УДК 681.5; 519.2; 536

П. И. ЗАБОЛОТНЫЙ, В. Ф. ПОЖИДАЕВ

ЭНТРОПИЙНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С САМОВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Рассмотрены сложные открытые системы, подверженные воздействию различных внешних и внутренних факторов. Выполнена оценка возможности применения энтропийных подходов при разработке математических моделей, описывающих обобщенное состояние сложной открытой системы. На основе введенного в работе понятия функциональной энтропии предложена математическая модель, описывающая процесс развития самоорганизующейся системы. Показана возможность применения энтропийных подходов при разработке математических моделей, описывающих обобщенное состояние сложной открытой системы и позволяющих оценивать степень гибкости сложной системы, необходимую для ее безопасного функционирования. Предложен обобщающий параметр, позволяющий оценивать баланс факторов, приводящих к увеличению или уменьшению функциональной энтропии сложной открытой системы.

Розглянуто складні відкриті системи, на які впливають різні зовнішні і внутрішні фактори. Виконано оцінку можливості застосування ентропійних підходів при розробці математичних моделей, що описують узагальнений стан складної відкритої системи. На основі введеного в роботі поняття функціональної ентропії запропоновано математичну модель, яка описує процес розвитку систем, що самоорганізуються. Показано можливість застосування ентропійних підходів при розробці математичних моделей, які описують узагальнений стан складної відкритої системи та дозволяють оцінювати ступінь гнучкості складної системи, необхідну для її безпечного функціонування. Запропоновано узагальнюючий параметр, що дозволяє оцінювати баланс факторів, що приводять до збільшення або зменшення функціональної ентропії складної відкритої системи.

Complex open systems exposed to various external and internal factors are considered. The possibility of applying the entropy approaches to the development of the mathematical models describing the generalized state of the complex open system is estimated. Based on the used notion of the functional entropy, a mathematical model for the process of evolution of the training system is proposed. The possibility of applying the entropy approaches to the development of the mathematical models describing the generalized state of the complex open system and estimating the degree of the complex system flexibility needed for its safe operation is demonstrated. A generalized parameter for estimating a balance of the factors resulting in an increase or a decrease in the functional entropy of the complex open system is proposed.

Ключевые слова*: сложные открытые системы, самоорганизация, энтропия.*

Любая сложная система на протяжении своего жизненного цикла сталкивается с факторами, направленными на ее разрушение. Эти факторы могут быть как внешнего, так и внутреннего происхождения.

Для нормального функционирования системы в изменяющихся условиях необходимо, чтобы ей были присущи, с одной стороны, такие свойства, как управляемость и функциональная стабильность ее структур, с другой стороны, для повышения живучести система должна обладать способностью к перестройке внутренних подструктур и обеспечению перестройки взаимодействия между ними в соответствии с возникающими внутренними и внешними изменениями.

Безусловно, для такого сочетания свойств сложной структуры необходимо, чтобы она обладала определенной степенью открытости и была способна к определенным структурным изменениям. При этом следует различать процессы организации и самоорганизации систем. Несмотря на то, что общими признаками для тех и других процессов являются возрастание порядка вследствие протекания в них процессов, противоположных процессам возрастания неопределенности состояния, и стремление к установлению термодинамического равновесия, эти процессы существенно отличаются.

Результатом самоорганизации может стать возникновение, взаимодействие, кооперация и даже регенерация динамических объектов в более сложные в информационном (а возможно и в структурном) смысле, чем первоначальные объекты, из которых они возникают [1].

Однако изменение структуры системы может обеспечить сохранение и расширение жизненных условий только в том случае, если не будет увеличиваться неопределенность состояния структурных элементов системы.

В идеальном случае неопределенность относительно состояний элементов сложной системы как объекта управления должна полностью отсутствовать и объект управления должен находиться в требуемом состоянии с вероятностью, равной единице, что, разумеется, в реальных условиях не только невыполнимо, но и исключает адаптацию системы к любым случайным воздействиям.

Появление в системе согласующих элементов более общего значения может позволить установить новые связи с внешней средой и обеспечить восприимчивость системы к ним. Система с подобными элементами получает важнейшее свойство: адаптируемость, а факторы разрушения становятся инициаторами ее развития.

Исходя из сказанного, можно определить подобную систему как развивающуюся (способную к адаптации) или самоорганизующуюся систему, а ее гибкость – как важный показатель функциональной устойчивости и безопасности.

Поскольку поведение подобных систем носит вероятностный случайный характер, то одной из наиболее важных задач при описании поведения открытых самоорганизующихся систем является прогнозирование ее поведения. Поведение подсистем и системы в целом не является строго детерминированным. То есть они могут обладать свойствами спонтанности в изменении их поведения. Тем не менее, состояние любой системы определяется распределением ее элементов, обладающих каким-то признаком – мерой их включения в группы.

Описание состояния сложной системы требует создания соответствующих моделей. Такие модели должны описывать динамику структурных изменений элементов системы на микро- и макроскопическом уровне, учитывать изменение взаимодействий между структурными элементами, появление новых элементов, а также различные диссипативные и информационные взаимодействия и т. д.

Однако понятно, что математические модели, прогнозирующие поведение даже бинарных или трехэлементных открытых систем в изменяющихся условиях, очень сложны и их разработка не всегда возможна (или целесообразна).

Альтернативой таким математическим моделям в этом случае могут быть модели, использующие критерий, величина которого может характеризовать не только состояние системы и динамику протекающих структурных изменений, но и степень упорядоченности системы по признакам соответствия ее возможностей целям, стоящим перед ней в различные моменты времени ее функционирования.

Такой подход в качестве критерия обобщённого состояния системы позволяет использовать энтропию, поскольку именно энтропия может выступать в качестве параметра, характеризующего сложность анализа, синтеза и модификации открытых систем.

Кроме того, понятие энтропии является универсальным для рассмотрения как отдельных аспектов, так и системы в целом [2 – 4].

Целью данной работы является оценка возможности применения энтропийных подходов при разработке математических моделей, описывающих обобщенное состояние сложной открытой системы.

Как известно, закон возрастания энтропии замкнутых систем выполняется с точностью до флуктуаций, ограничивающих разнообразие микросостояний, описываемых гауссовым распределением вероятностей, уводящим систему от предельной неопределенности.

Соответственно, при рассмотрении многоэлементных открытых систем континуального типа можно предположить, что математическое ожидание их энтропии H является непрерывно дифференцируемой функцией, характеризующей состояние системы, и определяется с точностью до флуктуаций состояний отдельных элементов.

Предположим, что каждое новое состояние системы в момент времени $t+\Delta t$ является функцией состояния системы в момент времени t и что изменение параметра, характеризующего ее состояние (в данном случае энтропии), за время Δt пропорционально значению этого параметра в момент времени t с коэффициентом пропорциональности K :

$$\frac{dH}{dt}=KH \ .$$

Из последнего выражения, которое можно рассматривать как функциональное определение энтропии для данного случая, следует, что чем интенсивней рост возмущений в системе, тем быстрее нарушается упорядоченность, организованность системы.

С учетом применения гибких средств модификации рассматриваемой системы уравнение для описания модели процесса ее развития можно записать следующим образом:

$$\frac{dH}{dt}=\left(a-b\right)H \ ,$$

где a – интенсивность роста числа возмущений в системе; b – параметр, характеризующий управление процессом формирования новых структур и коррекции старых для адаптации под накопленные изменения.

Таким образом величина изменения энтропии для данного случая выступает как оценка изменения функционального состояния системы вследствие внутренних изменений и в результате взаимодействия с внешней средой.

Поскольку процесс самоорганизации системы, как правило, связан с формированием новых структур и связей между ними, то в самом простом случае параметр, характеризующий процесс самоорганизации, может быть определен следующим образом:

$$b= nH \ ,$$

где n – интенсивность включения новых структур в существующую систему.

С учетом выражения для параметра b уравнение модели, описывающей процесс развития самоорганизующейся системы, записывается следующим образом:

$$\frac{dH}{dt} = aH - nH^2 \text{ или } \frac{dH}{H(a - nH)} = dt . \qquad (1)$$

Общее решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$\frac{1}{a}\ln\left| C\frac{H}{H - \frac{a}{n}} \right| = t \text{ или } C\frac{H}{H - \frac{a}{n}} = e^{at} .$$

При начальных условиях $t = t_0$, $H = H_0$ и $C\frac{H_0}{H_0 - \frac{a}{n}} = e^{at_0}$

находим

$$C = e^{at_0}\frac{H_0 - \frac{a}{n}}{H_0} ,$$

где t_0 – начальный момент времени; H_0 – значение математического ожидания энтропии системы в начальном состоянии.

Выражение для математического ожидания энтропии системы при этом принимает следующий окончательный вид:

$$H = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{a}{H_0 n}\right) e^{-a(t - t_0)}} , \ t > t_0 . \qquad (2)$$

Для качественного исследования математической модели используем метод фазовых диаграмм и получаем зависимость $\dot{H}$ от H :

$$\dot{H} = aH = nH^2 = -n\left[\left(H + \frac{a}{2n}\right)^2 - \frac{a^2}{4n^2}\right] = 0 .$$

Рассматривая выражение (2), легко видеть, что если $H_0 = \frac{a}{n}$, то $H = H_0 = \mathrm{const}$.

То есть, энтропия системы с течением времени остается постоянной. Это соответствует идеализированному случаю полностью взаимно скомпенсированных процессов возрастания и убывания энтропии системы.

Из (2) следует, что если $\frac{a}{nH_0} < 1$ ($H_0 > \frac{a}{n}$), то функция $H(t)$ убывает, если же $\frac{a}{nH_0} > 1$ ($H_0 < \frac{a}{n}$) – возрастает.

Исходя из этого следует, что параметр $\frac{a}{n}$ можно принять в качестве некоторого обобщающего параметра баланса факторов, увеличивающих или уменьшающих энтропию сложной открытой системы.

Возрастание энтропии свидетельствует о преобладании в системе процессов деструктивного характера как на информационном, так и энергетическом уровнях.

Убывание энтропии свидетельствует о возможном протекании в открытых системах процессов самоорганизации, включающихся вследствие ответной реакции на процессы деструктивного характера.

Как отмечалось выше, изменение энтропии различных систем выполняется с точностью до флуктуаций, ограничивающих разнообразие микросостояний гауссовым распределением вероятностей.

Соответственно отклонение параметра $\frac{a}{n}$ в сторону увеличения или уменьшения зависит от реализации множества различных событий.

Из (2) следует, что отношение $\frac{a}{n}$ может быть некоторой предельной величиной энтропии $H_{пр}$ (наибольшей или наименьшей), к которой приближается энтропия системы с течением времени.

На рис. 1 и рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие вышеприведенные рассуждения в зависимости от характера поведения функции энтропии системы с флуктуациями $H(t)$ при $H_0 > \frac{a}{n}$ и $H_0 < \frac{a}{n}$ соответственно.

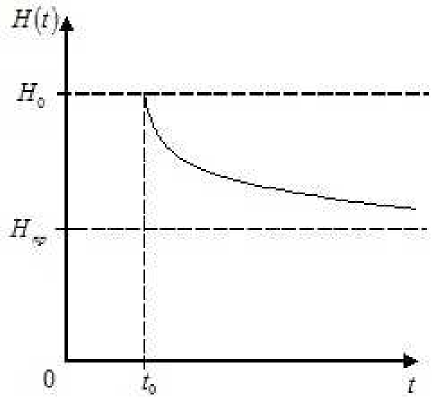

Рис. 1

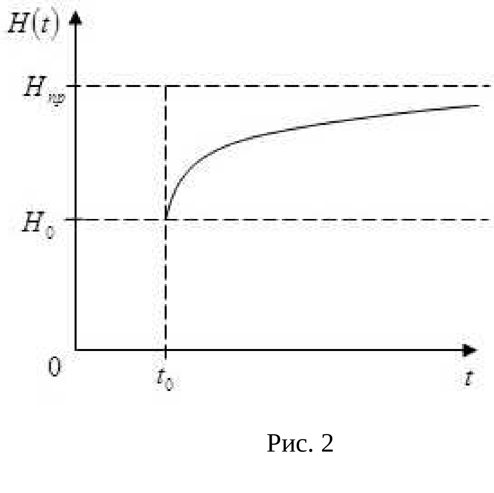

Рис. 2

Таким образом, на основе полученных результатов:

– показана возможность применения энтропийных подходов при разработке математических моделей, описывающих обобщенное состояние сложной открытой системы и позволяющих оценивать степень гибкости сложной системы, необходимую для ее безопасного функционирования;

– предложен обобщающий параметр, позволяющий оценивать баланс факторов, приводящих к увеличению или уменьшению функциональной энтропии сложной открытой системы.

1. *Хакен Г.* Синергетика / *Г. Хакен.* – М. : Мир, 1980. – 405 с.
2. *Эшби У. Росс* Введение в кибернетику : пер. с английского / *Эшби У. Росс.* – М. : Издательство иностранной литературы, 1959. – 429 с.
3. *Пригожин И.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур : пер. англ. / *И. Пригожин, Д. Кондепуди*. – М. : Мир, 2002. – 461 с.
4. *Прангишвили И. В.* Энтропийные и другие системные закономерности : вопросы управления сложными системами / *И. В. Прангишвили.* – М. : Наука, 2003. – 428 с.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепр

Получено 12.07.2016,
в окончательном варианте 14.09.2016