УДК 629.7 https://doi.org/10.15407/itm2022.03.063

Ю. М. ГОЛЬДШТЕЙН, О. А. ФОКОВ

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕЛЬОТІВ МІЖ НИЗЬКИМИ ОРБІТАМИ З СУТТЄВОЮ РІЗНИЦЕЮ ДОВГОТ ВИСХІДНИХ ВУЗЛІВ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: jura_gold@meta.ua

В даний час на низьких орбітах розгортаються і плануються до розгортання супутникові системи, кожна з яких складатиметься з сотень супутників. Окрім того відбувається поповнення існуючих супутникових систем. З'явилася тенденція до розробки модульних супутників, що приведе до розробки зручних в обслуговуванні космічних апаратів, що складаються з багатьох невеликих структурних модулів зі стандартизованими інтерфейсними механізмами. Для збільшення терміну існування всіх цих систем та зменшення витрат на підтримку їхнього функціонування є доцільним створення системи їх технічного обслуговування. Незважаючи на відносно велику кількість робіт, що присвячені задачі зустрічі на орбіті, в них ця задача розглядається в дещо спрощеній постановці порівняно з тим, що потрібно для обслуговування космічних апаратів на низьких орбітах. Як правило, обмежуються компланарними задачами зустрічі в імпульсній постановці. У реальних умовах маневри зустрічі на низьких орбітах мають нетривіальний характер. Як відомо, орбітальні параметри низьких орбіт космічних апаратів можуть суттєво відрізнятися і досягати за довготою висхідного вузла (ДВВ) десятків і навіть сотень градусів. Це призводить до неприпустимо великих для сучасних сервісних космічних апаратів (СКА) енергетичних витрат для повороту площини їх вихідної орбіти. Зменшення енергетичних витрат на поворот площини вихідної орбіти СКА можна досягти за рахунок використання прецесії лінії вузлів внаслідок нецентральності гравітаційного поля Землі. Маневр очікування СКА на вдало обраній орбіті дозволяє усунути неузгодженість ДВВ орбіт очікування та призначення СКА і тим самим суттєво скоротити енергетичні витрати для реалізації міжорбітального перельоту СКА. Однак за рахунок тривалого очікування СКА на орбіті суттєво зростає час виконання міжорбітального перельоту. Метою статті є розробка математичної моделі двокритеріальної оптимізації перельоту СКА з двигуном малої постійної тяги між низькими близькими до кругових орбітами з істотно відмінними ДВВ. Методами розв'язку задачі є усереднення рівнянь динаміки за швидким параметром та генетичний алгоритм глобальної Парето-оптимізації. Новизна отриманих результатів полягає у формулюванні двокритеріальної задачі оптимізації та розробці математичної моделі для вибору оптимальної орбіти очікування СКА. Розроблена математична модель може бути використана при плануванні перельотів СКА між низькими близькими до кругових орбітами з істотно відмінними ДВВ.

Ключові слова: *оптимізація, орбіта очікування, границя Парето, орбітальне сервісне обслуговування, мала тяга, метод усереднення.*

At present, satellite systems, each comprising hundreds of satellites, are, and are to be, deployed in low orbits. In addition, existing satellite systems are replenished. There has appeared a trend towards the development of modular satellites, which will lead to the development of easy-to-maintain spacecraft consisting of many small structural modules with standardized interface mechanisms. To extend the life of all these systems and reduce their maintenance cost, it is advisable to develop a system for their maintenance. Despite the relatively large number of works on the rendezvous problem, this problem is considered in a somewhat simplified formulation, which is not sufficient for spacecraft servicing in low orbits. As a rule, the consideration is limited to coplanar rendezvous problems in an impulse formulation. In real conditions, rendezvous maneuvers in low orbits are nontrivial. As is known, the orbital parameters of low-orbit spacecraft may differ significantly: the difference in the longitude of ascending nodes (LAN) may reach tens and even hundreds of degrees. Because of this, the energy consumption for an orbital plane change becomes unacceptably high for modern service spacecraft. This energy consumption can be reduced by using the precession of the line of nodes due to the non-centrality of the Earth's gravitational field. A waiting maneuver of a service spacecraft in a well-chosen orbit makes it possible to eliminate the mismatch between the LANs of the service spacecraft's parking and destination orbits, thus significantly reducing the orbital transfer energy consumption. However, the long wait time of the service spacecraft in its parking orbit significantly increases the total orbital transfer time. The aim of this article is to develop a mathematical model of bicriteria optimization of a transfer of a service spacecraft with a low constant thrust engine between low near-circular orbits with significantly different LANs. This problem is solved by averaging the service spacecraft's dynamics equations over a fast parameter and using a genetic algorithm of global Pareto optimization. The novelty of the results obtained lies in a formulation of a bicriteria optimization problem and the development of a mathematical model for choosing an optimal service spacecraft parking orbit. The mathematical model developed may be used in planning service spacecraft transfers between low near-circular orbits with significantly different LANs.

Keywords: *optimization, parking orbit, Pareto front, on-orbit servicing, low thrust, averaging method.*

Вступ. Однією із центральних задач технічного обслуговування космічних апаратів (КА) на низьких орбітах є балістична частина цієї задачі. Вона включає в себе вибір орбіти очікування сервісного КА (СКА), визначення часу очікування перельоту і визначення параметрів перельоту СКА з орбіти очікування на орбіту призначення. У принциповому плані ці задачі є класичними задачами зустрічі, різні варіанти яких розглядалися, наприклад, у роботах [1 – 7]. Незважаючи на відносно велику кількість робіт за даною тематикою, задачу зустрічі в них розглянуто в дещо спрощеній постановці порівняно з тим, що потрібно в задачі обслуговування КА на низьких орбітах. Їхнє застосування, як правило, обмежене компланарними задачами зустрічі в імпульсній постановці. У реальних умовах маневри зустрічі на низьких орбітах мають нетривіальний характер. Як відомо, орбітальні параметри низьких орбіт КА можуть суттєво відрізнятися і досягати за довготою висхідного вузла (ДВВ) десятків і навіть сотень градусів. Це призводить до неприпустимо великих для сучасних СКА енергетичних витрат на поворот площини їх вихідної орбіти. Зменшення енергетичних витрат на поворот площини вихідної орбіти СКА можна досягти [8, 9] за рахунок використання прецесії лінії вузлів внаслідок нецентральності гравітаційного поля Землі. Маневр очікування СКА на вдало обраній орбіті дозволяє усунути неузгодженість ДВВ орбіт очікування та призначення СКА і тим самим суттєво скоротити енергетичні витрати на реалізацію міжорбітального перельоту СКА. Однак, за рахунок тривалого перебування на орбіті очікування суттєво зростає час виконання міжорбітального перельоту СКА. Лише відносно невелика кількість із відомих робіт містить аналіз перельоту СКА з орбіти очікування на орбіту призначення в імпульсній постановці при великій різниці в їх ДВВ. Робіт з аналогічної тематики для СКА з двигунами малої тяги існує значно менше.

У зв’язку із цим в даний час існує потреба в удосконаленні існуючих і розробці нових математичних моделей для багатокритеріальної оптимізації схем перельоту СКА з двигуном малої тяги між низькими орбітами очікування і призначення з ДВВ, що істотно відрізняються.

Постановка задачі. Розглядається задача виконання міжорбітального перельоту СКА з електричним ракетним двигуном постійної тяги між низькими близькими до кругових орбітами очікування і призначення з невеликою різницею нахилів і з довготами висхідних вузлів, що суттєво відрізняються. Орбіти очікування та призначення мають наступні параметри: великі півосі – $a_{оч}$, $a_{пр}$, нахили – $i_{оч}$, $i_{пр}$ та довготи висхідних вузлів – $\Omega_{оч}$, $\Omega_{пр}$. У задачі передбачається, що СКА перебуває на орбіті в режимі очікування запиту на обслуговування. На момент надходження запиту визначається початкова різниця ДВВ орбіт очікування і обслуговування СКА. Якщо початкова різниця ДВВ орбіт очікування і обслуговування СКА більше зміни різниці ДВВ за час перельоту СКА між цими орбітами, то СКА продовжує політ по орбіті очікування до початку міжорбітального перельоту, який починається в момент, коли різниця ДВВ орбіт очікування і призначення СКА дорівнює зміні різниці ДВВ за час перельоту СКА.

Якщо початкова різниця ДВВ орбіт очікування й призначення СКА менше або дорівнює зміні різниці ДВВ за час перельоту СКА між цими орбітами, то СКА відразу починає переліт між орбітами очікування і призначення. В роботі не береться до уваги дія гравітаційних збурювань більш високого порядку, ніж ті, що пов’язані із впливом другої зональної гармоніки. Не беруться до уваги і збурювання за рахунок впливу атмосфери Землі, тяжіння інших планет і сонячного тиску.

Метою статті є розробка математичної моделі двокритеріальної оптимізації перельоту СКА з двигуном малої постійної тяги між низькими близькими до кругових орбітами з істотною відмінністю ДВВ.

Усереднені рівняння динаміки КА із двигуном малої тяги. У припущенні нульового ексцентриситету орбіти міжорбітального перельоту наведемо систему рівнянь динаміки КА з урахуванням впливу другої зональної гармоніки геопотенціалу Землі в зручному для проведення аналітичних досліджень вигляді рівнянь в орбітальних елементах [5, 10].

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,\frac{T}{m}\cos\beta - \frac{3\mu J_2 R_З^2}{a^4}\sin^2 i \sin u \cos u\ , \tag{1}$$

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{T}{m}\sin\beta\cos u - \frac{3\mu J_2 R_З^2}{a^4}\sin i \cos i \sin u \cos u\ , \tag{2}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{T}{m}\sin\beta\,\frac{\sin u}{\sin i} - \frac{3\mu J_2 R_З^2}{a^4}\sin i \cos i \sin^2 u\ , \tag{3}$$

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - \sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{T}{m}\sin\beta\,\frac{\sin u}{\tan i} + \frac{3\mu J_2 R_З^2}{a^4}\left(4\cos^2 i - 1\right)\sin^2 u\ , \tag{4}$$

де a – велика піввісь, i – нахил, Ω – довгота висхідного вузла, u – аргумент широти, m – маса СКА, T – тяга двигуна СКА, β – кут рискання тяги, $R_З$ – екваторіальний радіус Землі, μ – гравітаційний параметр Землі, J_2 – друга зональна гармоніка Землі.

На орбіті перельоту КА керування здійснюється двигуном постійної малої тяги при нульовому куті тангажа за рахунок зміни величини й напрямку кута рискання тяги β і параметра γ. Керуючий кут рискання β змінює знак кожні пів-обороту орбіти при значеннях аргументу широти u рівних¥ і ¥ +® та має вигляд (5)

$$\beta = \begin{cases} -\tilde{\beta} & u \in [\gamma, \gamma + \pi] \\ \tilde{\beta} & u \in [0, \gamma] \cup [\gamma + \pi, 2\pi] \end{cases}, \tag{5}$$

де $\tilde{\beta} \in [-\pi, \pi]$, $\gamma \in [0, \pi]$.

На орбіті очікування КА двигун виключений і тяга дорівнює нулю.

Для коротких міжорбітальних перельотів КА із ракетними двигунами постійної малої тяги зменшенням маси за рахунок витікання робочого тіла, як правило, можна знехтувати. Прискорення ε СКА за рахунок тяги постійно і має вигляд (6)

$$\varepsilon = \frac{T}{m}. \tag{6}$$

Дотримуючись методики [5, 10] усереднимо систему рівнянь динаміки (1) – (4) по швидкому параметру – аргументу широти u. У результаті усереднення, за умови (5), отримаємо наступну систему усереднених рівнянь динаміки

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\varepsilon \cos\tilde{\beta}\,, \tag{7}$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\varepsilon \sin\tilde{\beta}\,\sin\gamma\,, \tag{8}$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\varepsilon\frac{\sin\tilde{\beta}}{\sin i}\cos\gamma - \frac{3}{2}J_2\sqrt{\frac{\mu}{a^7}}\,R_З^2\cos i\,, \tag{9}$$

$$\left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\varepsilon\frac{1}{\tan i}\sin\tilde{\beta}\cos\gamma + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - \frac{3}{2}J_2\sqrt{\frac{\mu}{a^7}}R_З^2\left(4\cos^2 i - 1\right), \tag{10}$$

з початковими умовами $a_0, i_0, \Omega_0,\ u_0$.

При значенні параметра $\gamma = \pi/2$ система рівнянь (7) – (10) спрощується до вигляду (11) – (14)

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\varepsilon \cos\tilde{\beta}\,, \tag{11}$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\varepsilon \sin\tilde{\beta}\quad, \tag{12}$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = -\frac{3}{2}J_2\sqrt{\frac{\mu}{a^7}}\,R_З^2\cos i\,, \tag{13}$$

$$\left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - \frac{3}{2}J_2\sqrt{\frac{\mu}{a^7}}R_З^2\left(4\cos^2 i - 1\right). \tag{14}$$

Рівняння (11) і (12) мають аналітичні розв’язки (15) і (16)

$$a(t) = a_0\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}t\right)^{-2}, \tag{15}$$

$$i(t) = i_0 - \frac{2}{\pi}\tan\tilde{\beta}\log\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}t\right). \tag{16}$$

Розв’язок рівняння (13) визначається числовим інтегруванням з використанням (15) і (16) і має вигляд (17)

$$\Omega(t) = \Omega_0 - \frac{3}{2}J_2\sqrt{\mu}R_З^2\int_0^t a(t)^{-7/2}\cos i(t)\,dt. \tag{17}$$

На орбітах очікування тяга і прискорення КА ε дорівнюють нулю. У силу цього рівняння (7) – (9) для орбіт очікування суттєво спрощуються і мають аналітичні розв’язки (18) – (20):

$$a(t) = a_0\,, \tag{18}$$

$$i(t) = i_0\,, \tag{19}$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \omega\, t\,, \tag{20}$$

де ω – постійна за величиною швидкість прецесії ДВВ обчислюється за формулою (21)

$$\omega = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{(a_0)^7}}\, R_З^2 \cos i_0\,. \tag{21}$$

При значеннях $\gamma = 0$ або π і $\tilde{\beta} = \pm\pi/2$ система рівнянь (7) – (10) має вигляд (22) – (24):

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 0\,, \tag{22}$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = 0\,, \tag{23}$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \mp \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\mu}}\, \varepsilon \frac{1}{\sin i} - \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{a^7}}\, R_З^2 \cos i\,. \tag{24}$$

Рівняння (22) і (24) мають аналітичні розв’язки (25) – (27):

$$a = a_0\,, \tag{25}$$

$$i = i_0\,, \tag{26}$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \left(\mp \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a_0}{\mu}}\, \varepsilon \frac{1}{\sin i_0} - \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{a_0^7}}\, R_З^2 \cos i_0 \right) t\,. \tag{27}$$

Визначення параметрів міжорбітального перельоту. Орбіта перельоту СКА може складатися з однієї або двох частин. На першій частині орбіти перельоту усуваються неузгодженості між великими півосями і нахилом орбіт очікування і призначення СКА і змінюється ДВВ. Політ СКА по першій частині орбіти перельоту здійснюється при значенні керуючого параметра $\gamma_1 = \pi/2$.

З використанням (15), (16) сформулюємо крайову задачу для визначення керуючого параметра $\tilde{\beta}_1$ й часу $t_{пер}^1$ польоту по першій частині орбіти перельоту у вигляді системи трансцендентних рівнянь (28), (29) :

$$a_{пр} = a_{оч}\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}_1\sqrt{\frac{a_{оч}}{\mu}}t^1_{пер}\right)^{-2}, \qquad (28)$$

$$i_{пр} = i_{оч} - \frac{2}{\pi}\tan\tilde{\beta}_1\log\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}_1\sqrt{\frac{a_{оч}}{\mu}}t^1_{пер}\right), \qquad (29)$$

де $a_{оч}$, $i_{оч}$ велика піввісь і нахил орбіти очікування СКА, а $a_{пр}$, $i_{пр}$ – велика піввісь і нахил орбіти призначення СКА.

Система трансцендентних рівнянь (28), (29) має аналітичний розв'язок (30)

$$\tilde{\beta}_1 = \begin{cases} \beta^* \; якщо \; a_{оч} < a_{пр} \\ \pi + \beta^* \; якщо \; a_{оч} > a_{пр} \; та \; i_{оч} < i_{пр} \\ -\pi + \beta^* \; якщо \; a_{оч} > a_{пр} \; та \; i_{оч} > i_{пр} \end{cases}, \qquad (30)$$

де

$$\beta^* = \arctan\left[\frac{\pi(i_{оч} - i_{пр})}{2}\left[\log\left(\sqrt{\frac{a_{оч}}{a_{пр}}}\right)\right]^{-1}\right].$$

Час польоту $t^1_{пер}$ по першій частині орбіти перельоту визначається формулою (31)

$$t^1_{пер} = \left(1 - \sqrt{\frac{a_{оч}}{a_{пр}}}\right) \Big/ \left(\varepsilon\cos\tilde{\beta}_1\sqrt{\frac{a_{оч}}{\mu}}\right). \qquad (31)$$

Довгота висхідного вузла СКА Ω_1 наприкінці першої частини орбіти перельоту відповідно (17) має вигляд (32)

$$\Omega_1 = \Omega_{оч} + \Delta\Omega_1 = \Omega_{оч} - \frac{3}{2}J_2\sqrt{\mu}R_3^2\int_0^{t^1_{пер}} a_1(t)^{-7/2}\cos i_1(t)\,dt, \qquad (32)$$

де $\Delta\Omega_1$ – зміна ДВВ СКА за час польоту по першій частині орбіти перельоту, а $a_1(t)$ і $i(t)$ розраховуються за наступними формулами

$$a_1(t) = a_{оч}\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}\sqrt{\frac{a_{оч}}{\mu}}t\right)^{-2},$$

$$i(t) = i_{оч} - \frac{2}{\pi}\tan\tilde{\beta}\log\left(1 - \varepsilon\cos\tilde{\beta}\sqrt{\frac{a_{оч}}{\mu}}t\right).$$

Необхідність у реалізації другої частини орбіти перельоту виникає при наявності неузгодженості між ДВВ СКА Ω_1 наприкінці першої частини орбіти перельоту і ДВВ $\Omega_{пр}$ орбіти призначення СКА. Політ СКА на другій частині орбіти перельоту здійснюється при значенні керуючих параметрів $\gamma_2 = 0$ або π і $\tilde{\beta}_2 = \pm\pi/2$. За час польоту по другій частині орбіти перельоту велика піввісь і нахил орбіти СКА відповідно (22) і (23) не змінюються. Значення ДВВ у кінці другої частини орбіти перельоту відповідно (24) має вигляд (33)

$$\Omega_{np} = \Omega_1 + \left(\mp \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a_{np}}{\mu}} \varepsilon \frac{1}{\sin i_{np}} - \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{a_{np}^7}} R_З^2 \cos i_{np} \right) t_{nep}^2 . \qquad (33)$$

Час перельоту t_{nep}^2 по другій частині орбіти перельоту отримано з використанням (33). Він має вигляд (34)

$$t_{nep}^2 = \left| \left(\Omega_{np} - \Omega_1 \right) \times \left(\mp \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a_{np}}{\mu}} \varepsilon \frac{1}{\sin i_{np}} - \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{a_к^7}} R_З^2 \cos i_{np} \right)^{-1} \right| . \qquad (34)$$

Спільний час перельоту визначається наступною формулою

$$t_{nep} = t_{nep}^1 + t_{nep}^2 .$$

Для обчислення маси робочого тіла Δm, що необхідно для виконання перельоту, використано формулу (35)

$$\Delta m = \frac{T}{c} t_{nep} , \qquad (35)$$

де c – швидкість витікання робочого тіла, T – тяга двигуна.

Визначення тривалості очікування перельоту. Використання орбіти очікування дозволяє за рахунок різниці швидкостей прецесії ДВВ для орбіти очікування й орбіти призначення СКА усунути суттєву неузгодженість ДВВ цих орбіт. Тривалість маневру очікування зростає з ростом різниці ДВВ орбіти очікування і орбіти призначення СКА і зменшується зі зростанням різниці між висотами орбіт очікування й призначення. На рисунку 1 наведено графіки залежності швидкості прецесії ДВВ для близьких до кругових орбіт з різними висотами і нахилом.

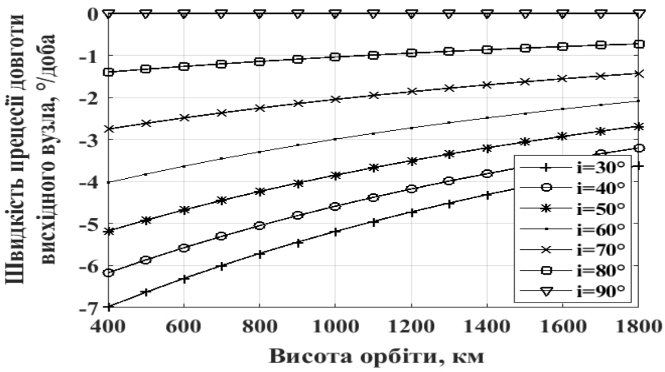

Рис. 1 – Швидкість прецесії довготи висхідного вузла взалежності від висоти і нахилу орбіти, °/доба (i – нахил орбіти)

За умовами задачі початкова неузгодженість ДВВ орбіт очікування і призначення СКА $\Delta\Omega_0$ повинна дорівнювати сумі змін неузгодженостей ДВВ орбіт очікування й призначення СКА за час польоту СКА по орбітах очікування й перельоту. Сформулюємо це у формульному вигляді (36)

$$\Delta\Omega_0 = \Delta\Omega_{оч} + \Delta\Omega_{пер} \;, \qquad (36)$$

де $\Delta\Omega_{оч}$ й $\Delta\Omega_{пер}$ – відповідно зміни неузгодженостей ДВВ СКА за час його польоту по орбітах очікування й перельоту.

З використанням (36) отримуємо формулу (37) для визначення $\Delta\Omega_{оч}$

$$\Delta\Omega_{оч} = \Delta\Omega_0 - \Delta\Omega_{пер} \;. \qquad (37)$$

Початкова неузгодженість $\Delta\Omega_0$ ДВВ орбіт очікування й призначення СКА визначається в залежності від значень $\Omega_{оч}$, $\Omega_{пр}$, $\omega_{оч}$ і $\omega_{пр}$, де $\Omega_{оч}$, $\Omega_{пр}$ і $\omega_{оч}$, $\omega_{пр}$ – відповідно ДВВ і швидкості прецесії орбіт очікування і призначення.

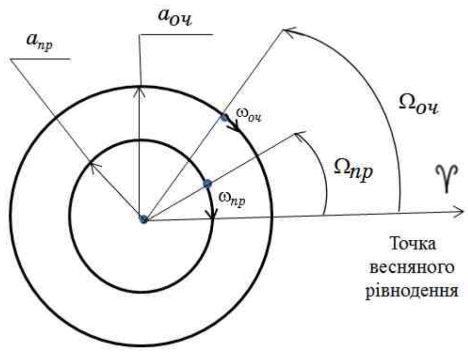

Рис. 2 – Схема маневру очікування

На рисунку 2 наведено один з можливих варіантів схеми маневру очікування. Всього можливо чотири варіанти співвідношення $\Omega_{оч}, \Omega_{пр}$, $\omega_{оч}$ і $\omega_{пр}$.

1. $\Omega_{оч} > \Omega_{пр}$, $\omega_{оч} > \omega_{пр}$.
2. $\Omega_{оч} < \Omega_{пр}$, $\omega_{оч} > \omega_{пр}$.
3. $\Omega_{оч} > \Omega_{пр}$, $\omega_{оч} < \omega_{пр}$.
4. $\Omega_{оч} < \Omega_{пр}$, $\omega_{оч} < \omega_{пр}$.

Швидкості прецесії орбіт призначення $\omega_{пр}$ й очікування $\omega_{оч}$ з врахуванням (21) мають вигляд (38) і (39):

$$\omega_{пр} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{(a_{пр})^7}} R_З^2 \cos i_{пр} \,, \qquad (38)$$

$$\omega_{оч} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{(a_{оч})^7}}\, R_З^2 \cos i_{оч} \,. \qquad (39)$$

У формулах (40) – (43) наведено отримані в результаті аналізу варіантів 1–4 формули для визначення початкової неузгодженості по ДВВ $\Delta\Omega_0$ орбіт очікування й призначення

$$\Delta\Omega_0 = 2\pi - (\Omega_{оч} - \Omega_{прн}),\ якщо\ \Omega_{оч} > \Omega_{пр}\ \ та\ \ \omega_{оч} > \omega_{пр}\ , \qquad (40)$$

$$\Delta\Omega_0 = (\Omega_{пр} - \Omega_{оч}),\ якщо\ \Omega_{оч} < \Omega_{пр}\ \ та\ \ \omega_{оч} > \omega_{пр}\,, \qquad (41)$$

$$\Delta\Omega_0 = (\Omega_{оч} - \Omega_{пр}),\ якщо\ \Omega_{оч} > \Omega_{пр}\ \ та\ \ \omega_{оч} < \omega_{пр}\ , \qquad (42)$$

$$\Delta\Omega_0 = 2\pi - (\Omega_{пр} - \Omega_{оч}),\ якщо\ \Omega_{оч} < \Omega_{пр}\ \ та\ \ \omega_{оч} < \omega_{пр}\,. \qquad (43)$$

Час очікування перельоту $t_{оч}$ з урахуванням (37) визначається формулою (44)

$$t_{оч} = \left(\Delta\Omega_0 - \Delta\Omega_{пер}\right) / \Delta\omega\,, \qquad (44)$$

де $\Delta\Omega_{пер}$ – зміна неузгодженості ДВВ орбіт очікування й призначення СКА за час польоту по орбіті перельоту визначається формулою (45)

$$\Delta\Omega_{пер} = \left|\Delta\Omega_1 - \omega_{оч}\, t_{пер}^1\right|. \qquad (45)$$

$\Delta\omega$ обчислюється за формулами (46) або (47)

$$\Delta\omega = \omega_{оч} - \omega_{пр},\ якщо\ \omega_{оч} > \omega_{пр}\ , \qquad (46)$$

$$\Delta\omega = \omega_{пр} - \omega_{оч},\ якщо\ \omega_{оч} < \omega_{пр}\,. \qquad (47)$$

Сумарна тривалість польоту t по орбіті очікування і орбіті перельоту визначається за формулою (48)

$$t = t_{оч} + t_{пер}\,. \qquad (48)$$

Вибір оптимальної висоти орбіти очікування СКА. За умовами задачі потрібно знайти оптимальну висоту орбіти очікування СКА $h_{оч}^*$, яка задовольняє системі обмежень $h_{\min} \le h_{оч}^* \le h_{\max}$, де $h_{\max}$ і $h_{\min}$ – відповідно, максимальна і мінімальна припустимі висоти орбіти очікування СКА. У якості критеріїв оптимальності прийнято два суперечливі критерії: тривалість маневру очікування $t_{оч}$ і витрати робочого тіла Δm для виконання міжорбітального перельоту. Суперечливість критеріїв обумовлена тим, що зі зростанням різниці між висотами орбіт очікування і призначення тривалість очікування перельоту зменшується, а витрати робочого тіла зростають. За умовами задачі відомі висота $h_{пр}$ і нахил $i_{пр}$ орбіти призначення СКА, а також нахил орбіти очікування $i_{оч}$.

Розглянута задача є двокритеріальною задачею оптимізації, яка має наступне математичне формулювання

$$\left(t_{оч}\left(h_{оч}\right),\quad \Delta m\left(h_{оч}\right)\right) \to \min, \quad h_{\min} \le h_{оч}^{*} \le h_{\max}.$$

Вектор критеріїв є оцінкою допустимих рішень (альтернатив). Векторна оцінка альтернативи містить повну інформацію про цінність (корисність) цієї альтернативи. Порівняння будь-яких двох результатів замінюється порівнянням їх векторних оцінок. Якщо обидва критерії досягають максимуму в одній точці, то кажуть, що задача має ідеальний розв'язок. Випадки існування ідеального розв'язку в багатокритеріальній задачі дуже рідкісні. У разі відсутності "ідеального розв'язку " шукається компромісний розв'язок.

У задачі багатокритеріальної оптимізації альтернатива називається оптимальною за Парето, якщо не існує іншої альтернативи, яка була б кращою. Альтернативи, оптимальні за Парето, утворюють передню сторону Парето (множину невдосконалюваних альтернатив). Передня сторона Парето характеризується тим, що для її елементів жоден критерій не може бути покращений без погіршення іншого.

Для розв'язку розглянутої задачі оптимізації визначено передню сторону Парето [11, 12]. Подальший вибір оптимального розв'язку задачі проведено з елементів передньої сторони Парето з використанням додаткових умов. В розглянутій задачі для побудови передньої сторони Парето використано генетичний алгоритм глобальної оптимізації, який реалізовано у пакеті прикладних програм Scilab.

Ілюстративний приклад. Наведемо приклад Парето-оптимізації висоти орбіти очікування СКА для перельоту з орбіти очікування з нахилом $i_{оч} = \mathbf{60}°$ на орбіту призначення з висотою $h_{пр} = 500$ км, нахилом $i_{пр} = \mathbf{60}°$ і ДВВ $\Omega_{пр} = \mathbf{40}°$. Про оптимальну орбіту очікування відомо, що її ДВВ $\Omega_{оч} = \mathbf{20}°$, а висота орбіти очікування $h_{оч}^{*}$ повинна задовольняти обмеженням $600 \text{ км} \le h_{оч}^{*} \le 1000 \text{ км}$. У якості критеріїв оптимальності прийнято два суперечливі критерії: тривалість маневру очікування $t_{оч}$ і витрати робочого тіла Δm для виконання міжорбітального перельоту. За умовами задачі відомо, що СКА має рушійну установку з чотирма стаціонарними плазмовими двигунами СПД–140 із сумарною тягою $T = \mathbf{0{,}3} \times \mathbf{4}\ H$ і швидкістю витікання робочого тіла $2000 \times$ 9.81м/с. СКА має власну початкову масу 1500 кг і масу вантажу 500 кг.

Результати проведеної оптимізації наведено у графіках на рисунках 3 і 4. На рис. 3 наведено графік передньої сторони Парето. В якості додаткової умови використано обмеження, що тривалість маневру очікування не повинна перевищувати 40 діб. З використанням графіка на рис. 3 в якості оптимального допустимого розв'язку обрано точку зі значеннями критеріїв $t\left(h_{оч}^{*}\right) = 40$ діб, $\Delta m\left(h_{оч}^{*}\right) = 15$ кг, оскільки вона відповідає мінімуму витрати робочого тіла для заданої тривалості маневру очікування.

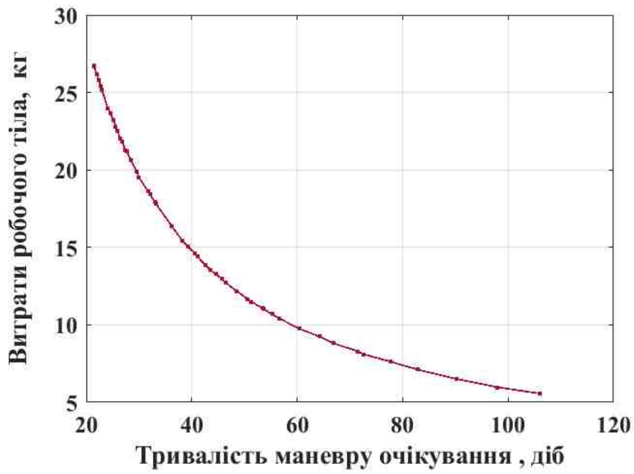

Рис. 3 – Передня сторона Парето

Оптимальну висоту орбіти перельоту визначено з графіка на рис. 4 для $t\left(h^*_{\hat{\imath}\div}\right)=40$ ä³á . Вона дорівнює $h^*_{\hat{\imath}\div}=771$ êì .

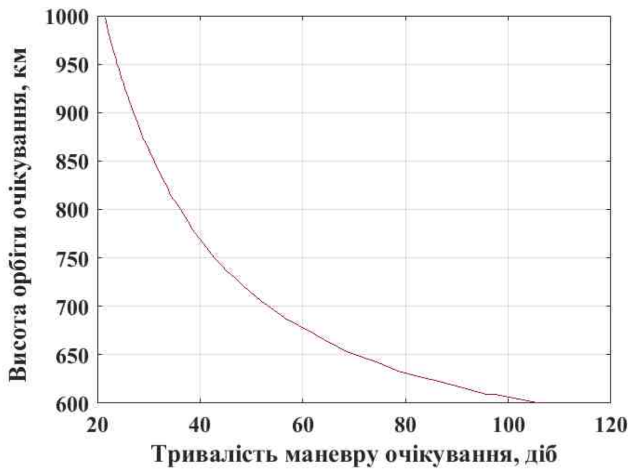

Рис. 4 – Залежність висоти орбіти очікування від часу очікування

Висновки. Для СКА із двигуном малої постійної тяги з використанням методу усереднення по швидкому параметру розроблено математичну модель просторового перельоту між низькими близькими до кругових орбітами з суттєвою різницею довгот висхідних вузлів. Аналітично вирішено крайову задачу міжорбітального перельоту. Визначено програмні керування і оцінено витрати робочого тіла для реалізації перельоту. Розроблено двокритеріальну математичну модель вибору оптимальної висоти орбіти очікування СКА. Використання розробленої математичної моделі проілюстровано прикладом оптимізації висоти орбіти очікування СКА. Отримані результати можуть бути корисні при плануванні перельотів СКА між низькими близькими до кругових орбітами з істотною відмінністю довгот висхідних вузлів.

1. *Marec J. P.* Optimal Space Trajectories. Elsevier, 2012. 356 p.
2. *Razoumny Yu. N., Razoumny V. Yu., Spencer D. B., et al*. The concept of on-orbit-servicing for next generation space system development and its key technologies. Proceedings of the 68th International Astronautical Congress IAC. 2017. Vol. 16. P. 10486–10499.

3. *Alpatov A. P., Holdstein Y. M.* On the choice of the ballistic parameters of an on-orbit service spacecraft. Технічна механіка. 2019. № 1. С. 25–37. https://doi.org/10.15407/itm2019.01.025
4. *Cerf M.* Low–thrust transfer between circular orbits using natural precession. J. Guid. Contr. Dynam. 2016. Vol.39, №10. P. 232–239. https://doi.org/10.2514/1.G001331
5. *Zhang S., Han C., Sun X*., New solution for rendezvous between geosynchronous satellites using low thrust, J. Guid. Contr. Dynam. 2018. Vol.41, № 3. P.1–10. https://doi.org/10.2514/1.G003270
6. *Labourdette P. A* software for rendezvous between near-circular orbits with large initial ascending node difference. Proceedings of the 17th International symposium on space flight dynamics. 2003. P. 130–142.
7. *Chen H., Ho K.* Integrated space logistics mission planning and spacecraft design with Mixed-Integer Nonlinear Programming. Journal of Spacecraft and Rockets. 2018. Vol. 55, №. 2. P. 365–381. https://doi.org/10.2514/1.A33905
8. *Legge Jr*. Optimization and valuation of recongurable satellite constellations under uncertainty. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2014. 320 p.
9. *Li H., Chen S., Baoyin H.*, J2-perturbed multitarget rendezvous optimization with low thrust. J. Guid. Control Dyn. 2018. Vol.41, № 3. P. 802–808. https://doi.org/10.2514/1.G002889
10. *Гольдштейн Ю. М.* Про вибір орбіти базування сервісного космічного апарата. Технічна механіка. 2020. № 3. С. 30–38. https://doi.org/10.15407/itm2020.03.030
11. *Popovici N.* Pareto reducible multicriteria optimization problems. A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2005. Vol. 54, Is. 3. P. 253–263. https://doi.org/10.1080/02331930500096213
12. Kim I. Y., de Weck O., L. Adaptive weighted-sum method for bi-objective optimization: Pareto front generation. Structural and multidisciplinary optimization. 2005. Vol. 29. P. 149–158. https://doi.org/10.1007/s00158-004-0465-1

Отримано 20.07.2022,
в остаточному варіанті 12.08.2022