УДК 621.454.3 https://doi.org/10.15407/itm2024.04.010

С. І. ДОЛГОПОЛОВ, О. Д. НІКОЛАЄВ

РОЗРОБКА ПІДХОДУ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РАКЕТНОМУ ДВИГУНІ ТВЕРДОГО ПАЛИВА

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: dolmrut@gmail.com

Робочі процеси в камері згоряння ракетного двигуна твердого палива (РДТП) супроводжуються низкою фізичних явищ та ефектів, що відрізняються винятковою складністю та різноманітністю. За певних умов складна просторова течія робочого тіла в РДТП може бути представлена одновимірною осьовою течією. Для її опису використані диференціальні рівняння нерозривності, імпульсу та енергії у частинних похідних в одновимірному поданні. Для вирішення систем цих диференціальних рівнянь зазвичай використовуються різницеві схеми. Метою даної роботи є розробка підходу до математичного моделювання динамічних процесів у ракетному двигуні твердого палива без залучення традиційних різницевих схем. Розроблено нелінійну математичну модель робочих процесів у РДТП у рамках одномірної течії робочого тіла та з урахуванням взаємодії з конструкцією РДТП. Для вирішення системи диференціальних рівнянь у частинних похідних було запропоновано такий методичний підхід. Весь заряд РДТТ в осьовому напрямку було розбито на n ділянок, кількість яких вибиралася з умови опису заданих акустичних мод коливань газу в поздовжньому напрямку. Замінюючи просторові похідні різницевими співвідношеннями, система диференціальних рівнянь у частинних похідних була перетворена на систему звичайних диференціальних рівнянь. Запропонований підхід було верифіковано на модельному РДТП. Результати математичного моделювання показали, що запропонований методичний підхід є працездатним, процес чисельного інтегрування стійкий при прийнятних кроках інтегрування. В результаті рішення отримано залежності тиску та витрати робочого тіла з РДТП від часу його роботи, які задовільно узгоджуються зі статичними характеристиками. У даній моделі ракети урахування взаємодії робочих процесів з конструкцією РДТП не призвело до зміни робочих процесів у РДТП через суттєву відмінність акустичних частот коливань у РДТП та поздовжніх частот коливань конструкції ракети.

Ключові слова: *ракетний двигун твердого палива, математичне моделювання, рівняння у частинних похідних, різницева схема, звичайні диференціальні рівняння.*

Working processes in the combustion chamber of a solid-propellant rocket engine (SPRE) are accompanied by a number of physical phenomena and effects, which are extremely complex and varied. In certain conditions, a complex SPRE working medium flow may be represented as a 1D axial flow, which is described by 1D ordinary differential equations of motion, momentum, and energy. To solve them, difference schemes are usually used. The goal of this work is to develop an approach to mathematical simulation of SPRE dynamic without recourse to traditional difference schemes. This paper presents a nonlinear mathematical model of SPRE working processes in the approximation of a 1D working medium flow and with account for its interaction with the SPRE structure. To solve the system of partial differential equations, the following methodological approach was proposed. The SPRE charge was divided into n sections, whose number was chosen to describe given acoustic modes of gas oscillations in the longitudinal direction. By replacing the spatial derivatives with difference quotients, the system of partial differential equations was reduced to a system of ordinary differential equations. The proposed approach was verified using a model SPRE. The simulation results showed the workability of the proposed approach and the stability of the numerical integration process at the adopted integration steps. The calculated time dependence of the pressure and the working medium discharge rate is in satisfactory agreement with the static characteristics. In this rocket model, accounting for the interaction of the SPRE working processes with the SPRE structure did not result in any significant change in the former because the acoustic frequencies of the working medium differ significantly from the longitudinal vibration frequencies of the rocket structure.

Keywords: *solid-propellant rocket engine, mathematical simulation, partial differential equation, difference scheme, ordinary differential equation.*

Вступ. Робочі процеси в камері згоряння ракетного двигуна твердого палива (РДТП) супроводжуються низкою фізичних явищ та ефектів, що відрізняються винятковою складністю та різноманітністю [1, 2]. За останні кілька десятиліть проведено ряд досліджень, спрямованих на краще розуміння фізичних механізмів, що лежать в основі появи нелінійної нестабільності осьового горіння в РДТП [3, 4]. Мотивацією для цих досліджень було прагнення краще зрозуміти умови її виникнення та, по можливості, усунути її. Основною ознакою традиційної нелінійної осьової нестабільності горіння є наявність стійкої циклічної осьової хвилі тиску значної амплітуди у камері згоряння. Другою ознакою є періодична поява підвищення базового тиску у камері згоряння, яке супроводжує присутній осьовий або поперечний рух хвилі тиску. Комплексна чисельна модель для моделювання нелінійних динамічних умов потоку та горіння робочого тіла необхідна для пошуку можливості прогнозувати та кількісно визначати нестабільність горіння у РДТП. Ефективна модель дозволяє моделювати явища нестаціонарної течії, перехідного процесу горіння та структурної динаміки конструкції заряду та корпусу. Що стосується чисельного прогнозування, то з розвитком різних моделей компонентів процесу (наприклад, включення перехідної швидкості горіння або вібрації конструкції РДТП) відбувається їх включення до загальної програми внутрішнього балістичного моделювання. Це дозволяє проводити нові розрахунки роботи двигунів та проводити оновлені порівняння з наявними експериментальними даними, що дає найкраще розуміння впливу різних факторів на динамічні характеристики РДТП. Приклади моделювання роботи імпульсного двигуна, виконаного раніше, можна знайти у [5]–[7].

Метою даної роботи є розробка підходу до математичного моделювання динамічних процесів у ракетному двигуні твердого палива без залучення традиційних різницевих схем.

1. Нелінійна математична модель динамічних процесів у ракетному двигуні твердого палива. У цій роботі передбачається, що складна просторова течія робочого тіла в РДТП може бути представлена одновимірною осьовою течією. Це спрощення використовується для побудови математичної нелінійної моделі динамічних процесів, що дозволяє досліджувати різні види нестійкості в камері РДТП.

Для опису нестаціонарної течії робочого тіла в РДТП були використані рівняння нерозривності, імпульсу та енергії у частинних похідних в одновимірному поданні [8]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\rho u+(1-\alpha_p)\rho_s\frac{4r_b}{d}-\left(\frac{4r_b}{d}+\kappa\right)\rho, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2+p\right)=-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\rho u^2-\left(\frac{4r_b}{d}+\kappa\right)\rho u-\rho a_l\frac{\rho_p}{m_p}D, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uE+up)=-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}(\rho uE+up)-\left(\frac{4r_b}{d}+\kappa\right)\rho E+\\&+(1-\alpha_p)\rho_s\frac{4r_b}{d}\left(C_pT_f+\frac{v_f^2}{2}\right)-\rho u a_l-\frac{\rho_p}{m_p}(u_pD+Q)\end{aligned}, \tag{3}$$

де t – час; x – поздовжня координата; ρ – густина газу; u – осьова швидкість газу в активній зоні; A – місцева поперечна площа заряду; α_p – масова частка металевих включень; ρ_s – густина заряду; r_b – миттєва швидкість горіння; d – місцевий гідравлічний діаметр активної зони; κ – коефіцієнт розширення стінки, викликаний вібрацією; p – місцевий статичний тиск газу; a_l – поздовжнє прискорення; ρ_p – густина частинок у потоці; m_p – маса металевих включень; D – сила опору газу частинці; E – локальна повна питома енергія газу в активній зоні; C_p – теплоємність газу; T_f – температура полум'я; v_f – номінальна швидкість фронту полум'я; Q – передача тепла від газу до частки.

Повна питома енергія газу для ідеального газу визначається формулою

$$E = \frac{p}{(\eta - 1)\rho} + u^2/2 , \tag{4}$$

де η – показник адіабати.

Додатково вважатимемо, що зміна площі горіння заряду за довжиною заряду незначна і тому $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$. Взаємодію між газом та частинками металу не враховуємо $\alpha_p = 0$, $D = 0$, $Q = 0$.

Тоді з урахуванням відомого співвідношення

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

та деяких перетворень система рівнянь (1) – (4) набуде вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = c^2 \frac{4 r_b}{d}(\rho_s - \rho), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4 r_b}{d} u - a_l , \tag{6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4 r_b}{d}\left(E - \frac{\rho_s}{\rho}\left(C_p T_f + \frac{v_f^2}{2}\right)\right) - u a_l , \tag{7}$$

$$\rho = \frac{p}{(\eta - 1)\left(E - u^2/2\right)} . \tag{8}$$

У цій роботі розв'язок поставленої задачі здійснювався з використанням не швидкостей газу в рівняннях (5)–(8), а їх витрат. Для цього система рівнянь (5)–(8) з урахуванням зв'язку швидкості u та витрати G ($\gamma = \rho g$ – питома вага; g – прискорення вільного падіння)

$$G = A \gamma u$$

була представлена у вигляді

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c^2}{gA}\frac{\partial G}{\partial x} = c^2 \frac{4 r_b}{d}(\rho_s - \rho), \tag{9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{G}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{G}{A}\frac{\partial\left(G/\rho\right)}{\partial x} + gA\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4 r_b}{d} G - a_l A \rho g , \tag{10}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{G}{g\rho A}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{1}{g\rho A}\frac{\partial\left(G\, p \big/ \rho\right)}{\partial x}=-\frac{4r_b}{d}\left(E-\frac{\rho_s}{\rho}\left(C_pT_f+\frac{v_f^2}{2}\right)\right)-\frac{G}{g\rho A}a_l\,, \quad (11)$$

$$\rho=\frac{\frac{p}{\eta-1}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{\eta-1}\right)^2+2E\left(\frac{G}{gA}\right)^2}}{2E}\,. \quad (12)$$

2. Метод розв'язання рівнянь у частинних похідних. Для розв'язання систем диференціальних рівнянь у частинних похідних зазвичай використовуються різницеві схеми [9, 10, 6]. У нашому одновимірному випадку є дві незалежні змінні: час і осьова координата. Тут різницева схема має будувати розрахункові сітки, які включають розбивку і за часом, і за координатою. У цій роботі для математичного моделювання динамічних процесів у РДТП будемо використовувати підхід, що застосовується для моделювання динамічних процесів у системах живлення рідинних ракетних двигунів [11, 12]. При цьому підході протяжні гідравлічні лінії живлення рідинних ракетних двигунів розбиваються на кінцеві ділянки, розміри яких визначають частотний діапазон динамічних процесів, що моделюються. Таким чином, вихідна система рівнянь у частинних похідних зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Дотримуючись цього підходу, увесь заряд РДТП в осьовому напрямку будемо розбивати на n-ділянок, кількість яких вибирається з умови опису заданих акустичних мод коливань газу в поздовжньому напрямку. Для задовільного опису спектра акустичних коливань рекомендується [11] вибирати розмір ділянки таким, щоб для опису процесів з найбільшою необхідною частотою коливань було використано щонайменше 20 ділянок. Виходячи з кількості ділянок та загальної довжини заряду l, визначимо осьову довжину кожної ділянки

$$\Delta x=\frac{l}{n}\,.$$

Замінюючи просторові похідні різницевими співвідношеннями, перетворюємо систему диференціальних рівнянь (9)–(12) у систему звичайних диференціальних рівнянь виду для i-ділянки

$$\frac{dp_i}{dt}+\frac{c^2}{gA}\frac{\Delta G_i}{\Delta x}=c^2\frac{4r_{bi}}{d_i}\left(\rho_s-\rho_i\right), \quad (13)$$

$$\frac{dG_i}{dt}-\frac{G_i}{\rho_i c^2}\frac{dp_i}{tt}+\frac{G_i}{A_i}\frac{\Delta\left(G \big/ \rho\right)_i}{\Delta x}+gA_i\frac{\Delta p_i}{\Delta x}=-\frac{4r_b}{d}G_i-a_l\,A_i\,\rho_i\,g\,, \quad (14)$$

$$\frac{dE_i}{dt}+\frac{G_i}{g\rho_i A_i}\frac{\Delta E}{\Delta x}+\frac{1}{g\rho_i A_i}\frac{\Delta\left(G\, p \big/ \rho\right)_i}{\Delta x}=-\frac{4r_{bi}}{d_i}\left(E_i-\frac{\rho_s}{\rho_i}\left(C_pT_f+\frac{v_f^2}{2}\right)\right)- \,, \quad (15)$$

$$-\frac{G_i}{g\rho_i A_i}a_{li}$$

$$\rho_i = \frac{\frac{p_i}{\eta - 1} \pm \sqrt{\left(\frac{p_i}{\eta - 1}\right)^2 + 2E_i\left(\frac{G_i}{gA_i}\right)^2}}{2E}. \qquad (16)$$

Для певності вважатимемо, що відлік ділянок проводиться від закритого днища двигуна. Тоді для визначення складових різниць у системі (13)–(15) можуть бути використані такі вирази

$$\Delta G_i = G_i - G_{i-1}, \quad \Delta E_i = E_i - E_{i-1}, \qquad (17)$$

$$\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}, \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i, \qquad (18)$$

$$\Delta\left(G/\rho\right)_i = \frac{\Delta G_i}{\rho_i} - \frac{G_i}{\rho_i^2}\Delta\rho_i, \qquad (19)$$

$$\Delta\left(G\,p/\rho\right)_i = \frac{p_i}{\rho_i}\Delta G_i + \frac{G_i}{\rho_i}\Delta p_i - \frac{p_i G_i}{\rho_i^2}\Delta\rho_i. \qquad (20)$$

Для першої ділянки з урахуванням природних граничних умов поблизу закритого днища двигуна кінцеві різниці параметрів визначатимуться виразами

$$\Delta G_i = 0, \quad \Delta E_i = 0. \qquad (21)$$

Іншою граничною умовою є вільне витікання газу через критичний переріз сопла. Ця гранична умова може бути відображена у звичайному диференційному рівнянні виду

$$\frac{g\eta V_C}{c^2}\frac{dp_C}{dt} = G_n - G_C, \qquad (22)$$

де p_C – тиск поблизу переднього днища; V_C – об'єм газової порожнини поблизу переднього днища;

$$G_C = \frac{A_C\,p_C}{c}\sqrt{\left(\frac{2}{\eta + 1}\right)^{\frac{\eta+1}{\eta-1}}},$$

де A_C – площа критичного перерізу сопла.

3. Математична модель корпусу РДТП. Відомо, що поздовжні прискорення конструкції РДТП впливають на параметри в камері згоряння РДТП [8]. Система рівнянь (13)–(22) дозволяє це враховувати. Коливання корпусу у цій роботі описуються у вигляді узагальнених осциляторів, які відображають нижчі моди коливань конструкції. Рівняння вимушених пружних коливань конструкції ракети щодо положення на траєкторії польоту ракети мають вигляд для j-го тону коливань:

$$\frac{d^2 z_j}{dt^2} + \frac{\omega_j(t)\delta_j(t)}{\pi}\cdot\frac{dz_j}{dt} + \omega_j^2(t) z_j = \beta_e(t)\frac{\overline{P}}{\overline{p}_C}\frac{\left(p_C - \overline{p}_C\right)}{m_j(t)}, \qquad (23)$$

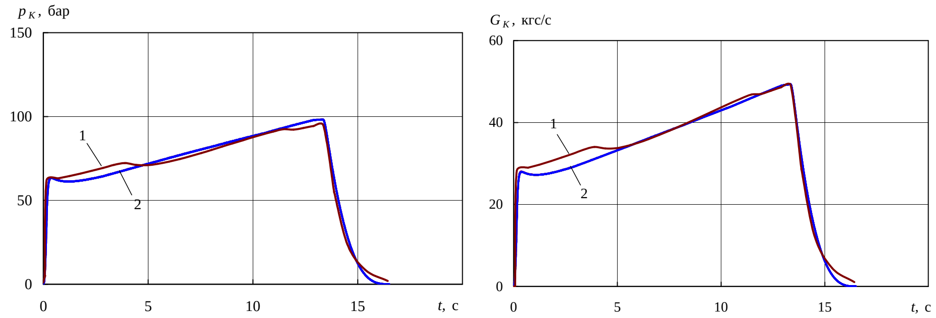
де z_j – поздовжнє переміщення конструкції ракети по траєкторії; $\omega_j(t)$, $\delta_j(t)$, $m_j(t)$ – залежності частоти коливань, декременту коливань та наведеної маси за польотом для j-го тону коливань; $\beta_e(t)$ – коефіцієнт форми коливань поблизу переднього днища; $\overline{P}$, $\overline{p}_C$ – тяга двигуна і тиск в камері на стаціонарному режимі.

З урахуванням цього прискорення a_{li}, що входить до формул (14) та (15), набуде вигляду

$$a_{li} = a_{cm} + \sum_{j=1}^{k=4} \beta_{i\,j} \frac{d^2 z_j}{dt^2}, \qquad (24)$$

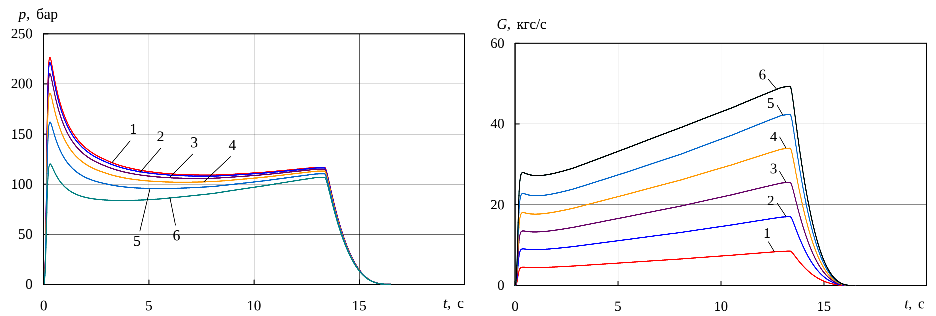
де a_{cm} – прискорення центра масс; $\beta_{i\,j}$ – коефіцієнт форми коливань i – ділянки j -го тону коливань.

4. Результати математичного моделювання. Запропонований підхід було верифіковано на модельному РДТП. Використовуючи математичну модель динаміки робочого процесу в РРТП (13) – (22) і математичну модель корпусу РДТП (23) та (24), було проведено серію розрахунків динаміки робочого процесу в РРТП. Кількість ділянок варіювалася від 6 до 24. Результати математичного моделювання показали, що запропонований методичний підхід є працездатним, процес чисельного інтегрування стійкий при прийнятих кроках інтегрування. В результаті розв'язку отримано залежності тиску



а) б)

Рис. 1 – Залежність тиску (а) і витрати робочого тіла (б) у РРДП від часу польоту: 1 – статична модель; 2 – дінамічна модель



а) б)

Рис. 2 – Залежність тиску (а) і витрати робочого тіла (б) по довжині заряду у РРДП від часу польоту: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – номери ділянок

та витрати робочого тіла з РДТП від часу його роботи, які задовільно узгоджуються зі статичними характеристиками (див. рис. 1).

Розподіл тисків та витрат продуктів згоряння по довжині заряду показано на рис. 2. З аналізу цих рисунків слід відзначити суттєве розшарування тиску і витрати на початковому відрізку часу.

У даній ракеті урахування взаємодії динамічних процесів у РДТП з конструкцією РДТП не призвело до суттєвої зміни динамічних складових робочих процесів у РДТП через суттєву відмінність значень акустичних частот коливань у РДТП та значень поздовжніх частот коливань конструкції ракети.

Висновки. Розроблено нелінійну математичну модель робочих процесів у РДТП у рамках одномірної течії робочого тіла та з урахуванням взаємодії з конструкцією РДТП. Для розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних було запропоновано такий методичний підхід. Весь заряд РДТТ в осьовому напрямку було розбито на n ділянок, кількість яких вибиралася з умови опису заданих акустичних мод коливань газу в поздовжньому напрямку. Замінюючи просторові похідні різницевими співвідношеннями, система диференціальних рівнянь у частинних похідних була перетворена на систему звичайних диференціальних рівнянь 3 n-го порядку. Запропонований підхід було верифіковано на модельному РДТП. Результати математичного моделювання показали, що запропонований методичний підхід є працездатним, процес чисельного інтегрування стійкий при прийнятних кроках інтегрування. В результаті розв'язання отримано залежності тиску та витрати робочого тіла з РДТП від часу його роботи, які задовільно узгоджуються зі статичними характеристиками. У даній математичній моделі урахування динамічної взаємодії робочих процесів у РДТП з конструкцією РДТП не призвело до суттєвої зміни робочих процесів у РДТП через суттєву відмінність значень акустичних частот коливань у РДТП та величин поздовжніх частот коливань конструкції ракети у період польоту.

Дослідження виконані за рахунок фінансування за бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень (КПКВК 6541230) на 2023 – 2024 роки».

1. *Ерохин Б. Т.* Теоретические основы проектирования РДТТ. М.: Машиностроение, 1982. 206 с.
2. *Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П.* Теория ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1980. 533 с.
3. *Blomshield F. S.* Historical Perspective of Combustion Instability in Motors: Case Studies. In Proceedings of AIAA/ASME/SAE/ASEE 37th Joint Propulsion Conference, Salt Lake City, UT, USA, 8–11 July 2001; AIAA Paper No. 2001-3875. https://doi.org/10.2514/6.2001-3875
4. *Baum J. D., Levine J. N., Lovine R. L.* Pulsed instability in rocket motors: A comparison between predictions and experiments. J. Propul. Power. 1988. No 4. P. 308–316. https://doi.org/10.2514/3.23068
5. *Greatrix D. R., Harris P. G.* Structural Vibration Considerations for Solid Rocket Internal Ballistics Modeling. In Proceedings of AIAA/ASME/SAE/ASEE 36th Joint Propulsion Conference, Huntsville, AL, USA, 17–19 July 2000; AIAA Paper No. 2000-3804. https://doi.org/10.2514/6.2000-3804
6. *Montesano J., Behdinan K., Greatrix D. R., Fawaz Z.* Internal chamber modeling of a solid rocket motor: Effects of coupled structural and acoustic oscillations on combustion. J. Sound Vib. 2008. 311. P. 20–28. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.030
7. *Greatrix D. R.* Simulation of axial combustion instability development and suppression in solid rocket motors. Int. J. Spray Combust. Dyn. 2009. No 1. P. 143–168. https://doi.org/10.1260/175682709788083399
8. *Greatrix D. R.* Scale Effects on Solid Rocket Combustion Instability Behaviour. Energies. 2011. 4. P. 90–107. https://doi.org/10.3390/en4010090
9. *Самарский А. А., Попов Ю.П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 352 с.
10. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977. 440 с.
11. *Шевяков А. А., Калнин В. М., Науменкова М. В., Дятлов В. Г.* Теория автоматического управления ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978. 288 с.
12. *Koptilyy D., Marchan R., Dolgopolov S., Nikolayev O.* Mathematical modeling of transient processes during start-up of main liquid propellant engine under hot test conditions // 8th European conference for aeronautics and space sciences (EUCASS). 2019. 15 p. https://doi.org/10.13009/EUCASS2019-236

Отримано 21.10.2024,
в остаточному варіанті 06.12.2024