні нелінійні коливання нанотрубки. Результати розрахунку представляються на скелетній кривій.

Ключові слова: *скорочення розмірності динамічної системи, нанотрубка, нелокальний анізотропний закон Гука, нелінійна динамічна система зі скінченним числом степенів вільності, багатомодове інваріантне різноманіття.*

A system of nonlinear partial differential equations is derived to describe the vibrations of a multi-walled nanotube. The system reduces to a nonlinear dynamic system with a large number of degrees of freedom (DOFs). To reduce its dimension, the nonlinear modal analysis method is used to give 2-DOF dynamic system, which is studied by the asymptotic multiple scale method. This gives a system of modulation equations, whose fixed points describe the free vibrations of the nanotube. The fixed points are described by nonlinear algebraic equations, whose solutions are given on a backbone curve. Use is made of the Sanders–Koiter shell model to describe the nonlinear deformation of the nanotube and Hook's nonlocal anisotropic law to simulate its vibrations. Notice that the elastic constants of the nanotube walls differ. The nanotube model is a system of nonlinear ordinary differential equations, which is obtained by applying the weighed residuals method to the nonlinear partial equations. Three types of nonlinearities are accounted for in the nanotube model. First, the Van der Waals forces are nonlinear functions of the radial displacements. Second, the displacements of the nanotube walls are assumed to be moderate, which is described by a geometrically nonlinear model. Third, since the resultant forces are nonlinear functions of the displacements, the use of natural boundary conditions in the weighted residuals method results in additional nonlinear terms. A finite-DOF nonlinear dynamical system is derived. The free nonlinear vibrations of the nanotube are analyzed. The calculated results are shown on a backbone curve.

Keywords*: reduced order modeling, nanotube, Hook's nonlocal anisotropic law, finite degree of freedom nonlinear dynamical system, multi-mode invariant manifold.*

Вступ. Вуглецеві нанотрубки (ВНТ) були відкриті в 1919 р. [1]. Вони характеризуються надзвичайно високими механічними характеристиками; їх модуль пружності набагато вище, ніж у сталі. Тому нанотрубки застосовуються для армування композитів [2, 3]. Коливання ВНТ є дуже важливими для наномашин, таких як сенсори, пристрої для автоелектронної емісії, наноструминні системи [4]. Для моделювання коливань вуглецевих нанотрубок використовуються дві групи методів, до яких належать методи молекулярної динаміки [5, 6] та методи механіки деформівного твердого тіла. Перша група методів призводить до величезних розрахунків. Тому за допомогою цього методу досліджуються системи з малою кількістю молекул.

Ця стаття присвячена застосуванню континуальних моделей для моделювання нанотрубок.

Багато досліджень присвячено моделюванню нанотрубок на основі континуальних моделей. Стрижнева та оболонкові теорії часто використовуються для опису коливань нанотрубок. Лінійні коливання багатостінних нанотрубок описуються оболонковими моделями. Нелокальна теорія оболонок використовується для аналізу лінійних коливань багатостінних нанотрубок [7]. Взаємодія між стінками нанотрубок враховується за допомогою лінійних сил Ван дер Ваальса. Поперечні та крутильні хвилі у двостінних нанотрубках досліджуються в [8]. Як випливає з результатів розрахунку, дисперсія хвиль, розрахована методами молекулярної динаміки, близька до дисперсії, одержаної з оболонкової моделі. Метод скінченних елементів використовується для аналізу оболонкових моделей нанотрубок [9]. Оболонкові моделі використовуються для аналізу втрати статичної стійкості багатостінних нанотрубок [10]. Лінійні сили Ван дер Ваальса виводяться з потенціалу Леннарда–Джонса. В роботі [11] пружні коливання шарнірно-опертої двостінної нанотрубки досліджуються, використовуючи рівняння Доннела–Муштарі–Власова. У [12] для дослідження оболонкових моделей двостінних нанотрубок використовується теорія нелокальної пружності та зсувна теорія першого порядку.

Отримано систему нелінійних рівнянь у частинних похідних, яка описує нелінійні коливання нанотрубок при їх геометрично нелінійному деформуванні з урахуванням нелінійних сил Ван дер Ваальса та нелокального анізотропного закону Гука. Систему нелінійних рівнянь у частинних похідних зведено до системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь шляхом зважених нев’язок. Отримана динамічна система містить внутрішні резонанси 1:1. Тому розмірність отриманої динамічної системи вдалося скоротити до двох степенів вільності. Така динамічна система досліджується методами багатьох масштабів. Досліджуються вільні нелінійні коливання.

Постановка задачі. Розглядається багатостінна вуглецева нанотрубка, ескіз якої представлений на рис. 1.

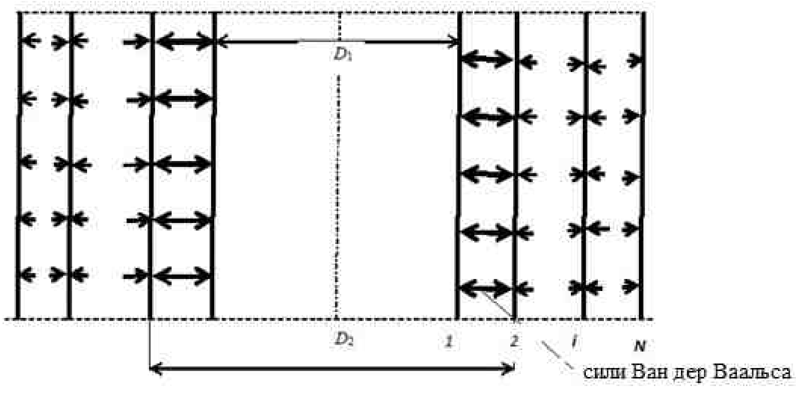

Рис.1 – Ескіз багатостінної ВНТ

Число стінок ВНТ дорівнює N. Нелінійні коливання цієї багатостінної ВНТ будемо досліджувати в циліндричній системі координат (x, θ, z). Деформації стінок нанотрубок пов’язані між собою завдяки силам Ван дер Ваальса. Така модель деформування пояснюється тим, що ковалентні зв’язки між сусідніми атомами однієї стінки значно більші за сили Ван дер Ваальса. Коливання кожної стінки вуглецевої нанотрубки будемо досліджувати на основі оболонкової моделі [13]. Три проєкції переміщень точок серединної поверхні i-ої стінки позначимо через u_i, v_i, w_i. Для опису пружності стінок скористаємося нелокальним анізотропним законом Гука [14]. Пружні константи в законі Гука залежать від діаметра стінки вуглецевої нанотрубки [15]. Тому кожна стінка має пружні константи. Закон Гука для i-ої стінки має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_X^{(i)} - \mu^2\nabla^2\sigma_X^{(i)} &= \frac{1}{h}\left(Y_1^{(i)}\varepsilon_X^{(i)} + Y_1^{(i)}\varepsilon_\theta^{(i)} + Y_1^{(i)}\gamma_X^{(i)}\right),\\ \sigma_\theta^{(i)} - \mu^2\nabla^2\sigma_\theta^{(i)} &= \frac{1}{h}\left(Y_2^{(i)}\varepsilon_X^{(i)} + Y_2^{(i)}\varepsilon_\theta^{(i)} + Y_2^{(i)}\gamma_X^{(i)}\right),\\ \sigma_X^{(i)} - \mu^2\nabla^2\sigma_X^{(i)} &= \frac{1}{h}\left(Y_3^{(i)}\varepsilon_X^{(i)} + Y_3^{(i)}\varepsilon_\theta^{(i)} + Y_3^{(i)}\gamma_X^{(i)}\right),\end{aligned} \tag{1}$$

де $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\ ^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{R_i^2\partial\ ^2}$; $\sigma_X^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}, \sigma_X^{(i)} -$ елементи тензора напружень; $\varepsilon_X^{(i)}, \varepsilon_\theta^{(i)}, \varepsilon_X^{(i)}$ – елементи тензора деформацій; $\mu = e_0 a -$ масштабний коефіцієнт, що описує малий масштаб конструкції; $R_i -$ радіус серединної поверхні i-ої нанотрубки; $h -$ товщина однієї стінки нанотрубки; $Y_j^{(i)} -$ анізотропні пружні константи.

Причин нелінійності моделі наноконструкції три. По-перше, сили Ван дер Ваальса є нелінійними функціями радіальних переміщень. По-друге, переміщення стінок нанотрубок передбачаються помірними, що описується геометрично нелінійним деформуванням. По-третє, інтегральні силові фактори є нелінійними функціями компонентів переміщень. Ці силові фактори беруть участь у природних граничних умовах, які використовуються в узагальненому методі Гальоркіна.

Деформації довільних точок ВНТ $\varepsilon_X^{(i)}, \varepsilon_\theta^{(i)}, \varepsilon_X^{(i)}$ i-ої стінки задовольняють співвідношенням:

$$\varepsilon_X^{(i)} = \varepsilon_{X,0}^{(i)} + zk_X^{(i)};\ \varepsilon_\theta^{(i)} = \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + zk_\theta^{(i)};\ \gamma_X^{(i)} = \gamma_{X\ ,0}^{(i)} + zk_X^{(i)}\ , \tag{2}$$

де $\varepsilon_{X,0}^{(i)}, \varepsilon_{\theta,0}^{(i)}, \gamma_{X\ ,0}^{(i)} -$ деформації серединної поверхні однієї з стінок нанотрубки; $k_x^{(i)}, k_\theta^{(i)}, k_X^{(i)}$ – варіації товщини та кручення серединної поверхні.

Надалі в цьому розділі будуть виведені рівняння коливань однієї стінки нанотрубки. Припустимо, що нанотрубка у процесі коливань здійснює геометрично нелінійне деформування. У цьому випадку, згідно з нелінійною теорією Сандерса–Коїтера [13], елементи тензора деформацій, величини $k_x^{(i)}, k_\theta^{(i)}, k_x^{(i)}$ та проєкції переміщень задовольняють рівнянням:

$$\varepsilon_{X,0}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial} + \varepsilon_{i,X,0}^{(N\ )}, \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{R_i\partial} + \frac{w_i}{R_i} + \varepsilon_{i,\theta,0}^{(N\ )}, \gamma_{X\ ,0}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{R_i\partial} + \frac{\partial v_i}{\partial} + \gamma_{i,X\ ,0}^{(N\ )},$$

$$k_X^{(i)} = -\frac{\partial^2 w_i}{\partial\ ^2},$$

$$k_\theta^{(i)} = \frac{\partial v_i}{R_i^2\partial} - \frac{\partial^2 w_i}{R_i^2\partial\ ^2}\ , k_X^{(i)} = -2\frac{\partial^2 w_i}{R_i\partial} + \frac{1}{2R_i}\left(3\frac{\partial v_i}{\partial} - \frac{\partial u_i}{R_i\partial}\right),$$

$$\varepsilon_{i,X,0}^{(N\ )} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial v_i}{\partial} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{i,\theta,0}^{(N\ )} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{R_i \partial} - \frac{v_i}{R_i}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial} - \frac{\partial v_i}{\partial}\right)^2, \gamma_{i,X\ \ ,0}^{(N\ )} = \frac{\partial w_i}{\partial}\left(\frac{\partial w_i}{R_i \partial} - \frac{v_i}{R_i}\right). \quad (3)$$

Рівняння руху ВНТ. Варіацію потенційної енергії i-ої стінки нанотрубки представимо в наступному вигляді:

$$\delta\prod = \iint_A \left[N_X^{(i)}\delta\varepsilon_{X,0}^{(i)} + N_\theta^{(i)}\delta\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + N_X^{(i)}\delta\gamma_{X\ \ ,0}^{(i)} + M_X^{(i)}\delta k_X^{(i)} + \right.$$
$$\left. + M_\theta^{(i)}\delta k_\theta^{(i)} + M_X^{(i)}\delta k_X^{(i)}\right] R_i d \qquad , \quad (4)$$

де A — область серединної поверхні однієї стінки; $N_X^{(i)}, N_\theta^{(i)}, N_X^{(i)}, M_X^{(i)}, M_\theta^{(i)}, M_X^{(i)}$ — інтегральні силові чинники.

Як випливає з рівнянь (1), ці силові фактори задовольняють співвідношенням:

$$N_X^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_X^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 N_X^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} Y_{1j}^{(i)}\varepsilon_{j,0}^{(i)},$$
$$N_\theta^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_\theta^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 N_\theta^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} Y_{2j}^{(i)}\varepsilon_{j,0}^{(i)},$$
$$N_X^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_X^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 N_X^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} Y_{3j}^{(i)}\varepsilon_{j,0}^{(i)},$$
$$M_X^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} z\sigma_X^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 M_X^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} X_{1j}^{(i)} k_j^{(i)},$$
$$M_\theta^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} z\sigma_\theta^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 M_\theta^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} X_{2j}^{(i)} k_j^{(i)},$$
$$M_X^{(i)} = \int_{-0.5}^{0.5} z\sigma_X^{(i)} d \ = \mu^2\nabla^2 M_X^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} X_{3j}^{(i)} k_j^{(i)}, \quad (5)$$

де $\left(\varepsilon_{1,0}^{(i)}, \varepsilon_{2,0}^{(i)}, \varepsilon_{3,0}^{(i)}\right) \equiv \left(\varepsilon_{X,0}^{(i)}, \varepsilon_{\theta,0}^{(i)}, \gamma_{X\ \ ,0}^{(i)}\right)$; $\left(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}\right) \equiv \left(k_X^{(i)}, k_\theta^{(i)}, k_X^{(i)}\right)$;

$X_k^{(i)} = \dfrac{Y_k^{(i)} h^2}{12}$.

У рівняння (4) введемо (3) і проведемо інтегрування частинами. Тоді в результаті отримаємо такий вираз для варіації потенційної енергії:

$$\delta\prod = \iint_A \left[\Gamma_W^{(i)}(u_i, v_i, w_i)\delta \ \ _i + \Gamma_V^{(i)}(u_i, v_i, w_i)\delta \ \ _i + \Gamma_U^{(i)}(u_i, v_i, w_i)\delta \ \ _i\right] R_i d \qquad +$$

$$+\int_0^{2\pi}\left[N_X^{(i)}\delta u_i+B_V^{(i)}(u_i,v_i,w_i)\delta v_i+B_W^{(i)}(u_i,v_i,w_i)\delta w_i-\right.$$
$$\left.-M_X^{(i)}\frac{\partial\ \ w_i}{\partial x}\right]_0^L R_i d\ \ , \qquad (6)$$

де

$$[\cdot]_0^L=[\cdot]_{X=0}-[\cdot]_{X=L};$$

$$\mathbb{\Gamma}_W^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=-\frac{\partial}{\partial}\left(N_X^{(i)}\frac{\partial w_i}{\partial}\right)+\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i}-\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i}\left(\frac{\partial w_i}{R_i\partial}-\frac{v_i}{R_i}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial}\left[N_X^{(i)}\left(\frac{\partial w_i}{R_i\partial}-\frac{v_i}{R_i}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_X^{(i)}}{R_i}\frac{\partial w_i}{\partial}\right]-\frac{\partial^2 M_X^{(i)}}{\partial\ \ ^2}-\frac{\partial^2}{\partial\ \ ^2}\left(\frac{M_\theta^{(i)}}{R_i^2}\right)-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial}\left(\frac{2M_X^{(i)}}{R_i}\right);$$

$$\mathbb{\Gamma}_V^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=-\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_X^{(i)}}{4}\left(\frac{\partial v_i}{\partial}-\frac{\partial\ \ _i}{R_i\partial}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i}\right)-\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i^2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial}-v_i\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_\theta^{(i)}}{4}\left(\frac{\partial u_i}{R_i\partial}-\frac{\partial v_i}{\partial}\right)\right]-\frac{\partial N_X^{(i)}}{\partial}-\frac{N_X^{(i)}}{R_i}\frac{\partial w_i}{\partial}-\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{M_\theta^{(i)}}{R_i^2}\right)-\frac{3}{2R_i}\frac{\partial M_X^{(i)}}{\partial};$$

$$\mathbb{\Gamma}_U^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=-\frac{\partial N_X^{(i)}}{\partial}+\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_X^{(i)}}{4R_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial}-\frac{\partial u_i}{R_i\partial}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_\theta^{(i)}}{4R_i}\left(\frac{\partial u_i}{R_i\partial}-\frac{\partial v_i}{\partial}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{N_X^{(i)}}{R_i}\right)+\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{M_X^{(i)}}{2R_i^2}\right);$$

$$B_V^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\frac{N_X^{(i)}+N_\theta^{(i)}}{4}\left(\frac{\partial v_i}{\partial}-\frac{\partial u_i}{R_i\partial}\right)+N_X^{(i)}+\frac{3}{2R_i}M_X^{(i)};$$

$$B_W^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=N_X^{(i)}\frac{\partial w_i}{\partial}+N_X^{(i)}\left(\frac{\partial w_i}{R_i\partial}-\frac{v_i}{R_i}\right)+\frac{\partial M_X^{(i)}}{\partial}+\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{2M_X^{(i)}}{R_i}\right).$$

Варіація кінетичної енергії i-ої стінки нанотрубки набуває наступного вигляду:

$$\delta\ \ \ =-\rho h\iint_A\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial\ \ ^2}\delta u_i+\frac{\partial^2 v_i}{\partial\ \ ^2}\delta v_i+\frac{\partial^2 w_i}{\partial\ \ ^2}\delta w_i\right)R_i d\ \ \ \ , \qquad (7)$$

де ρ – густина матеріалу.

Віртуальну роботу зовнішніх сил представимо так:

$$\delta\ \ \ =\iint_A\left(p_X^{(i)}\delta u_i+p_y^{(i)}\delta v_i+q_i\delta w_i\right)R_i d\ \ \ \ , \qquad (8)$$

де $p_x^{(i)}, p_y^{(i)}, q_i$ – проєкції зовнішніх сил на осі x,θ,z.

Для виведення рівнянь руху ВНТ скористаємося принципом Гамільтона $\int_{t_2}^{t_1}(\delta\ \ \ -\delta\prod+\delta\ \ \ )d\ \ \ =0$, де t_1, t_2 – деякі значення часу.

Введемо (6) – (8) в принцип Гамільтона і отримаємо наступні рівняння коливань стінки нанотрубки i:

$$\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial\ ^2}-\frac{\partial N_X^{(i)}}{\partial}-\frac{\partial N_X^{(i)}}{R_i\partial}+\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_X^{(i)}+N_\theta^{(i)}}{4R_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial}-\frac{\partial u_i}{R_i\partial}\right)\right]+\frac{\partial M_X^{(i)}}{2R_i^2\partial}\ =p_X^{(i)},\ (9)$$

$$\rho h\frac{\partial^2 v_i}{\partial\ ^2}-\frac{\partial N_\theta^{(i)}}{R_i\partial}-\frac{\partial N_X^{(i)}}{\partial}-\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{N_X^{(i)}\quad+N_\theta^{(i)}}{4}\left(\frac{\partial v_i}{\partial}-\frac{\partial u_i}{R_i\partial}\right)\right]-$$

$$-\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i^2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial}-v_i\right)-\frac{N_X^{(i)}}{R_i}\frac{\partial w_i}{\partial}-\frac{\partial M_\theta^{(i)}}{R_i^2\partial}-\frac{3\partial M_X^{(i)}}{2R_i\partial}=p_y^{(i)}, \qquad (10)$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w_i}{\partial\ ^2}-\frac{\partial}{\partial}\left(N_X^{(i)}\frac{\partial w_i}{\partial}\right)+\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i}-\frac{\partial}{R_i^2\partial}\left[N_\theta^{(i)}\left(\frac{\partial w_i}{\partial}-v_i\right)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{R_i\partial}\left[N_X^{(i)}\left(\frac{\partial w_i}{\partial}-v_i\right)\right]-\frac{\partial}{R_i\partial}\left(N_X^{(i)}\frac{\partial w_i}{\partial}\right)-\frac{\partial^2 M_X^{(i)}}{\partial\ ^2}-\frac{\partial^2 M_\theta^{(i)}}{R_i^2\partial\ ^2}-$$

$$-\frac{2}{R_i}\frac{\partial^2 M_X^{(i)}}{\partial\ \partial}=q_i. \qquad (11)$$

Співвідношення (5) введемо у (9) – (11) і отримаємо систему рівнянь нелінійних коливань i-ої стінки нанотрубки при геометрично нелінійному деформуванні:

$$\mathcal{F}_u^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\rho h\Lambda\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial\ ^2}\right)-G_1^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial}\right)-G_2^{(i)}\left(\frac{\partial v_i}{R_i\partial}+\frac{w_i}{R_i}\right)-$$

$$-G_3^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{R_i\partial}+\frac{\partial v_i}{\partial}\right)+G_4^{(i)}(u_i,v_i,w_i)-F_U^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\Lambda\left(p_X^{(i)}\right), \qquad (12)$$

$$\mathcal{F}_v^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\rho h\Lambda\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial\ ^2}\right)-W_1^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial}\right)-$$

$$-W_2^{(i)}\left(\frac{\partial v_i}{R_i\partial}+\frac{w_i}{R_i}\right)-W_3^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{R_i\partial}+\frac{\partial v_i}{\partial}\right)-W_4^{(i)}(u_i,v_i,w_i)-F_V^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=$$

$$=\Lambda\left(p_Y^{(i)}\right), \qquad (13)$$

$$\mathcal{F}_w^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\rho h\Lambda\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial\ ^2}\right)+Q_1^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial}\right)+Q_2^{(i)}\left(\frac{\partial v_i}{R_i\partial}+\frac{w_i}{R_i}\right)+$$

$$+Q_3^{(i)}\left(\frac{\partial u_i}{R_i\partial}+\frac{\partial v_i}{\partial}\right)-Q_4^{(i)}(u_i,v_i,w_i)-F_W^{(i)}(u_i,v_i,w_i)-\Lambda(q_i)=0,$$

$$i=1,\dots,N, \qquad (14)$$

де $\mathcal{F}_u^{(i)},\mathcal{F}_v^{(i)},\mathcal{F}_w^{(i)}$ – нелінійні диференціальні оператори; Λ, $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$, $G_3^{(i)}$, $G_4^{(i)}$, $W_1^{(i)}$, $W_2^{(i)}$, $W_3^{(i)}$, $W_4^{(i)}$, $Q_1^{(i)}$, $Q_2^{(i)}$, $Q_3^{(i)}$, $Q_4^{(i)}$– лінійні диференціальні оператори, які мають такий вигляд:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\cdot)=(\cdot)-\mu^2\nabla^2(\cdot)\ ;\ G_j^{(i)}(\cdot)=\frac{\partial}{\partial}\left[Y_{1j}^{(i)}(\cdot)\right]+\frac{1}{R_i}\frac{\partial}{\partial}\left[Y_{j3}^{(i)}(\cdot)\right];$$

$$W_j^{(i)}(\cdot)=\frac{\partial}{R_i\partial}\left[Y_{2j}^{(i)}(\cdot)\right]+\frac{\partial}{\partial}\left[Y_{j3}^{(i)}(\cdot)\right];Q_j^{(i)}(\cdot)=\frac{Y_{j2}^{(i)}}{R_i}(\cdot);j=1,2,3;$$

$$G_4^{(i)}(u_i,v_i,w_i)=\frac{1}{2R_i^2}\frac{\partial}{\partial}\sum_{j=1}^{3}X_{3j}^{(i)}k_j^{(i)};$$

$$W_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{\partial}{R_i^2 \partial} \sum_{j=1}^{3} X_{2j}^{(i)} k_j^{(i)} + \frac{3}{2R_i} \frac{\partial}{\partial} \sum_{j=1}^{3} X_{3j}^{(i)} k_j^{(i)};$$

$$Q_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{\partial^2}{\partial \ ^2} \sum_{j=1}^{3} X_{1j}^{(i)} k_j^{(i)} + \frac{\partial^2}{R_i^2 \partial \ ^2} \sum_{j=1}^{3} X_{2j}^{(i)} k_j^{(i)} + \frac{2}{R_i} \frac{\partial^2}{\partial \quad} \sum_{j=1}^{3} X_{3j}^{(i)} k_j^{(i)}.$$

Нелінійні оператори $F_U^{(i)}, F_V^{(i)}, F_W^{(i)}$ такі:

$$F_U^{(i)} = \mathfrak{L}_1^{(i)} \left(\varepsilon_{i,X,0}^{(N\ )} \right) + \mathfrak{L}_2^{(i)} \left(\varepsilon_{i,\theta,0}^{(N\ )} \right) +$$

$$+ \mathfrak{L}_3^{(i)} \left(\gamma_{i,X\ ,0}^{(N\ )} \right) - \boldsymbol{\Lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{N_X^{(i)} + N_\theta^{(i)}}{4R_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial} \right) \right] \right\},$$

$$F_V^{(i)} = P_1^{(i)} \left(\varepsilon_{i,X,0}^{(N\ )} \right) + P_2^{(i)} \left(\varepsilon_{i,\theta,0}^{(N\ )} \right) +$$

$$+ P_3^{(i)} \left(\gamma_{i,X\ ,0}^{(N\ )} \right)$$

$$+ \boldsymbol{\Lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N_X^{(i)} + N_\theta^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial} \right) \right] + \frac{N_\theta^{(i)}}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial} - v_i \right) + \quad + \frac{N_X^{(i)}}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial} \right\},$$

$$F_W^{(i)} = -Q_1^{(i)} \left(\varepsilon_{i,X,0}^{(N\ )} \right) - Q_2^{(i)} \left(\varepsilon_{i,\theta,0}^{(N\ )} \right) - Q_3^{(i)} \left(\gamma_{i,X\ ,0}^{(N\ )} \right) +$$

$$+ \boldsymbol{\Lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial} \left(N_X^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial} \right) + \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{N_\theta^{(i)}}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial} - v_i \right) \right] + \frac{\partial}{R_i \partial} \left[N_X^{(i)} \left(\frac{\partial w_i}{\partial} - v_i \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{N_X^{(i)}}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial} \right] \right\}.$$

Отже, отримано систему нелінійних рівнянь у частинних похідних (12) – (14), що описує нанотрубку з N стінками. Ці стінки взаємодіють між собою через сили Ван дер Ваальса. Ці сили є нелінійними [16]. Проєкції сил Ван дер Ваальса, що діють на ІІ стінку нанотрубки q_i, такі:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{i} \left(w_i - w_j \right) + \sum_{j=1}^{N} e_{i} \left(w_i - w_j \right)^3, \qquad (15)$$

де

$$c_{i} = -\frac{\varepsilon R_j \pi}{a^4} \left\{ \frac{1001\sigma^1}{3} E_{i}^{(1\ )} - \frac{1120\sigma^6}{9} E_{i}^{(7)} \right\};$$

$$e_{i} = -\frac{\varepsilon R_j \pi}{a^4} \left\{ \frac{65065\sigma^1}{6} E_{i}^{(1\ )} - \frac{3920\sigma^6}{3} E_{i}^{(9)} \right\};$$

$$E_{i}^{(m)} = \left(R_i + R_j \right)^{-m} \int_0^{\pi/2} \frac{d}{\left(1 - K_{i} c \ ^2\theta \right)^{m/2}}; K_{i} = \frac{4R_i R_j}{\left(R_j + R_i \right)^2};$$

ε − глибина потенціалу; a − довжина С-С зв'язку; m − ціле додатне число.

Рівняння коливань записується щодо безрозмірних змінних та параметрів:

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{R_i}, \tilde{v}_i = \frac{v_i}{R_i}, \tilde{w}_i = \frac{w_i}{R_i}, \eta = \frac{x}{L}, \tau = \omega t, \delta_i = \frac{R_i}{R_1}, \alpha_i = \frac{R_i}{L}, i = 1, \dots, N, \qquad (16)$$

де ω − частота коливань нанотрубки.

У подальшому аналізі будемо використовувати безрозмірні змінні та параметри.

Надалі розглянемо шарнірно-оперту з двох сторін багатостінну ВНТ, яка задовольняє геометричним граничним умовам:

$$\tilde{w}_i|_{\eta=0} = \tilde{w}_i|_{\eta=1} = \tilde{v}_i|_{\eta=0} = \tilde{v}_i|_{\eta=1} = 0 \qquad (17)$$

та природним граничним умовам:

$$\tilde{M}_X^{(i)}\Big|_{\eta=0} = \tilde{M}_X^{(i)}\Big|_{\eta=1} = \tilde{N}_X^{(i)}\Big|_{\eta=0} = \tilde{N}_X^{(i)}\Big|_{\eta=1} = 0, i = 1, \dots, N. \qquad (18)$$

Для дослідження коливань застосовується метод Гальоркіна [17]. Тому враховуються як геометричні (17), так і природні граничні умови (18). З урахуванням співвідношень (1) задовольнити природним граничним умовам (18) неможливо. Тому застосовується узагальнений метод Гальоркіна [18], який часто називається методом зважених нев'язок [18]. Виберемо розкладання переміщень $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i$, задовольняючи лише геометричним граничним умовам (17):

$$\tilde{u}_i = \sum_{m=1}^{J_1} \cos(m\quad)\left[\vartheta_{i,m}^{(u,c)}(\tau)\cos(n\ \ ) + \vartheta_{i,m}^{(u,s)}(\tau)\sin(n\ \ )\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\bar{J}_1} \vartheta_{i,m}^{(u,0)}(\tau)\cos[(2m-1)\pi\ \ ],$$

$$\tilde{v}_i = \sum_{m=1}^{J_2} \sin(m\quad)\left[\vartheta_{i,m}^{(v,c)}(\tau)\cos(n\ \ ) + \vartheta_{i,m}^{(v,s)}(\tau)\sin(n\ \ )\right], \qquad (19)$$

$$\tilde{w}_i = \sum_{m=1}^{J_3} \sin(m\quad)\left[\vartheta_{i,m}^{(w,c)}(\tau)\cos(n\ \ ) + \vartheta_{i,m}^{(w,s)}(\tau)\sin(n\ \ )\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{J_3} \vartheta_{i,m}^{(w,0)}(\tau)\sin[(2m-1)\pi\ \ ].$$

Частина розкладання (19), що розкладається за функціями $\cos[(2m-1)\pi\ \ ], \sin[(2m-1)\pi\ \ ]$ описує осесиметричну частину рішення, яка завжди присутня у розкладанні нелінійних коливань оболонок [13]. Вектор узагальнених координат ВНТ представимо у наступній блочній формі:

$$\boldsymbol{\vartheta} = \left[\boldsymbol{\vartheta}^{(\mathbf{u,c})}, \boldsymbol{\vartheta}^{(\mathbf{u,s})}, \dots\right], N_{\square} = \dim(\boldsymbol{\vartheta}).$$

У варіації потенційної енергії (6) присутні природні граничні умови, які представлені другим інтегралом (6). Співвідношення (6) використовуються в узагальненому методі Гальоркіна. Співвідношення (6) – (8) введемо у варіаційний принцип Гамільтона. Тоді отримаємо таке співвідношення:

$$\iint_{\tilde{A}_i} \left\{\mathcal{F}_w^{(i)}\delta\tilde{w}_i + \mathcal{F}_u^{(i)}\delta\tilde{u}_i + \mathcal{F}_v^{(i)}\delta\tilde{v}_i\right\} d\qquad +$$

$$+\int_0^{2\pi} \alpha_1 \left[\widetilde{N}_X^{(i)} \delta\tilde{u}_i - \alpha_i \widetilde{M}_X^{(i)} \frac{\partial\ \widetilde{w}_i}{\partial}\right]_0^1 d\quad = 0, \tag{20}$$

де $\tilde{A}_i$ − безрозмірна область серединної поверхні i-ої стінки нанотрубки; $[\ \ ]_0^1 = [\ \ ]_{\eta=1} - [\ \ ]_{\eta=0}$.

Підкреслимо, що рівняння у частинних похідних (12) – (14) є нелінійними. Вони можуть використовуватися при аналізі лінійних та нелінійних коливань.

З варіаційного рівняння (20) випливає наступна система рівнянь для аналізу нелінійних коливань:

$$\iint_{\tilde{A}_i} \mathcal{F}_w^{(i)} \sin(m_1\pi\ \ ) \begin{bmatrix}\cos(n\ \ )\\ \sin(n\ \ )\end{bmatrix} d \qquad -$$

$$-\alpha_1\alpha_i m_1\pi \int_0^{2\pi} \left\{\widetilde{M}_X^{(i)} \cos(m_1\pi\ \ ) \begin{bmatrix}\cos(n\ \ )\\ \sin(n\ \ )\end{bmatrix}\right\}_0^1 d\quad = 0,$$

$$\iint_{\tilde{A}_i} \mathcal{F}_u^{(i)} \cos(m_2\pi\ \ ) \begin{bmatrix}\cos(n\ \ )\\ \sin(n\ \ )\end{bmatrix} d \qquad +$$

$$+\alpha_1 \int_0^{2\pi} \left\{\widetilde{N}_X^{(i)} \cos(m_2\pi\ \ ) \begin{bmatrix}\cos(n\ \ )\\ \sin(n\ \ )\end{bmatrix}\right\}_0^1 d\quad = 0,$$

$$\iint_{\tilde{A}_i} \mathcal{F}_v^{(i)} \sin(m_3\pi\ \ ) \begin{bmatrix}\cos(n\ \ )\\ \sin(n\ \ )\end{bmatrix} d \qquad = 0, m_1 = 1,\dots,J_3;\ m_2 = 1,\dots,J_1,$$

$$m_3 = 1,\dots,J_2,$$

$$\iint_{\tilde{A}_i} \mathcal{F}_u^{(i)} \cos((2m_1-1)\pi\ \ )\, d \qquad + \alpha_1 \int_0^{2\pi} \left\{\widetilde{N}_X^{(i)} \cos((2m_1-1)\pi\ \ )\right\}_0^1 d\quad = 0,$$

$$\iint_{\tilde{A}_i} \mathcal{F}_w^{(i)} \sin\big((2m_2-1)\pi\ \ \big)\, d \qquad -$$

$$-\alpha_1\alpha_i(2m_2-1)\pi \int_0^{2\pi} \left\{\widetilde{M}_X^{(i)} \cos\big((2m_2-1)\pi\ \ \big)\right\}_0^1 d\quad = 0,$$

$$m_1 = 1,\dots,\overline{J_1}, m_2 = 1,\dots,\overline{J_3}. \tag{21}$$

Отже, з рівнянь (21) виходить система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описує нелінійні коливання наноконструкції. Цю систему можна подати в матричній формі так:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathbf{N}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}} + \mathbf{K_B}\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}} + \mathbf{F_G}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) + \mathbf{F_W}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) + \mathbf{F}^{(\mathbf{B})}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) = \mathbf{0}, \tag{22}$$

де $\overline{N}_{\square} = di\ \ (\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}})$; $\mathbf{F_G}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}})$ − нелінійні доданки, що описують геометрично нелінійне деформування нанотрубки; $\mathbf{F_W}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}})$ − доданки, що описують нелінійну частину сил Ван дер Ваальса; $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ − матриці мас та жорсткості;

$\mathbf{K_B}$ − додаткова матриця жорсткості, пов’язана з урахуванням граничних умов (21).

Природні граничні умови (21) призводять до нелінійних доданків в рівняннях (22) $\mathbf{F}^{(\mathbf{B})}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}})$. Нелінійні доданки, що входять у (22), можна представити в наступному вигляді:

$$F_G^{(i)}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{\nu}} \chi_\nu^{(i)} \vartheta_\nu \vartheta_j + \sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{\nu}} \sum_{\boldsymbol{j_1}=1}^{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{j_1}}^{(\boldsymbol{i})} \vartheta_\nu \vartheta_j \vartheta_{j_1}, i = 1, \dots, \bar{N}_{\square}. \quad (23)$$

$$F_W^{(i)}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{\nu}} \sum_{\boldsymbol{j_1}=1}^{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{j_1}}^{(\boldsymbol{i})} \vartheta_\nu \vartheta_j \vartheta_{j_1}, F_i^{(B)}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{\nu}} r_\nu^{(i)} \vartheta_\nu \vartheta_j.$$

Нелінійні коливання ВНТ. У цій статті нелінійні нормальні форми коливань Шоу–Пьєра застосовуються для скорочення розмірності динамічної системи [19]. Оскільки нелінійна динамічна система (22) містить внутрішні резонанси, то застосовується багатомодове інваріантне різноманіття [19]. Внаслідок застосування цього методу виходить динамічна система з двома степенями вільності, яка досліджується методом багатьох масштабів.

Власні частоти аналізованої багатостінної ВНТ $\omega_i, i = 1, \dots, \bar{N}_{\square}$ є кратними [13]:

$$\omega_k = \omega_{k+1}, k = 1,3,5 \dots. \quad (24)$$

Матрицю власних форм коливань позначимо через $\mathbf{Q}$. Власні форми коливань містяться в стовпці матриці. Тоді скористаємось наступною заміною змінних $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}$, де $\boldsymbol{\pi}$ −вектор узагальнених координат. Цю заміну змінних застосуємо до динамічної системи (23). В результаті отримаємо наступну динамічну систему:

$$\ddot{\pi}_i + \omega_i^2 \pi_i + \tilde{F}_i(\boldsymbol{\pi}) = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{F}_i(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{\nu=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{\chi}_\nu^{(i)} \pi_\nu \pi_j + \sum_{\nu=1}^{\bar{N}_{\square}} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{j} \tilde{\lambda}_{\nu\,j_1}^{(i)} \pi_\nu \pi_j \pi_{j_1}, i = 1, \dots, \bar{N}_{\square}.$$

Припустимо, що крім внутрішніх резонансів 1:1 (24) інших внутрішніх резонансів немає. Тому для дослідження нелінійних нормальних форм скористаємося багатомодовими інваріантними різноманіттями. Вибір виду різноманіття обумовлений взаємодією узагальнених координат π_k і π_{k+1} з однаковими частотами коливань. Отже, майстер координатами будуть: $u_1 = \pi_k$, $u_2 = \pi_{k+1}, v_1 = \dot{\pi}_k$, $v_2 = \dot{\pi}_{k+1}$. Тоді залежні координати виражаються через майстер координати так:

$$\pi_i = X_i(u_1, u_2, v_1, v_2) = \\ = \sum_{j_1=1,2} \sum_{j_2=1,2} \left(a_{3,i}^{(j_1,j_2)} u_{j_1} u_{j_2} + a_{4,i}^{(j_1,j_2)} u_{j_1} v_{j_2} + a_{5,i}^{(j_1,j_2)} v_{j_1} v_{j_2} \right) + \\ + \sum_{j_1=1,2} \sum_{j_2=1,2} \sum_{j_3=1,2} \left(a_{6,i}^{(j_1,j_2,j_3)} u_{j_1} u_{j_2} u_{j_3} + a_{7,i}^{(j_1,j_2,j_3)} u_{j_1} u_{j_2} v_{j_3} + \\ + a_{8,i}^{(j_1,j_2,j_3)} u_{j_1} v_{j_2} v_{j_3} + a_{9,i}^{(j_1,j_2,j_3)} v_{j_1} v_{j_2} v_{j_3} \right), \quad (26)$$

$$\dot{\pi}_i = Y_i(u_1, u_2, v_1, v_2) =$$
$$= \sum_{j_1=1,2}\sum_{j_2=1,2}\left(b_{3,i}^{(j_1,j_2)}u_{j_1}u_{j_2} + b_{4,i}^{(j_1,j_2)}u_{j_1}v_{j_2} + b_{5,i}^{(j_1,j_2)}v_{j_1}v_{j_2}\right) +$$
$$+ \sum_{j_1=1,2}\sum_{j_2=1,2}\sum_{j_3=1,2}\left(b_{6,i}^{(j_1,j_2,j_3)}u_{j_1}u_{j_2}u_{j_3} + b_{7,i}^{(j_1,j_2,j_3)}u_{j_1}u_{j_2}v_{j_3} +\right.$$
$$\left.+ b_{8,i}^{(j_1,j_2,j_3)}u_{j_1}v_{j_2}v_{j_3} + b_{9,i}^{(j_1,j_2,j_3)}v_{j_1}v_{j_2}v_{j_3}\right), i \neq k, i \neq k+1,$$

де $a_{3,i}^{(j_1,j_2)}$; $a_{4,i}^{(j_1,j_2)}, \ldots$ − невідомі параметри, що підлягають розрахунку.

Для розрахунку цих параметрів застосовується підхід, викладений у [19].

Динамічну систему (25) спроєктуємо на інваріантне різноманіття (26). Тоді отримаємо динамічну систему з двома степенями вільності:

$$\ddot{u}_1 + \omega_k^2 u_1 + F_k^{(2)} + F_k^{(3)} = 0,$$
$$\ddot{u}_2 + \omega_k^2 u_2 + F_{k+1}^{(2)} + F_{k+1}^{(3)} = 0, \tag{27}$$
$$F_i^{(2)} = \bar{\chi}_{k,k}^{(i)}u_1^2 + \bar{\chi}_{k+1,k}^{(i)}u_1u_2 + \bar{\chi}_{k+1,k+1}^{(i)}u_2^2, i = k, k+1,$$
$$F_{k-1+i}^{(3)} = \tilde{\alpha}_{3,i}^{(1,1)}u_1^3 + \tilde{\alpha}_{3,i}^{(2,2)}u_2^2u_1 + \tilde{\alpha}_{3,i}^{(1,2)}u_1^2u_2 + \tilde{\beta}_{3,i}^{(2,2)}u_2^3 + \tilde{\alpha}_{5,i}^{(1,1)}v_1^2u_1 +$$
$$+\tilde{\alpha}_{5,i}^{(1,2)}v_1\, v_2u_1 + \tilde{\alpha}_{5,i}^{(2,2)}v_2^2u_1 + \tilde{\beta}_{5,i}^{(1,1)}v_1^2u_2 + \tilde{\beta}_{5,i}^{(1,2)}v_1\, v_2u_2 + \tilde{\beta}_{5,i}^{(2,2)}v_2^2u_2, i = 1,2,$$

де параметри $\bar{\chi}_{k,k}^{(i)}; \tilde{\alpha}_{k,i}^{(i_1,i_2)}; \tilde{\beta}_{k,i}^{(i_1,i_2)}$ мають чисельні значення.

Зі співвідношень (16) випливає, що проєкції переміщень багатостінної нанотрубки задовольняють оцінкам: $\tilde{u}_i = O(\varepsilon), \tilde{v}_i = O(\varepsilon), \tilde{v}_i = O(\varepsilon)$, де $0 < \varepsilon$ □ 1 – малий параметр. З розкладів (19) випливає, що узагальнені координати також відповідають оцінкам: $q_i = O(\varepsilon), \pi_i = O(\varepsilon), i = 1, \ldots, N$□. Для аналізу динамічної системи (27) скористаємося методом багатьох масштабів [8]. Наближений розв’язок системи (27) представимо так:

$$u_i = \varepsilon u_{i,0}(T_0, T_1, \ldots) + \varepsilon^2 u_{i,1}(T_0, T_1, \ldots) + \varepsilon^3 u_{i,2}(T_0, T_1, \ldots), i = 1,2, \tag{28}$$

де $T_0 = \tau; T_1 = \varepsilon\cdot; T_2 = \varepsilon^2\tau$.

Тоді компоненти розкладання (28) задовольняють наступним системам рівнянь у частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial T_0^2} + \omega_k^2 u_{i,0} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,1}}{\partial T_0^2} + \omega_k^2 u_{i,1} + 2\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial T_0\,\partial T_1} + F_{k-1+i}^{(2)} = 0, i = 1,2, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,2}}{\partial T_0^2} + \omega_k^2 u_{i,2} + 2\frac{\partial^2 u_{i,1}}{\partial T_0\,\partial T_1} + \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial T_0\,\partial T_2} + F_{k-1+i}^{(3)} + \Delta F_{k-1+i}^{(2)} = 0, \tag{31}$$
$$\Delta F_j^{(2)} = \bar{\chi}_{k,k}^{(j)}2u_{1,0}u_{1,1} + \bar{\chi}_{k+1,k}^{(j)}\left(u_{1,1}u_{2,0} + u_{2,1}u_{1,0}\right) + \bar{\chi}_{k+1,k+1}^{(j)}2u_{2,0}u_{2,1},$$
$$j = k, k+1.$$

Розв’язок системи рівнянь (29) представимо так:

$$u_{j,0} = A_{k-1+j}(T_1, T_2)\exp(i\omega_k T_0) + \bar{A}_{k-1+j}(T_1, T_2)\exp(-i\omega_k T_0), j = 1,2,$$

де i −уявна одиниця; $\bar{A}_{k-1+j}$ −величина, комплексно-спряжена з A_{k-1+j}.

З умови рівності нулю секулярних членів у рівнянні (30) одержуємо: $\frac{\partial A_k}{\partial T_1} = \frac{\partial A_{k+1}}{\partial T_1} = 0$. Отже, модуляційні змінні A_k, A_{k+1} не залежать від T_1. Розв'язок рівняння у частинних похідних (30) представимо так:

$$u_{j,1} = \frac{G_2^{(k-1+j)}}{\omega_k^2} - \frac{G_1^{(k-1+j)}}{3\omega_k^2}\exp(i2\omega_k T_0) -$$
$$- \frac{\overline{G_1}^{(k-1+j)}}{3\omega_k^2}\exp(-i2\omega_k T_0), j = 1,2, \qquad (32)$$

де

$$G_2^{(j)} = -\overline{\chi}_{k,k}^{(j)} 2A_k\overline{A_k} - \overline{\chi}_{k+1,k}^{(j)}(A_{k+1}\overline{A_k} + A_k\overline{A}_{k+1}) - \overline{\chi}_{k+1,k+1}^{(j)} 2A_{k+1}\overline{A}_{k+1};$$
$$G_1^{(j)} = -\overline{\chi}_{k,k}^{(j)} A_k^2 - \overline{\chi}_{k+1,k}^{(j)} A_k A_{k+1} - \overline{\chi}_{k+1,k+1}^{(j)} A_{k+1}^2; j = k, k+1.$$

Розв'язок (32) введемо до рівняння (31) та прирівняємо нулю секулярні члени. В результаті отримаємо два комплексні модуляційні рівняння в наступному вигляді:

$$i\omega_k 2\frac{\partial A_j}{\partial T_2} + G_1^{(j)} A_k^2\overline{A_k} + G_2^{(j)} A_{k+1}\overline{A}_{k+1}A_k + G_3^{(j)} A_{k+1}^2\overline{A_k} + G_4^{(j)} A_k\overline{A_k}A_{k+1} +$$
$$+G_5^{(j)} A_k^2\overline{A}_{k+1} + G_6^{(j)} A_{k+1}^2\overline{A}_{k+1} = 0, j = k, k+1, \qquad (33)$$

де $G_1^{(j)}, \dots, G_6^{(j)}$ − дійсні чисельні величини.

До цієї системи рівнянь застосуємо заміну змінних: $A_j = 0.5a_j \exp(i\beta_j)$, $j = k, k+1$. В результаті отримаємо систему модуляційних рівнянь щодо змінних $(a_k, a_{k+1}, \gamma = \beta_k - \beta_{k+1})$:

$$a_k' = \frac{1}{8\omega_k}\left[G_3^{(k)} a_k a_{k+1}^2 - G_5^{(k)} a_{k+1} a_k^2\right]\sin(2\gamma) +$$
$$+ \frac{1}{8\omega_k}\left[G_4^{(k)} a_{k+1} a_k^2 + G_6^{(k)} a_{k+1}^3\right]\sin(\gamma), \qquad (34)$$
$$a_{k+1}' = -\frac{1}{8\omega_k}\left[G_1^{(k+1)} a_k^3 + \left(G_2^{(k+1)} - G_3^{(k+1)}\right)a_{k+1}^2 a_k\right]\sin(\gamma) -$$
$$- \frac{1}{8\omega_k} G_5^{(k+1)} a_k^2 a_{k+1}\sin(2\gamma),$$
$$8\omega_k\gamma' = \left(G_1^{(k)} - G_4^{(k+1)}\right)a_k^2 + \left(G_2^{(k)} - G_6^{(k+1)}\right)a_{k+1}^2 +$$
$$+ \left(G_3^{(k)} a_{k+1}^2 + G_5^{(k)} a_k a_{k+1} - G_5^{(k+1)} a_k^2\right)\cos(2\gamma) +$$
$$+ \left[\left(G_4^{(k)} - G_2^{(k+1)} - G_3^{(k+1)}\right)a_k a_{k+1} + G_6^{(k)}\frac{a_{k+1}^3}{a_k} - G_1^{(k+1)}\frac{a_k^3}{a_{k+1}}\right]\cos(\gamma),$$

де $a_k' = \frac{da_k}{dT_2}$.

Змінні модуляційних рівнянь (34) та узагальнені координати динамічної системи (27) пов'язані між собою так:

$$u_1 = a_k\cos(\omega_k T_0 + \beta_k) = a_k\cos(\Omega_k\tau),$$
$$u_2 = a_{k+1}\cos(\omega_k T_0 + \beta_{k+1}) = a_{k+1}\cos(\Omega_{k+1}\tau). \qquad (35)$$

Періодичні коливання динамічної системи (34) описуються нерухомими точками системи модуляційних рівнянь (34) ($a'_k = a'_{k+1} = \gamma' = 0$). Ці нерухомі точки задовольняють наступній системі нелінійних рівнянь алгебри:

$$s^3\left[\left(G_2^{(k+1)} - G_3^{(k+1)}\right)G_3^{(k)} - G_5^{(k+1)}G_6^{(k)}\right] - G_5^{(k)}\left(G_2^{(k+1)} - G_3^{(k+1)}\right)s^2 + \\ + s\left(G_3^{(k)}G_1^{(k+1)} - G_5^{(k+1)}G_4^{(k)}\right) - G_5^{(k)}G_1^{(k+1)} = 0, \quad (36)$$

$$2\left(G_3^{(k)}s^2 + G_5^{(k)}s - G_5^{(k+1)}\right)\xi^2 + \left[\left(G_4^{(k)} - G_2^{(k+1)} - G_3^{(k+1)}\right)s + G_6^{(k)}s^3 - \frac{G_1^{(k+1)}}{z}\right]\xi + \\ + G_1^{(k)} - G_4^{(k+1)} + G_5^{(k+1)} - G_5^{(k)}s + \left(G_2^{(k)} - G_6^{(k+1)} + G_3^{(k)}\right)s^2 = 0, \quad (37)$$

де $s = a_{k+1}/a_k$; $\xi = \cos(\gamma)$.

Для розрахунку нелінійних вільних коливань спочатку вирішується кубічне рівняння (36). Розв'язок цього кубічного рівняння використовується у розв'язанні квадратного рівняння (37).

Розв'язки рівнянь (36), (37) використовуються для розрахунку скелетних кривих. З рівнянь (34) виводяться співвідношення для β'_k, β'_{k+1}. Ці співвідношення вводяться у (35). В результаті отримаємо наступні рівняння для розрахунку скелетних кривих:

$$\Omega_k = \omega_k + \varepsilon^2 a_k^2 \frac{F_k}{\omega_k}, \Omega_{k+1} = \omega_k + \varepsilon^2 a_{k+1}^2 \frac{F_{k+1}}{\omega_k s^2}, \quad (38)$$

де

$$8F_k = G_1^{(k)} + G_2^{(k)}s^2 + \left(G_3^{(k)}s^2 + G_5^{(k)}s\right)(2\xi^2 - 1) + \left(G_4^{(k)}s + G_6^{(k)}s^3\right)\xi;$$

$$8F_{k+1} = G_4^{(k+1)} + G_6^{(k+1)}s^2 + \left(\frac{G_1^{(k+1)}}{z} + \left(G_2^{(k+1)} + G_3^{(k+1)}\right)s\right)\xi + \\ + G_5^{(k+1)}(2\xi^2 - 1).$$

Чисельний аналіз нелінійних коливань. Будемо досліджувати коливання тристінних ВНТ, які розглядалися у статті [21]. Індекси хіральності цих тристінних нанотрубок такі: (5,5); (10,10); (15,15). Параметри цієї тристінної ВНТ такі:

$$R_1 = 0{,}339\ \text{нм}, R_2 = 0{,}678\ \text{нм}, R_3 = 1{,}016\ \text{нм}, L = 9R_3, \\ a = 0{,}142\ \text{нм}, \sigma = 0{,}3407\ \text{нм}, \varepsilon = 4{,}749\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}, \\ K_\rho = 742\ \frac{Н}{\text{м}}, K_\theta = 1{,}42\ \text{нН}\cdot\text{нм}, r_0 = 0{,}142\ \text{нм}, \rho h = 0{,}7718\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, \quad (39)$$

де $K_\rho, K_\theta -$ константа, пов'язана з розтягненням зв'язку вуглець-вуглець і константа кута зв'язок-зв'язок відповідно; $r_0 -$ довжина зв'язку вуглець-вуглець. Матриця **Y** закону Гука (1) розраховується на підставі молекулярного підходу, представленого в [15].

Проводилося чисельне моделювання нелінійних вільних коливань тристінних ВНТ з параметрами (39). Нелінійні коливання такої наносистеми описуються нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь (25). Сили Ван дер Ваальса передбачаються лінійними. Тому нелінійні доданки (15) відкидаються. І тут у системі є лише геометрична нелінійність. Математична модель була зведена до безрозмірних параметрів (16), використовуючи власну мінімальну частоту. Для дослідження збіжності нелінійних коливань динамічна система (25) розглядалася з 42 і 60 степенями вільності. Для отримання динамічної системи з 42 степенями вільності у розкладаннях (19) приймалося $J_1 = J_2 = J_3 = 2, J_1 = J_2 = 1$. Динамічна система з 60 ступенями вільності має такі параметри розкладань (19): $J_1 = J_2 = J_3 = 3, J_1 = J_2 = 1$.

Для кожної динамічної системи спочатку проводився розрахунок нелінійних нормальних форм, які розглянуті вище. Це дозволило динамічну систему з великою кількістю степенів вільності звести до динамічної системи з двома степенями вільності. Для дослідження цієї динамічної системи застосовувався метод багатьох масштабів. Для розрахунку скелетних кривих розв'язувалося кубічне рівняння (36) та квадратне рівняння (37). Скелетні криві розраховувалися за допомогою співвідношень (38).

Результати аналізу скелетних кривих наводяться на рис. 2. Пунктирною лінією наводяться скелетні криві, отримані розрахунком динамічної системи з 42 степенями вільності. Скелетна крива, розрахована для динамічної системи з 60 степенями вільності, позначена суцільною лінією.

Для перевірки стійкості нелінійних нормальних форм та підтвердження аналітичних результатів розрахунку проводилося пряме чисельне інтегрування динамічної системи (25) з 60 степенями вільності на часовому інтервалі у 80 періодів коливань. Результати такого інтегрування наводяться трикутними маркерами на рис. 2.

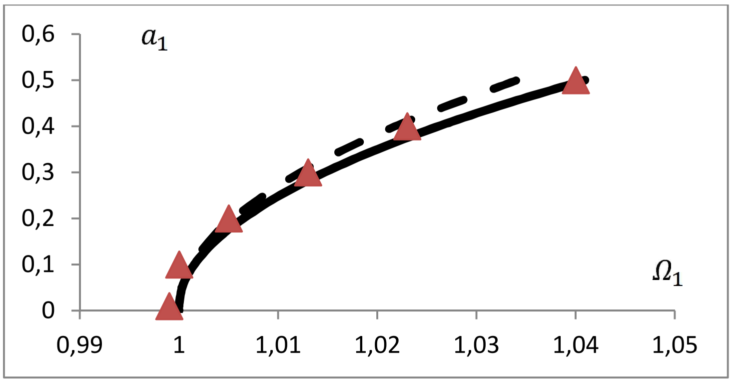

Рис. 2 – Скелетні криві при числі хвиль в обводовому напрямку n=1

Висновки. Отримано систему рівнянь у частинних похідних, що описує нелінійні коливання багатостінної нанотрубки. Основою цих рівнянь є оболонкова теорія Сандерса–Коїтера та нелокальний анізотропний закон Гука. У моделі коливань нанотрубки враховано три види нелінійностей. По-перше, сили Ван дер Ваальса є нелінійними функціями радіальних переміщень. По-друге, переміщення стінок нанотрубок передбачаються помірними, що описується геометрично нелінійною моделлю. По-третє, оскільки інтегральні силові фактори є нелінійними функціями переміщень, то при використанні природних граничних умов в узагальненому методі Гальоркіна (метод зважених нев'язок) виходять додаткові нелінійні доданки. Метод зважених нев'язок застосовується для отримання динамічної системи зі скінченним числом степенів вільності, тому що внаслідок використання нелокального анізотропного закону Гука не вдається задовольнити природні граничні умови. Застосовуючи метод зважених нев'язок, отримано нелінійну динамічну систему, що описує коливання нанотрубки з довільним числом стінок.

Отримана динамічна система містить внутрішні резонанси 1:1, що обумовлено присутністю спряжених форм у всіх розкладаннях коливань. Тож для дослідження нелінійних коливань застосовуються багатомодові інваріантні різноманіття, які є узагальненням нелінійних мод Шоу–Пьєра. Внаслідок застосування цього методу нелінійна динамічна система з десятками степенів вільності зведена до динамічної системи з двома степенями вільності, що досліджується методом багатьох масштабів.

Якісний характер поведінки скелетних кривих короткої та довгої нанотрубок не відрізняється. В обох випадках поведінка скелетних кривих при числі хвиль в обводовому напрямку $n = 1$ є жорсткою, на відміну від числа хвиль в обводовому напрямку $n = 2$. Як випливає з результатів чисельного моделювання, величина вкладу нелінійності у поведінку короткої та довгої оболонки різна. Коротка оболонка має слабкішу нелінійність, ніж довга оболонка.

1. *Iijima S.* Helical microtubules of graphitic carbon. Nature. 1991. Vol. 354. P. 56–58. https://doi.org/10.1038/354056a0
2. *Avramov K. V., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K. K., Myrzaliyev D.* Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonl. Dyn. 2019. Vol. 98. P. 1853–1876. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05292-z
3. *Uspensky B., Avramov K., Nikonov O., Sahno N.* Dynamic instability of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite joined conical-cylindrical shell in supersonic flow. Int. J. of Struct. Stab. and Dyn. 2022. Vol. 22. 2250039. https://doi.org/10.1142/S0219455422500390
4. *Raii-Tabar H.* Computational modelling of thermo-mechanical and transport properties of carbon nanotubes. Physics Reports. 2004. Vol. 390. P. 235–452. https://doi:10.1016/j.physrep.2003.10.012
5 *Iijima S., Brabec C., Maiti A., Bernholc J.* Structural flexibility of carbon nanotubes. J. Chem. Phys. 1996. Vol. 104. P. 2089–2092. https://doi.org/10.1063/1.470966
6. *Yakobson B. I., Campbell M. P., Brabec C. J., Bernholc J.* High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes. Comput. Mater. Sci. 1997. Vol. 8. P. 241–248. https://doi.org/10.1016/S0927-0256(97)00047-5
7. *Li R., Kardomateas G. A.* Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model. ASME J. of Appl. Mech. 2007. Vol. 74. P. 1087–1094. https://doi.org/10.1115/1.2722305
8. *Hu Y. G., Liew K. M., Wang Q., He X. Q., Yakobson B. I.* Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. J. of the Mech. and Phys. of Sol. 2008. Vol. 56. P. 3475–3485. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.08.010
9. *Chowdhury R., Wang C. Y., Adhikari S.* Low frequency vibration of multiwall carbon nanotubes with heterogeneous boundaries. J. of Phys. D. 2010. Vol. 43. 085405. https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/8/085405
10. *He X. Q., Kitipornchai S., Wang C. M., Liew K. M.* Modeling of van der Waals force for infinitesimal deformation of multi-walled carbon nanotubes treated as cylindrical shells. Int. J. of Sol. and Struc. 2005. Vol. 42. P. 6032–6047. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.045
11. *Hoseinzadeh M. S., Khadem S. E.* Thermo elastic vibration and damping analysis of double-walled carbon nanotubes based on shell theory. Phys. E. 2011. Vol. 43. P. 1146–1154. https://doi.org/10.1016/j.physe.2011.01.013
12. *Asghar S., Naeem M. N., Hussain M.* Non-local effect on the vibration analysis of double walled carbon nanotubes based on Donnell shell theory. Phys. E. 2020. Vol. 116. 113726. https://doi.org/10.1016/j.physe.2019.113726
13.*Avramov K.V.* Nonlinear vibrations characteristics of single-walled carbon nanotubes via nonlocal elasticity. International Journal of Nonlinear Mechanics. 2018. Vol. 117. P. 149–160. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.017
14. *Fazelzadeh S. A., Ghavanloo E.* Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality. Composite Structures. 2012. Vol. 94. P. 1016–1022. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.10.014
15. *Chang T.* A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. Vol. 58. P. 1422–1433. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.05.004
16. *He X. Q., Kitipornchai S., Wang C. M., Xiang Y., Zhou Q.* A Nonlinear Van Der Waals Force Model for Multiwalled Carbon Nanotubes Modeled by a Nested System of Cylindrical Shells. ASME Journal of Applied Mechanics. 2010. Vol. 77 (6). 061006 https://doi.org/10.1115/1.4001859
17. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. 1968. 120 p. 10.1002/zamm.19690490535
18. *Zienkiewicz O., Morgan K.* Finite Elements and Approximation.1983. John Wiley & Sons, New York.
19. *Pesheck E., Boivin N., Pierre C., Shaw S. W.* Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. Nonlinear Dynamics. 2001. Vol. 25. P. 183–205. 10.1007/978-94-017-2452-4_10
20. *Nayfeh A. H., Mook D. T.* Nonlinear oscillations. 1995. New York: Wiley. 720 p. 10.1002/9783527617586
21. *Liew K. M., He X. Q., Wong C. H.* On the study of elastic and plastic properties of multi-walled carbon nanotubes under axial tension using molecular dynamics simulation. Acta Materialia. 2004. Vol. 52 (9). P. 2521–2527. https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.01.043

Отримано 15.03.2023,
в остаточному варіанті 07.06.2023