УДК 519.677:531.332

В. С. ШЕХОВЦОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ СКАТЫВАНИЯ. НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ СТАРОЙ ПРОБЛЕМЫ

Государственное предприятие «КБ «Южное»
Государственного космического агенства Украины
ул.Криворожская, 3, 49008, Днепр, Украина, e-mail:alexsh@dfni.dp.ua

Метою роботи є розробка нового методу рішення відомої задачі про брахистохрону (визначення кривої найскорішого скачування), дослідження оптимальності кривих скачування, що отримуються з його допомогою, а також проведення числових оцінок часу скачування по запропонованих кривих і часу скачування по кривих, які отримуються з використанням класичного методу. Обґрунтовано актуальність поставленої мети роботи. Показано, що запропонований метод вирішення задачі, яка розглядається, може бути використаний для вирішення задач технічної механіки.

Метод розроблений з використанням результатів досліджень першої варіації функціоналу з автономною підінтегральною функцією для задачі з закріпленими кінцями. Введено припущення про ненульові значення варіації функції в граничних точках. Показано, що при використанні цього припущення і введенні деяких інших припущень і обмежень можна розширити клас допустимих функцій, серед яких слід шукати екстремальні криві. Розроблено процедуру визначення умов екстремальності для такого класу функцій. Показано, що в її основі лежать дві умови, однією з яких є рівняння Ейлера. Нова умова екстремальності неінваріантна щодо системи координат. При сумісному використанні отриманих умов побудовано дві криві, які задовольняють необхідним і достатнім умовам оптимальності при представленні другої варіації функціоналу у параметричному вигляді. Наведено результати порівняння часу скачування матеріальної точки по запропонованих кривих і по класичних екстремалях. Показано, що час скачування по запропонованих кривих менший, ніж по класичних екстремалях.

Целью работы является разработка нового метода решения известной задачи о брахистохроне – определении кривой наискорейшего скатывания, – исследование оптимальности кривых скатывания, получаемых с его помощью, а также проведение численных оценок времени скатывания по предлагаемым кривым и времени скатывания по кривым, получаемым при использовании классического метода. Обоснована актуальность поставленной цели работы. Показано, что предлагаемый метод решения рассматриваемой задачи может быть использован для решения задач технической механики.

Метод разработан с использованием результатов исследований первой вариации функционала с автономной подинтегральной функцией для задачи с закрепленными концами. Введено допущение о ненулевых значениях вариации функции в граничных точках. Показано, что при использовании этого допущения и введении некоторых других допущений и ограничений можно расширить класс допустимых функций, среди которых следует искать экстремальные кривые скатывания. Разработан метод определения условий экстремальности для такого класса функций. Показано, что в его основе лежат два условия экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Новое условие экстремальности неинвариантно относительно системы координат. При совместном использовании полученных условий построены две кривые, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям оптимальности при представлении второй вариации функционала в параметрическом виде. Приведены результаты сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и скатывания по классическим экстремалям. Показано, что время скатывания по предлагаемым кривым меньше, чем при скатывании по классическим экстремалям.

The aim of this work is to develop a new method for the solution of the well-known brachistochrone problem (the determination of the curve of fastest descent), to study the optimality of descent curves obtained with its help, and to estimate the descent time for the proposed curves and for those obtained by the classical method. The topicality of this aim is substantiated. It is shown that the proposed method may be used in the solution of problems of technical mechanics.

The method is developed based on the study of the first variation of a functional with an autonomous integrand for a fixed-end problem. The function variation at the boundary points is assumed to be nonzero. It is shown that this assumption and the introduction of some other assumptions and limitations allow one to widen the class of functions among which extremal descent curves should be sought for. A procedure is developed for the determination of extremality conditions for this class of functions. It is shown that this procedure is based on two conditions, one of which is the Euler equation. The new extremality condition is not invariant under the coordinate system. Used together, the two extremality conditions have made it possible to construct two curves that meet the necessary and sufficient extremality conditions when the second functional variation is represented in parametric form. The descent time for the proposed curves is compared with that for the classical extremals, and the former is shown to be shorter than the latter.

Ключевые слова: *первая вариация функционала, совместное использова-*

ние условий экстремальности, неинвариантность относительно системы координат, параметрическая форма второй вариации, оптимальные кривые скатывания.

Задача о брахистохроне – определении кривой наискорейшего скатывания – была впервые поставлена в 1696 году Иоганном Бернулли. Задача состояла в том, чтобы «…Среди плоских кривых, соединяющих две данные точки А и В, лежащие в одной вертикальной плоскости (В ниже А), найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси оу, материальная точка из А достигнет В за кратчайшее время…».

Решение этой задачи было получено разными способами[1] самим И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном, Я. Бернулли и Лопиталем. Результатом решения стал вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания – брахистохроной – является циклоида.

Задача о брахистохроне сыграла выдающуюся роль в математическом анализе: она оказалась первой в ряде задач, из которых сформировалось вариационное исчисление, необходимое сегодня для ученых, инженеров-исследователей, физиков и математиков. Метод, предложенный Иоганном Бернулли, дал возможность решить ряд замечательных задач из оптики, механики и геометрии.

На протяжении столь длительного времени вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания является циклоида, не подвергался сомнению, а в большинстве научных трудов по вариационному исчислению трудно найти издание, в котором бы не рассматривалась задача о брахистохроне.

Актуальность темы исследований. Одним из подразделов технической механики является динамика. К классу задач этого подраздела относят задачи, связанные с исследованием движения тел (изделий) под действием сил. В миниатюре задачу о брахистохроне можно рассматривать как задачу динамики, связанную с выбором траектории найскорейшего скатывания материальной точки под действием упрощенной силы земного тяготения.

Успехи в решении задач динамики значительно зависят от возможностей методов, использующихся для их решения.

Ниже предлагается модернизированный вариационный метод решения задач, несколько отличающийся от классического. В его основе лежит совместное использование двух условий экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Использование нового условия экстремальности позволяет расширить возможности метода за счет определения экстремалей в более широком классе допустимых функций. Предлагаемый метод может быть использован для решения разнообразных проектных задач технической механики, в том числе задач, связанных с выбором оптимальных аэродинамических форм головных частей ракет, крыльев и других элементов летательных аппаратов. Например, в работе [1] с использованием предлагаемого метода проведен выбор формы тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением при нулевом угле атаки и гиперзвуковом невязком

---

[1] Например, Лейбниц применил прием, который далее развил Эйлер. Ныне метод Лейбница–Эйлера является одним из основным методов решения задач на максимум и минимум (так называемый прямой метод в вариационном исчислении). Я. Бернулли получил свое решение при использовании принципа Гюйгенса, сделав, таким образом, еще один шаг к созданию теории Гамильтона–Якоби.

потоке. По результатам выбора предложена образующая тела вращения в форме двух уравнений в параметрической форме.

$$x = c_1 \mathrm{tg} t + c_2 \qquad t_0 \le t \le t_{k,}$$
$$y = c_3 \mathrm{tg}^3 t,$$

где x,y – декартовые координаты образующей; t – параметр.

Использование такой образующей позволяет уменьшить аэродинамическое сопротивление тела вращения по сравнению с телом вращения и образующей в форме степенной функции с показателем 0,75, полученной в работе [2]. На рис. 1 приведены классическая и предлагаемая образующие, на рис. 2 – общая аэродинамическая форма тел вращения.

Предлагаемый метод является первым шагом в разработке модернизированного метода решения вариационных задач механики со многими переменными. Использование последнего позволит получать новые результаты решения таких задач, как определение проектно-баллистических параметров ракет-носителей на начальных этапах их проектирования и на этапе разработки технических предложений; выбор оптимальных траекторий перелета космических аппаратов (КА) с одной орбиты на другую в центральном поле земного тяготения, выбор оптимальных режимов полета ракет-носителей при многократном включении маршевых двигателей при выведении КА на заданную орбиту и другие.

Актуальны также результаты решения задачи о брахистохроне. Эта задача продолжает привлекать внимание многих механиков. На сегодня более сотни публикаций посвящены именно ее обобщению. Среди них – задачи выбора оптимального движения переменной массы в разных постановках, определения оптимального движения тела (частицы) внутри тоннеля на поверхности гравитирующего шара, движения частицы в силовых полях при больших околосветовых значениях скорости и др. [3]. Использование полученных в работе результатов решения будет безусловно полезным при проведении дальнейших исследований задач механики подобного рода.

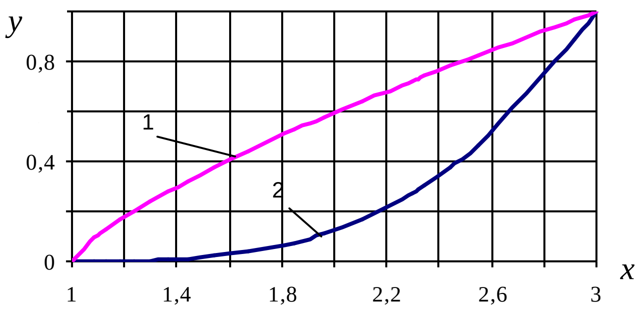
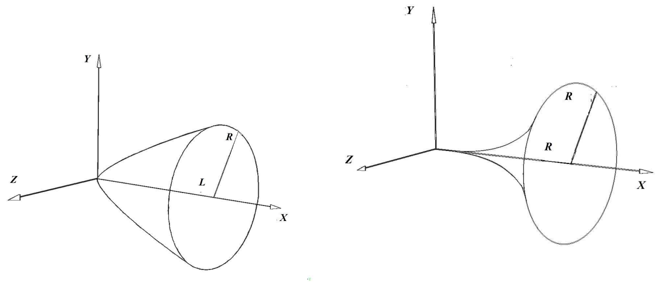


Рис. 1 – Классическая (1) и предлагаемая (2) образующие тел вращения (для граничных условий $y_o(x_0{=}1){=}0$; $y_k(x_k{=}3){=}1$; $c_3{=}0{,}01$)



a) b)

Рис. 2 – Общая аэродинамическая форма тел вращения
при использовании классической (a) и предлагаемой (b) образующих

Метод получения условий экстремальности. Рассмотрим функционал вида

$$I = \int_{x_0}^{x_k} F(y, \dot{y})dx \qquad y_0(x_0=0)=0,\ y_k(x_k)=y_k \qquad (1)$$

Построим процедуру на основе применения метода вариационного исчисления [4] при использовании вариации функции *y(x)* в виде

$$\delta y = \varepsilon \eta(x),$$

где ε – бесконечно малое постоянное число; $\eta(x)$ – некоторая непрерывная функция.

Задача состоит в выборе такой функции *y(x)*, при которой функционал (1) принимает экстремальное значение.

Запишем первую вариацию функционала (1)

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_k} \left(F_{\dot{y}}\delta\dot{y} + F_y \delta y\right)dx\,. \qquad (2)$$

Предположим, что в некотором заданном классе непрерывных функций *y(x)* существует множество кривых, каждая из которых доставляет локальный экстремум функционалу[2].

Производную вариации функции *y(x)* представим в виде:

$$\delta\dot{y}(x) = \varepsilon\dot{\eta}(x), \qquad x_0 \le x \le x_k\,, \qquad (3)$$

где $\dot{\eta}(x)$ – также непрерывная функция; здесь $\dot{\eta}(x)$ – производная от функции $\eta(x)$ по независимой переменной *x*.

Положим, что

---

[2] На первый взгляд шаткость такого предположения очевидна, так как подразумевает существование множества экстремалей без всякого на то обоснования. Причем предположение задается явно, а затем используется для получения решений, которые были постулизированы. Сомнительность такого подхода в свое время была убедительно показана Л. Янгом [5]. Но классическое вариационное исчисление базируется на подобном предположении с той лишь разницей, что оно касается существования только одной экстремали в классе заданных непрерывных функций. Вряд ли кто-либо сегодня станет отрицать эффективность современного метода вариационного исчисления, построенного на базе такого необоснованного предположения.

$$\eta(x) \neq 0\,; \qquad x_0 \le x \le x_k\,. \tag{4}$$

Допущение (4), с учетом того, что $\delta y = \varepsilon\,\eta(x)$, означает что вариации функции δy_0 и δy_k в граничных точках принимают ненулевые значения.

Допущение (4) весьма существенно, так как позволяет при введении некоторых других допущений и ограничений расширить класс допустимых функций, среди которых следует искать кривые, доставляющие функционалу экстремальные значения. В классическом вариационном исчислении при выводе уравнения Эйлера для задачи с закрепленными концами вариации функции в граничных точках приравнюются нулю.

С учетом (3) вариацию функционала (2) представим в виде:

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_k} \left(F_{\dot y}\,\dot\eta + F_y\,\eta \right) dx\,. \tag{5}$$

Будем полагать, что частные производные по y и $\dot y$ от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке независимой переменной принимают ненулевые значения

$$F_y \neq 0, F_{\dot y} \neq 0, \qquad\qquad x_0 \le x \le x_k\,. \tag{6}$$

Вариация функционала (5) будет равна нулю, если

$$F_{\dot y}\,\dot\eta(x) + F_y\,\eta(x) = 0, \qquad\qquad x_0 \le x \le x_k\,. \tag{7}$$

Учитывая условие (6), разделим уравнение (7) на F_y и проинтегрируем его

$$\frac{F_{\dot y}}{F_y}\,\eta(x)\,\Bigg|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \eta(x) \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot y}}{F_y} \right) - 1 \right) dx = 0. \tag{8}$$

Пусть выражение в скобках подынтегральной функции равно нулю:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot y}}{F_y} \right) - 1 = 0. \tag{9}$$

Тогда интеграл в уравнении (8) будет равен нулю. Для выполнения (8) его первый член также должен равняться нулю.

$$\frac{F_{\dot y}}{F_y}\,\eta(x)\,\Bigg|_{x_0}^{x_k} = 0\,, \qquad x_0 \le x \le x_k. \qquad\qquad 10)$$

Проинтегрировав уравнение (9), получим

$$F_{\dot y} = (x + c) F_y\ . \tag{11}$$

Уравнение (11) при выполнении (10) представляет собой условие экстремальности функционала (1).

Заметим, что в классическом случае уравнение (8) будет иметь такой вид

$$F_{\dot{y}}\ddot{\ }(x)\Big|_{x_0}^{x_k} - \int\limits_{x_0}^{x_k} \ddot{\ }(x)\left(\frac{d}{d_x}F_{\dot{y}} - F_y\right)d_x = 0\,. \qquad (12)$$

Уравнение (12) будет иметь место, если

$$\frac{d}{dx}F_{\dot{y}} - F_y = 0\,, \qquad (13)$$

$$F_{\dot{y}}\ddot{\ }(x)\Big|_{x_0}^{x_k} = 0\,. \qquad (14)$$

Таким образом, при выполнении предположений (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять уравнениям (11) и (13):

$$F_{\dot{y}} = (x + c)F_y\,, \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dx}F_{\dot{y}} - F_y = 0\,. \qquad (16)$$

Определим условие совместного выполнения уравнений (15) и (16). Продифференцируем уравнение (15):

$$\frac{dF_{\dot{y}}}{dx} = F_y + (x + c)\frac{dF_y}{dx}\,. \qquad (17)$$

Подставив в (17) уравнение (16), с учетом (6) получим:

$$F_y = c_1, \qquad c_1 \neq 0. \qquad (18)$$

Из условий (6) и (18) следует, что для того чтобы уравнения (15) и (16) определяли искомую экстремаль, необходимо, чтобы частная производная по *y* от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке была ненулевой постоянной величиной.

С учетом (6) и (18) уравнение (15) будет иметь такой вид:

$$F_{\dot{y}} = c_1 x + c_2\,, \qquad c_1 \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k\,. \qquad (19)$$

Первый интеграл уравнения Эйлера (16) имеет вид:

$$F - \dot{y}F_{\dot{y}} = c_3, \qquad x_0 \text{ á } x \text{ á} x_k\,. \qquad (20)$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять одновременно уравнениям (19) , (20)

$$\begin{aligned} &F_{\dot{y}} = c_1 x + c_2; \\ &F - \dot{y}F_{\dot{y}} = c_3; \end{aligned} \qquad c_1 \neq 0,\ x_0 \text{ á } x\text{á}x_k\,. \qquad (21)$$

Выполнение допущений (10) и (14). Условия (4), (6) определяют ограничения на значения функций $\ddot{\ }(x), F_{\dot{y}}, F_y$, с учетом которых ищется искомое решение. Допущения (10) и (14) выполняются при соблюдении условия

(18) и первого уравнения (21). Действительно, подставив в уравнение (7) условие (18) и первое уравнение (21), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\ddot{\ }(x)}{\ddot{\ }(x)} = -\frac{c_1}{c_1 x + c_2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\ddot{\ }(x) = \frac{c_0}{c_1 x + c_2}, \qquad c_0 > 0. \tag{22}$$

Подставив выражение (22) в условия (10), (14), получим

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\ddot{\ }(x)\Big|_{x_0}^{x_k} = \frac{c_0}{c_1}\Big|_{x_0}^{x_k} = 0, \qquad x_0 \le x \le x_k,$$

$$F_{\dot{y}}\ddot{\ }(x)\Big|_{x_0}^{x_k} = c_0\Big|_{x_0}^{x_k} = 0, \qquad x_0 \le x \le x_k. \tag{23}$$

Выполнение второго условия (23) означает выполнение уравнения Эйлера (13), с использованием которого определяется классическая экстремаль.

Особый случай. Умножим уравнение (8) на ~ и подставим в подинтегральную функцию полученное выражение для $\ddot{\ }(x)$

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}¢y(x)\Big|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \sim \frac{c_0}{c_1 x + c_2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right) - 1\right)dx = 0. \tag{24}$$

Если при каком-то значении $\bar{x}$

$$f(\bar{x}) = c_1\bar{x} + c_2 = 0,$$

значение подынтегральной функции в уравнении (24) станет неопределенным:

$$\sim c_0\frac{0}{0}.$$

Раскроем неопределенность. Продифференцируем функцию $f(x)$ и определим ее значение в окрестности точки $\bar{x}$:

$$f(\bar{x} + \Delta x) = c_1 dx. \tag{25}$$

Рассмотрим дифференциал dx как бесконечно малую разность, введенную в свое время Г. Лейбницем как бесконечно малую постоянную величину (которая меньше всякой конечной величины и все же не равна нулю). Подставим (25) в подынтегральную функцию уравнения (24), записав

$$\int_{x_0}^{x_k} \sim \frac{c_0}{c_1 dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right)-1\right)dx = 0. \qquad (26)$$

По предположению $\sim$ также бесконечно малая постоянная величина, которую можно рассматривать как бесконечно малую разность *dx*. Сократив ~ и *dx* в выражении (26), получим, что в точке $\bar{x}$ выражение, стоящее перед скобками в подынтегральной функции уравнения (24), примет ненулевое конечное значение, что и требовалось доказать.

Уравнения экстремали в параметрическом виде. Уравнения (21) можно представить в параметрическом виде, приняв, например,

$$\dot{y} = \mathrm{ctg}t . \qquad (27)$$

С учетом (27) уравнения (21) можно записать в общем виде :

$$\begin{aligned} &F_{\dot{y}}\left(y, \mathrm{ctg}t\right) = c_1 x + c_2 \\ &F\left(y, \mathrm{ctg}t\right) - \mathrm{ctg}t\left(c_1 x + c_2\right) = c_3. \end{aligned} \qquad (28)$$

При заданных граничных условиях уравнения (28) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &y = F_1\left(\mathrm{ctg}t, c_1, c_2, c_3, t_k\right) \\ &x = F_2\left(\mathrm{ctg}t, c_1, c_2, c_3, t_k\right) \end{aligned} \qquad (29)$$

Уравнения (29) будут представлять искомую экстремаль в параметрической форме.

Р**ешение задачи о брахистохроне**. Функционал, описывающий время скатывания, как известно, имеет вид

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}dx , \qquad y_0(x_0 = 0) = 0, y_k(x_k) = y_k . \qquad (30)$$

Условия экстремальности кривой скатывания (21) для функционала (30) запишем в виде

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c_1 x + c_2 , \qquad (31)$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2} = \sqrt{c_0} . \qquad (32)$$

Подставив уравнение (32) в уравнение (31) и проинтегрировав последнее, получим

$$y = \sqrt{c_0}\left(\frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3\right). \qquad (33)$$

Учитывая (31) – (33), можно сформулировать следующее: если искомые экстремали существуют, то они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c_1 x + c_2,$$

$$c_1 \neq 0,\ c_0 \neq 0,\ x_0 \le x \le x_k, \quad (34)$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2} = \sqrt{c_0}.$$

$$y = \sqrt{c_0}\left(\frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3\right).$$

Неинвариантность первого уравнения (34) относительно системы координат. Пусть *y(t)* является сложной функцией вида

$$y(t)=f(u(t)), \quad (35)$$

где $f(u(t))$ – непрерывная функция с ненулевой частной производной $f_u\ (u(t))$; t – параметр.

Продифференцируем (35) по параметру t

$$\frac{dy}{dt} = f_u(u(t))\frac{du}{dt}. \quad (36)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (36) на $\frac{dx}{dt}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = f_u(u(t))\frac{du}{dx}. \quad (37)$$

Подставив (37) в подинтегральную функцию функционала (30), получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\sqrt{1+f_u^{\,2}(u(t))\left(\frac{du}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}}dx, \quad y_0(x_0=0)=0,\ y_k(x_k)=y_k \quad (38)$$

Условия экстремальности (34) для функционала (38) можно представить в виде

$$f_u\ (u(t))\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_0}\,(c_1 x + c_2),$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{c_0}, \quad (39)$$

$$y = \sqrt{c_0}\left(\frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3\right).$$

Из (39) следует, что первое условие, в отличие от второго и третьего, неинвариантно относительно системы координат: в первом условии в левой части уравнения появился новый сомножитель $f_u\ (u(t))$.

Условия экстремальности для функционала (30) в параметрической форме. Подставив (27) во второе уравнение (39), получим

$$y = c_0 \sin^2 t. \tag{40}$$

Продифференцировав третье уравнение (39) и уравнение (40) по параметру t, получим

$$\frac{dy}{dt} = 2c_0 \sin t \cos t\,, \tag{41}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{c_0}\left(c_1 x + c_2\right)\frac{dx}{dt}\,. \tag{42}$$

Из первого уравнения (39) и уравнения (42) следует

$$\frac{dy}{dt} = f_u(u((t))\operatorname{ctg} t \frac{dx}{dt}\,. \tag{43}$$

Приравняв левые части уравнений (41) и (43), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2c_0 \sin^2 t}{f_u(u(t))}\,, \tag{44}$$

или

$$x = \int \frac{2c_0 \sin^2 t}{f_u\left(u(t)\right)}\,dt + c_4\,. \tag{45}$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания для функционала (30) в параметрической форме с учетом неинвариантности первого уравнения (39) и уравнения (45) будут иметь вид:

$$y = c_0 \sin^2 t, \tag{46}$$

$$x = 2c_0 \int \frac{\sin^2 t}{f_u(u(t))}\,dt + c_4\,. \tag{47}$$

Классическая экстремаль ($f_u(u(t))$ =1). При этом условии решение уравнения (47) будет иметь вид

$$x = c_0(t - 0{,}5\sin 2t) + c_4\,. \tag{48}$$

С учетом граничных условий (30) и уравнения (46) условия экстремальности кривой скатывания будут иметь вид

$$x = c_0(t - 0{,}5\sin 2t),$$

$$y = c_0 \sin^2 t$$

или

$$x=\frac{c_0}{2}\left(2t-\sin 2t\right)$$
$$y=\frac{c_0}{2}\left(1-\cos 2t\right).$$

Приняв, что $2t=t_1$, получим уравнение семейства циклоид в обычной форме.

$$x=\frac{c_0}{2}\left(t_1-\sin t_1\right),$$
$$y=\frac{c_0}{2}\left(1-\cos t_1\right),$$

где $\frac{c_0}{2}$ – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через конечную точку (x_k,y_k).

Таким образом, в случае $f_u(u(t))=1$ брахистохроной является циклоида.

Как показано во многих работах, циклоида доставляет функционалу (30) сильный минимум.

Определим время скатывания по циклоиде с учетом уравнений (48) и (44)

$$I_ц=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{t_0}^{t_k}\frac{2c_0\sin^2 t}{\sqrt{c_0}\sin^2 t}dt=\sqrt{2}\sqrt{\frac{c_0}{g}}\,t_k,$$

или

$$I_ц=\sqrt{2}\sqrt{\frac{y_k}{g}}\frac{t_k}{\sin t_k}. \qquad (49)$$

Кривая 1 (при $f_u(u(t))=1/\sin t$) Уравнение (47) при $f_u(u(t))=1/\sin t$ будет иметь вид

$$x=2c_{01}\int\sin^3 dt+c_4,$$

или

$$x=2c_{01}\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t\right)+c_4. \qquad (50)$$

С учетом граничных условий (30) уравнение (50) можно представить в форме

$$x=2c_{01}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right).$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания при $f_u(u(t))=1/\sin t$ будут иметь вид

$$x = 2c_{01}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\right).$$
$$y = c_{01}\sin^2 t \qquad (51)$$

С учетом (27) и (51) определим время скатывания по этой кривой

$$I_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{t_0}^{t_k}\frac{2c_{01}\sin^3 t}{\sqrt{c_{01}}\sin^2 t}dt = \sqrt{2}\sqrt{\frac{c_{01}}{g}}\left(1-\cos t_k\right),$$

или, с учетом второго уравнения (51)

$$I_{k1} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{y_{k1}}{g}}\left(\frac{1}{\sin t_{k1}} - \mathrm{ctg} t_{k1}\right). \qquad (52)$$

Кривая 2 (при $f_u(u(t))=1/\sin^2 t$). Выражение (47) при выполнении $f_u(u(t)) = 1/\sin^2 t$ будет иметь вид

$$x = 2c_{02}\int \sin^4 t dt + c_5$$

или

$$x = 2c_{02}\left(\frac{3}{8}t - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32}\right) + c_5 \; .$$

С учетом заданных граничных условий (30), уравнения экстремали при $f_u(u(t))=1/\sin^2 t$ будут иметь вид

$$y = c_{02} = \sin^2 t,$$
$$x = 2c_{02}\left(\frac{3}{8}t - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32}\right).$$

Определим время скатывания по предлагаемой кривой

$$I_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{t_0}^{t_k}\frac{2c_{02}\sin^4 t}{\sqrt{c_{02}}\sin^2 t}dt = 2\sqrt{\frac{c_{02}}{2g}}\int_{t_0}^{t_k}\sin^2 t dt \; ,$$

или

$$I_{k2} = \frac{\sqrt{y_{k2}}}{\sqrt{2g}}\left(\frac{t_{k2}}{\sin t_{k2}} - \cos t_{k2}\right). \qquad (53)$$

Оптимальность кривых 1 и 2. Для того чтобы кривые доставляли минимум функционалу (30), необходимо и достаточно [6], чтобы последние удовлетворяли уравнению Эйлера (условие выполняется); каждый пучок кривых с центром в точке (0,0) образовывал центральное поле, включающее кривую, проходящую через заданную точку B(x_k,y_k). Легко проверить, что для

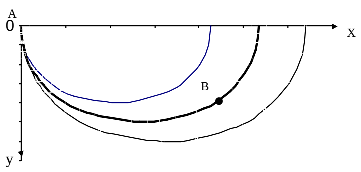


Рис.3 –Центральное поле для кривой 1

данных кривых это условие также выполняется (см., например, рис. 3 для кривой 1);

во всех точках кривых вторая производная от подинтегральной функции функционала по производной, входящей в эту функцию, должна быть неотрицательной (условие Лежандра).

Для функционала (30) условие Лежандра можно записать в виде

$$\text{¢}I = \int_{t_0}^{t_k} F_{\dot{y}\dot{y}}\text{¢}y^2 dx\,, \qquad (54)$$

где

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}\left(1+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,. \qquad (55)$$

С учетом (55), при использовании в качестве независимой переменной параметра t условие (54) представим в виде

$$\text{¢}^2 I = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{y}(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\text{¢}y}{dt}\right)^2 \frac{1}{\dot{x}(t)}dt\,. \qquad (56)$$

Подставив в подынтегральную функцию уравнения (56) условия (27), (44) и (46), получим

$$\text{¢}^2 I = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{c_0}}\left(\frac{d\text{¢}y}{dt}\right)^2 f_u\left(u(t)\right)dt\,. \qquad (57)$$

Из (57) следует, что для выполнения условия Лежандра необходимо

$$f_{\text{u}}(u(t)) \geq 0 \qquad t_0 \leq t \leq t_k\,. \qquad (58)$$

Таким образом, выбрав функцию f_{u}(u(t)) с учетом условия (58) можно построить кривую скатывания, доставляющую сильный минимум функционалу (30).

Для кривой 1 условие (58) будет иметь вид

$$1/\sin t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

для кривой 2 –

$$1/\sin^2 t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq n\pi,$$

где n любое вещественное число.

Результаты расчетов. Проведены численные оценки по сравнению времени скатывания по кривым 1 и 2 и времени по соответствующим циклоидам. Времена скатывания определялись по формулам (49), (52), (53). Циклоиды были построены, исходя из условий их прохождения через граничные точки кривых скатывания. Обеспечение этих условий проводилось в следующей последовательности. Для заданных начальных условий (t_k=3π/4, C_0=100, g=9,8 м/с^2) определялись конечные значения (x_{k1}, y_{k1}), (x_{k2}, y_{k2}) кривых 1 и 2. Полученные значения подставлялись в уравнения циклоид. Делением первого уравнения на второе каждой циклоиды формировалось трансцендентное уравнение

$$\frac{x_k}{y_k}\sin^2 t_{ki} = t_{ki} - 0{,}5\sin 2t_{ki}\,, \qquad i=1{,}2\;.$$

Искомые t_{ki} определялись численным методом. Значения C_{01}, C_{02} для циклоид определялись из уравнения

$$y_{ki}=c_{ox}\sin^2 t_{ki}\,, \qquad i=1{,}2\;.$$

На рис. 4 приведены траектории скатывания материальной точки по циклоиде и кривой 1 (f_u=1/sin$t$) из точки А (0,0) в точку В (251,185 м; 50 м); на рис. 5 – траектории скатывания по циклоиде и кривой 2 (f_u=1/sin^{2}t) из точки А (0,0) в точку В (226,715 м; 50 м). Из рисунка следует, что кривые 1 и 2 ниже («круче») циклоид, за счет чего материальная точка на нисходящей ветви набирает большую скорость. Суммарное приращение скорости на этой ветви больше, чем ее потери на восходящей (меньшей части) ветви до точки В. Это приводит к уменьшению времени скатывания по кривым 1 и 2 по сравнению с временем скатывания по соответствующим циклоидам. Численные оценки показали, что время скатывания по кривой 1 составило ~ 7,7 с, по циклоиде, проходящей через те же граничные точки, что и кривая 1, ~ 9,8 с; время скатывания по кривой 2 ~ 6,5 с, по соответствующей циклоиде ~ 9,5 с.

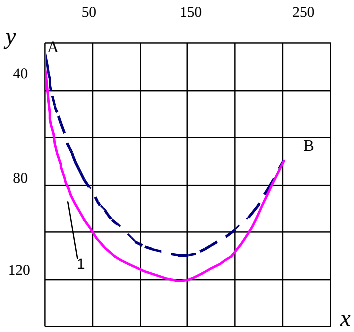


Рис. 4 – Траектории скатывания по циклоиде и кривой 1 (f_u=1/sin$t$) из точки А (0,0) в точку В (251,185 м; 50 м).

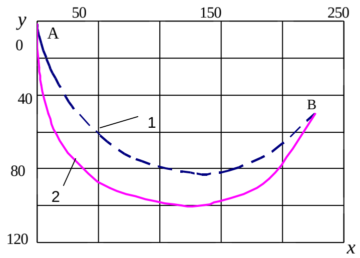


Рис. 5 – Траектории скатывания по циклоиде и кривой 2 (f_u=1/sin^2t) из точки А (0,0) в точку В (226,715 м; 50 м).

Выводы

1. В статье предложено новое решение известной задачи о брахистохроне (определении кривой наискорейшего скатывания). Решение получено с использованием результатов исследований первой вариации функционала с автономной подынтегральной функцией для задачи с закрепленными концами.

2. За счет введения некоторых допущений и ограничений расширен класс допустимых функций, среди которых следует искать экстремальные кривые скатывания. Разработан метод определения условий экстремальности для такого класса функций, в основе которого лежат два условия экстремальности кривых, одним из которых является уравнение Эйлера.

3. При совместном использовании полученных условий экстремальности построены две кривые, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям оптимальности. Проведены численные оценки сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и классическим экстремалям. Показано, что использование предлагаемых кривых обеспечивает меньшее время скатывания, чем при применении классических экстремалей.

4. Предлагаемый метод решения рассматриваемой задачи может быть использован при решении ряда задач технической механики.

1. *Шеховцов В. С.* О минимальном аэродинамическом сопротивлении тела вращения при нулевом угле атаки в гиперзвуковом невязком потоке. Космическая техника. Ракетное вооружение: сб. науч.-техн. ст. 2016. Вып. 2. Днепр: ГП «КБ «Южное». С. 3–8.

2. Теория оптимальных аэродинамических форм /Под ред. А. *Миеле*. М.: Мир, 1969. 507 с.

3. *Сумбатов А. С.* Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые последние результаты). Труды МФТИ. 2017. Том 9. №3(35). С. 66–75.

4. *Блисс Г. А.* Лекции по вариационному исчислению. М: Иностранная литература, 1960. 462 с.

5. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.

6. *Эльсгольц Л. Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 420 с.

Получено 20.11.2017,
в окончательном варианте 12.12.2017