

НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ БАЛКИ З ДИХАЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

¹ Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна

² Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,
вул. Комунальників, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: kvavr@kharkov.ua

Виведено два типи диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описують геометрично нелінійні коливання гнучких стрижнів з дихаючими тріщинами, тобто розглядаються механічні коливання з двома джерелами нелінійностей. Перша модель для опису тріщини використовує функцію тріщини, яка враховує тримірний напружений стан в місці тріщини, а друга модель для опису тріщини використовує дельта-функції. Узагальнений варіаційний принцип Ху–Вашидзу застосовується для отримання рівнянь руху в часткових похідних для першої моделі, для другої моделі застосовано принцип Гамільтона. Отримані системи диференціальних рівнянь зведено до інтегро-диференціальних шляхом нехтування інерції поздовжніх коливань та врахування крайових умов. Для опису нелінійності внаслідок дихання тріщини використовується параметр контакту. Метод–Бубнова–Гальоркіна застосовується для отримання нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь із поліноміальною нелінійністю та кусково-лінійними функціями. Для чисельного дослідження нелінійних коливань застосовується метод колокацій спільно з алгоритмом продовження розв'язків по довжині дуги з застосуванням методу автоматичного диференціювання. Застосування методу автоматичного диференціювання дозволяє поєднати точність аналітичного диференціювання з простотою чисельного при реалізації алгоритмів. Для аналізу стійкості та біфуркацій періодичних рухів розраховується матриця монодромії та розраховуються її власні значення, які називаються мультиплікаторами. Скелетні криві нелінійних нормальних форм містять дві петлі, сідло-вузлові біфуркації та біфуркації Неймарка–Сакера. Нелінійні нормальні форми в конфігураційному підпросторі істотно викривлені. Більше того, нелінійні нормальні форми на петлях скелетних кривих мають осцилювальний вигляд у конфігураційному підпросторі. Знайдені петлі на скелетних кривих можуть свідчити про наявність замкнутих петель вимушених коливань.

Ключові слова: нелінійні коливання гнучких стрижнів, дихаюча тріщина, метод Бубнова–Гальоркіна, нелінійні моди, біфуркація Неймарка–Сакера.

Two types of partial differential equations, which describe geometrically nonlinear vibrations of a beam with a breathing crack, are derived. Thus, two sources of nonlinearities are considered. The crack function is used to describe the 3D strain state near the crack in the first model. Delta functions are used to describe the crack in the second model. The Hu–Washizu variational principle is used to derive the partial differential equations of the first model. The Hamilton principle is used to derive the partial differential equations for the second model. The obtained partial differential equations are reduced to integro-differential ones by neglecting the longitudinal inertia and accounting for the boundary conditions. A contact parameter is used to describe the nonlinear breathing of the crack. The Galerkin technique is used to obtain a nonlinear system of ordinary differential equations with both polynomial nonlinearity and piecewise linear functions. To study nonlinear vibrations numerically, the collocation method is used together with an algorithm of solution continuation along the arclength using an automatic differentiation technique, which allows one to combine the accuracy of analytical differentiation with the simplicity of numerical differentiation. is used to analyze numerically nonlinear oscillations. A monodromy matrix and its eigenvalues, which are called multipliers, are calculated to analyze the stability and bifurcations of the periodic motions. The backbone curves of nonlinear modes contain two loops, saddle-node bifurcations, and Naimark–Sacker bifurcations. As follows from the numerical analysis, the nonlinear modes in the configurational subspace are essentially curved. Moreover, the nonlinear modes on the backbone curve loops have an oscillating appearance in configurational subspace. These loops may be indicative of closed loops of forced vibrations.

Keywords: nonlinear vibrations of curved beams, breathing crack, Galerkin technique, nonlinear modes, Naimark–Sacker bifurcation.

1. Вступ. Коливальні властивості балок з тріщинами становлять великий інтерес в аерокосмічній техніці, енергетиці та машинобудуванні. Тріщини спостерігаються в лопатках турбін, валах компресорів, елементах літальних апаратів. Здебільшого тріщини є джерелом нелінійності в моделях коливань конструкцій. Внаслідок появи тріщин суттєво змінюються коливальні властивості конструкції, що використовується для неруйнівного контролю конструкцій. Тому було зроблено декілька спроб дослідити коливання балок з тріщинами, які є нелійними через дихання тріщин [1]. Автори статті [2]

отримали диференціальне рівняння в частинних похідних нелінійних коливань балки на основі варіаційного принципу Ху–Васидзу. Шен, П'єр [3] використовували модель балки Ейлера–Бернуллі разом з функцією тріщин для отримання рівнянь коливань балки. Для дослідження коливань балки з тріщинами запропоновано теорію балки Крістідеса–Барра [4, 5]. Для опису коливань конструкції побудовано систему з одним ступенем вільності. Варіаційні принципи використано для отримання лінійного рівняння коливань балки з тріщиною Хондраса, Дімарогонаса, Яо [6]. Автори роботи [7] використовують нелінійні нормальні форми (ННФ) Каудерера–Розенберга для дослідження вільних нелінійних коливань балок з дихаючою тріщиною. Альтернативний підхід до теорії балок Крістідеса–Барра запропоновано в роботі Цифанського, Бересневича [8], де для опису впливу тріщини на коливання використовується дельта-функція. Використання методу скінченних елементів (МСЕ) з дельта-функціями дозволяє описувати коливання балки з довільною кількістю тріщин [9]. Динаміка геометрично-нелінійних деформацій балки з тріщиною досліджується МСЕ в роботі [10]. В роботі [11] досліджено геометричні нелінійні коливання балок з урахуванням відкритої тріщини, які описуються лінійною моделлю. Нелінійні коливання балок з кількома тріщинами досліджуються з використанням теорії Крістідеса–Барра в роботі [12]. Лінійні коливання балок з кількома тріщинами розглядаються в рамках теорії балок Ейлера–Бернуллі [13]. Поперечні тріщини моделюються граничними умовами. Вимушені коливання балки з тріщинами описуються нелійними звичайними диференціальними рівняннями з малими параметрами в роботі [14]. Для дослідження отриманої динамічної системи застосовано асимптотичний метод. Вимушені коливання балки з тріщиною проаналізовано за допомогою методу багатьох масштабів у роботі [15]. В результаті цього аналізу отримано майже-періодичні коливання балки. Біфуркації, стійкість та хаотичні стани балки з тріщиною проаналізовано чисельно з використанням методу продовження в роботах [16, 17]. Чисельне дослідження балки Ейлера–Бернуллі з тріщиною та балки Тимошенка з тріщиною з використанням дельта-функцій проведено в роботі [18]. Хаотичні коливання тріснутої балки проаналізовано в роботі [19]. Вимушені коливання тріснутої балки розглядаються на основі теорії балок Ейлера–Бернуллі в [20]. В роботах [21 – 25] для розрахунку нелінійних коливань балок з тріщинами застосовано метод скінченних елементів.

В роботі отримано два типи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь геометрично нелінійних коливань балок з тріщинами. Перший тип диференціальних рівнянь у частинних похідних базується на теорії балок Ейлера–Бернуллі, функції тріщини та геометрично нелінійній теорії. У другому типі інтегро-диференціальних рівнянь для опису поведінки балки з тріщинами використовуються дельта-функції. Отримані нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних перетворюються в систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу Бубнова–Гальоркіна та параметра контакту. Отримана динамічна система містить як поліноміальну нелінійність, так і кусково-лінійні функції, які описують пружні властивості конструкції.

Для опису вільних геометрично нелінійних коливань балки з тріщиною використано нелінійні моди Каудерера–Розенберга. Описано властивості отриманих нелінійних мод. Періодичні рухи цієї конструкції проаналізовано з використанням комбінації методу колокацій та методу продовження.

2. Рівняння геометрично нелінійних коливань балок з тріщинами.

2.1. *Балки з однією тріщиною.* Розглянемо балку завдовжки l з прямокутним перерізом, де висота та ширина позначені h та b відповідно до рис. 1. Балка має тріщину глибиною a , на відстані x_c від початку координат. Систему координат, в якій вивчають коливання балки, наведено на рис. 1. Матеріал балки є ізотропним і пружним, тому виконується закон Гука. Амплітуди згинальних коливань балки сумірні з її товщиною. Тому будемо враховувати геометрично нелінійні деформації у вигляді залежності поздовжньої сили від поперечних переміщень балки. При коливаннях балки береги поперечної тріщини змикаються і розмикаються, що описується нелінійними співвідношеннями. Така тріщина називається дихаючою. Отже, при коливаннях балки розглядатиметься два види нелінійності: геометрична нелінійність і дихання поперечної тріщини. Однак, у цьому підрозділі передбачається, що тріщина завжди відкрита, тобто береги тріщини не змикаються.

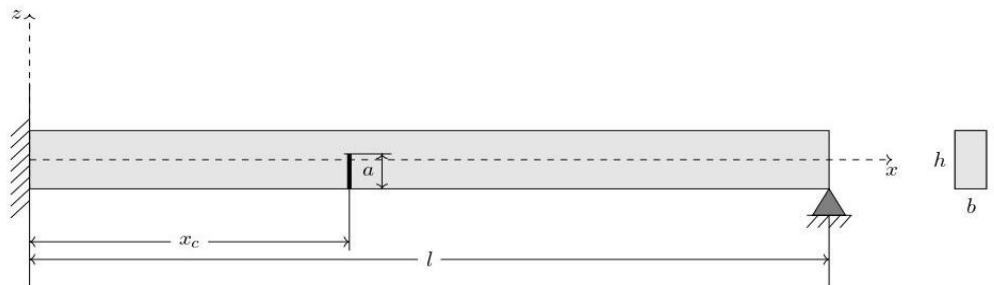


Рис. 1 – Балка з тріщиною

У цьому підрозділі ми пропонуємо розвиток теорії, представленої в [4, 3], для моделювання геометрично-нелінійних коливань балки з однією відкритою тріщиною. У цьому підрозділі вперше виводяться рівняння коливань балки з урахуванням тріщини та геометрично-нелінійного деформування. Для цього використовуємо функціонал Ху–Васидзу в такому вигляді [26]:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V [\rho \dot{u}_i^2 - T(p_i) - W(\gamma_{ij})] dV + \iiint_V \left[\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \right] \tau_{ij} + X_i u_i \right] dV + \iint_{S_p} \underline{g}_i u_i dS + \iint_{S_u} g_i (u_i - \underline{u}_i) dS \right] dt, \quad (1)$$

де V – об'єм тіла; S_p – поверхня тіла, де задано зовнішні поверхневі сили; S_u – частина поверхні тіла, де задано переміщення; X_i – зовнішні об'ємні сили; u_i – переміщення точок тіла; τ_{ij} – тензор напружень; γ_{ij} – тензор деформацій; p_i – компоненти швидкості; $T(p_i)$ – функція щільності кінетичної енергії, яка має вигляд $T(p_i) = \frac{1}{2} \delta_{ij} p_i p_j$; $W(\gamma_{ij})$ – функція щільності енергії деформації; \underline{g}_i – зовнішні сили, що діють на поверхню S_p ; \underline{u}_i – переміщення на поверхні тіла S_u ; ρ – густина тіла.

Варіація функціоналу (1) має наступний вигляд:

$$\delta J = \iiint_V \{ [\tau_{ij,j} + (\tau_{ij} u_{i,j})_j + X_i + \rho \dot{p}_i] \delta u_i +$$

$$\left[\tau_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right] \delta \gamma_{ij} + \left[\gamma_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \delta \tau_{ij} + [\rho u_i - T_{,pi}] \delta p_i \} dV + \iint_{S_p} [\underline{g}_i - g_i] \delta u_i dS + \iint_{S_u} [\underline{u}_i - u_i] \delta g_i dS, \quad (2)$$

де δ – знак варіації.

Використовуємо такий самий підхід, як і в [4]. Скористаємося моделлю балки Ейлера–Бернуллі з геометричною нелінійністю. Змінимо індексні x, y, z замість $1, 2, 3$ та u, v, w замість u_1, u_2, u_3 відповідно. Скористаємося наступними співвідношеннями [4]:

$$u = \hat{u}(x, t) - z \frac{\partial \hat{w}(x, t)}{\partial x}, v = 0, w = \hat{w}(x, t); \\ \gamma_{xx} = [-z + f(x, z)] S_1(x, t) + S_2(x, t); \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = -v \gamma_{xx}; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0; \\ \tau_{xx} = [-z + f(x, z)] T_1(x, t) + T_2(x, t); \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (3) \\ p_x = 0, p_y = 0, p_z = P(x, t); X_x = X_y = 0 = X_z = 0,$$

де $f(x, z)$ – функція тріщини, яка детально обговорюється в роботі [3]; $S_1, S_2, T_1, T_2, u, \hat{w}$ – невідомі функції, що залежать від x та t .

На відміну від роботи [3] ми вводимо T_2 та S_2 , оскільки при геометрично-нелінійних деформаціях не можна нехтувати компонентою розтягування, як наслідок маємо додаткову компоненту переміщення u . Зауважимо, що S_2 та T_2 не домножуються на функцію тріщини f . Використовуючи співвідношення (3), варіація функціонала набуває вигляду:

$$\delta J = \iiint_V \left\{ \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \left(\delta u - z \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\tau_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \rho \dot{P} \right) \delta w \right] + \left[\left(\tau_{xx} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xx}} \right) \delta \gamma_{xx} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yy}} \delta \gamma_{yy} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zz}} \delta \gamma_{zz} \right] + \left[\gamma_{xx} - \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \tau_{xx} \right\} dV. \quad (4)$$

Розглянемо доданки в (4) по черзі. Один з доданків (4) набуває такого вигляду:

$$\iiint_V \left\{ \left[\gamma_{xx} - \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \tau_{xx} \right\} dV = \\ \int_x \left[L - 2K + IS_1 + L_1 S_2 - L_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{L_1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (K - I) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta T_1 dx \\ + \int_x \left[L_1 S_1 + A \left(S_2 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \delta T_2 dx, \quad (5)$$

$$\text{де } I = \iint_A z^2 dA, L = \iint_A f^2 dA, K = \iint_A z f dA, L_1 = \iint_A f dA. \quad (6)$$

Розглянемо варіації T_1, T_2 незалежно. Тоді з (5) отримуємо таку систему рівнянь з частинними похідними:

$$L - 2K + IS_1 + L_1S_2 - L_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{L_1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (K - I) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$L_1S_1 + A \left(S_2 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = 0. \quad (7)$$

З рівнянь (7) отримуємо:

$$S_1 = AQ_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$S_2 = -Q_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$\gamma_{xx} = [-z + f(x, z)]AQ_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_1Q_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (8)$$

де A – площа поперечного перерізу; $Q_0 = \frac{I-K}{A(L-2K+I)-L_1^2}$.

Розглянемо ще один інтеграл зі співвідношення (4):

$$\iiint_V \left[\left(\tau_{xx} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{xx}} \right) \delta \gamma_{xx} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{yy}} \delta \gamma_{yy} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{zz}} \delta \gamma_{zz} \right] dV = \iiint_V (\tau_{xx} - E\gamma_{xx}) \delta \gamma_{xx} dV. \quad (9)$$

Під час виведення цього співвідношення використовувалося, що $\frac{\partial w}{\partial \gamma_{xx}} = E\gamma_{xx}$; $\frac{\partial w}{\partial \gamma_{yy}} = \frac{\partial w}{\partial \gamma_{zz}} = 0$. З (9) отримуємо: $T_i = ES_i$; $i = 1, 2$. Також з останнього інтегралу із (4) маємо $P = \frac{\partial w}{\partial t}$. Розглянемо ще один інтеграл, що входить у (4). Його можна перетворити так:

$$\iiint_V \left[\left(\tau_{xx} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{xx}} \right) \delta \gamma_{xx} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{yy}} \delta \gamma_{yy} - \frac{\partial w}{\partial \gamma_{zz}} \delta \gamma_{zz} \right] dV = \iiint_V (\tau_{xx} - E\gamma_{xx}) \delta \gamma_{xx} dV.$$

Оскільки варіації $\delta u, \delta w$ розглядаються незалежно, то можемо записати систему рівнянь:

$$\iiint_V \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \delta u dV = 0;$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho \dot{w} + z \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} \right] \delta w dV = 0. \quad (10)$$

Перше і друге рівняння системи (10) можна перетворити на такі нелінійні диференціальні рівняння із частинними похідними:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = 0;$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = EA \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (11)$$

де $Q = \frac{(I-K)AQ_0}{I}$.

Перше рівняння (11) запишемо так: $u = c(t) + x \cdot e(t) - \frac{1}{2} \int_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$, де $c(t), e(t)$ – дві константи інтегрування.

Надалі розглянемо балку, що закріплена жорстко в лівому кінці та шарнірно-оперта в правому кінці. Використовуючи граничні умови на лівому кінці, маємо: $c(t) = 0$. З граничної умови на правому кінці ($x = L$) маємо: $e(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$. Тоді інтегро-диференціальне рівняння в частинних похідних, що описує геометрично нелінійні коливання балки з однією відкритою тріщиною, має вигляд:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{EA}{2l} \left[\int_0^l \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Отже, ми отримали інтегро-диференціальне рівняння (12), яке описує геометрично нелінійні коливання балки з однією відкритою тріщиною.

2.2. Балки з довільним числом тріщин. У цьому підрозділі розглядається підхід для опису геометрично нелінійних коливань балки з довільним числом тріщин. Передбачається, що всі тріщини завжди відкриті. Скористаємося моделлю з роботи [27]. У цій моделі для опису тріщини використовується дельта-функція Дірака. Принцип Гамільтона використовується для виведення диференціальних рівнянь руху конструкції в частинних похідних. Скористаємося функціоналом у такому вигляді:

$$2J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left(EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right) dx - \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt, \quad (13)$$

де $I = I_0(1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(x - x_{ci}))$; $\delta(x - x_{ci})$ – дельта-функція; n – кількість тріщин; γ_i – параметр інтенсивності пошкодження, значення якого описано в [27]. Зазначимо, що координати тріщин x_{ci} задовільняють умові: $0 < x_{c1} < x_{c2} < \dots < x_{cn} < l$.

Розглянемо варіацію функціонала (13) і скористаємося підходом із розділу 2. В результаті отримаємо таке інтегро-диференціальне рівняння, що описує геометрично нелінійні коливання балки з тріщиною:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI_0}{l^4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\left[1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\xi - \xi_{ci}) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = \\ = \frac{EA}{2l^5} \left[\int_0^1 \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^2 d\xi \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\xi = \frac{x}{l}$. Для аналізу нелінійних коливань рівняння (14) перетворюються в нелінійну динамічну систему зі скінченним числом ступенів свободи, за допомогою методу Бубнова–Гальоркіна. Як базисні функції використовуємо власні функції для лінійної задачі, що буде розглянута в наступному підрозділі.

3. Дискретизація динамічної системи.

3.1. *Нелінійна динамічна система коливань.* Під час виведення нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) коливань конструкції припускають наявність двох видів нелінійностей (геометричної нелінійності та дихаючої тріщини). У цьому підрозділі розглянемо присутність тільки однієї такої тріщини. Для опису дихання тріщини введемо параметр контакту, який було запропоновано в роботах [16].

$$k = \begin{cases} 0; & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} |_{x=x_c} \geq 0; \\ 1; & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} |_{x=x_c} < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Отже, якщо $k = 0$ тріщина закрита, а якщо $k = 1$ тріщина відкрита.

Диференціальні рівняння в частинних похідних (12, 14), що описують геометрично нелінійні коливання балки з однією тріщиною, можна представити в одному узагальненому вигляді так:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left([1 - kQ] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{EA}{2l} \left[\int_0^l \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Це рівняння містить параметр для опису дихання тріщини. Отже, рівняння (16) описує геометрично нелінійні коливання балки з однією дихаючою тріщиною.

Згинальні коливання балки представимо так:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \Phi_i(x), \quad (17)$$

де $q_i(t)$ – узагальнені координати, $\Phi_i(x)$ – базисні функції, які мають такий вигляд:

$$\Phi_i(x) = (1 - k)W_i(x) + kW_i^-(x), \quad (18)$$

де $W_i(x)$ – власні форми коливань балки без тріщини; $W_i^-(x)$ – власні форми коливань балки з тріщиною.

Застосовуючи метод Бубнова–Гальоркіна до рівняння (16) і враховуючи внутрішнє тертя в матеріалі, отримуємо систему нелінійних ЗДР коливань балки:

$$\begin{cases} M\ddot{q} + Kq + R(q) = 0; & G(q) \geq 0; \\ \underline{M}\ddot{q} + \underline{K}q + \underline{R}(q) = 0; & G(q) < 0, \end{cases} \quad (19)$$

де

$$G(q) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} |_{x=x_c} = \sum_{i=1}^N q_i(t) W_i''(x_c);$$

$$R_i = \sum_j^N \sum_n^N \sum_m^N \hat{R}_{ijnm} q_j q_n q_m; \underline{R}_i = \sum_j^N \sum_n^N \sum_m^N \hat{\underline{R}}_{ijnm} q_j q_n q_m,$$

де $M, K, \underline{M}, \underline{K}$ – матриці мас та жорсткості відповідно; $R(q), \underline{R}(q)$ – кубічні вектор-функції відносно узагальнених координат;

$$M_{ij} = \rho A \int_0^l W_i W_j dx; K_{ij} = EI_0 \int_0^l \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} dx;$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ijnm} &= \frac{EA}{2l} \int_0^l \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_j}{\partial x} dx \int_0^l \frac{\partial W_n}{\partial x} \frac{\partial W_m}{\partial x} dx; \\ \underline{M}_{ij} &= \rho A \int_0^l W_i W_j dx; \underline{K}_{ij} = EI_0 \int_0^l Q \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} dx; \\ \hat{\hat{R}}_{ijnm} &= \frac{EA}{2l} \int_0^l \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial x} \frac{\partial \underline{W}_j}{\partial x} dx \int_0^l \frac{\partial \underline{W}_n}{\partial x} \frac{\partial \underline{W}_m}{\partial x} dx.\end{aligned}$$

Залежно від величини умови $G(q)$ виконуються різні нелінійні системи ЗДР, що описує відкриття та закриття тріщини. ЗДР (19) містять нелінійні вектор-функції $R(q)$, $\underline{R}(q)$, які описують геометрично нелінійні коливання балки.

3.2 Аналіз лінійних коливань. Розв'язок нелінійного диференціального рівняння (16) розкладається за власними формами лінійних коливань, що виражається співвідношеннями (18). Виведенню цих форм коливань присвячується цей підрозділ. У роботі [27] було запропоновано метод для отримання точних власних форм коливань балки з тріщинами. У цьому підрозділі цей метод застосовуватиметься для аналізу лінійних коливань балки з довільною кількістю тріщин. Під час дослідження лінійних коливань передбачається, що всі тріщини відкриті. Геометрична нелінійність не враховується.

Розглянемо рівняння (14) без нелінійних доданків. Розв'язок цього рівняння представимо так: $w(\xi, t) = \phi(\xi)e^{i\omega t}$, де i – уявна одиниця. Тоді функція $\phi(\xi)$ задовольнятиме такому звичайному диференціальному рівнянню:

$$\frac{d^4 \phi(\xi)}{d\xi^4} + \alpha^4 \phi(\xi) = \hat{B}(\xi), \quad (20)$$

де $\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho A l^4}{EI_0}$;

$$\hat{B}(\xi) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi'''' \delta(\xi - \xi_{ci}) + 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi''' \delta'(\xi - \xi_{ci}) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi'' \delta''(\xi - \xi_{ci}).$$

У роботі [27] показано, що розв'язок рівнянь (20) має такий вигляд:

$$2\alpha\phi(\xi) = C_1 A(\alpha, \xi) + C_2 B(\alpha, \xi) + C_3 C(\alpha, \xi) + C_4 D(\alpha, \xi), \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned}A(\alpha, \xi) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i S_i(\alpha, \xi) U(\xi - \xi_{ci}) + \sin(\alpha\xi); \\ B(\alpha, \xi) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i S_i(\alpha, \xi) U(\xi - \xi_{ci}) + \cos(\alpha\xi); \\ C(\alpha, \xi) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i S_i(\alpha, \xi) U(\xi - \xi_{ci}) + \sinh(\alpha\xi); \\ D(\alpha, \xi) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i S_i(\alpha, \xi) U(\xi - \xi_{ci}) + \cosh(\alpha\xi); \\ S_i(\alpha, \xi) &= \sin[\alpha(\xi - \xi_{ci})] + \sinh[\alpha(\xi - \xi_{ci})];\end{aligned}$$

C_1, \dots, C_4 – константи інтегрування; $U(x)$ – функція Хевісайда; $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \zeta_i, \eta_i$ – коефіцієнти, що залежать від параметрів конструкції. Ці коефіцієнти опубліковано в роботі [27].

Граничні умови для балки з жорстким закріпленням на лівому кінці та шарнірним оперенням представимо так:

$$\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0, \phi(1) = 0, \phi''(1) = 0. \quad (22)$$

Використовуючи ці граничні умови, знаходяться константи інтегрування і частотне рівняння. Частотне рівняння подається у вигляді визначника:

$$\begin{vmatrix} A(\alpha, 1) - C(\alpha, 1) & B(\alpha, 1) - D(\alpha, 1) \\ A''(\alpha, 1) - C''(\alpha, 1) & B''(\alpha, 1) - D''(\alpha, 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Це рівняння має злічену множину розв'язків $\alpha_k; k = 1, 2, \dots$, які розташовані в порядку зростання їхніх значень. За цими значеннями можна перерахувати спектр власних частот коливань $\omega_k; k = 1, 2, \dots$. Форма коливань балки з поперечними тріщинами, що відповідає частоті ω_k , знаходиться так:

$$\phi_k(\xi) = A(\alpha_k, \xi) - \beta_k B(\alpha_k, \xi) - C(\alpha_k, \xi) + \beta_k D(\alpha_k, \xi), \quad (24)$$

$$\text{де } \beta_k = \frac{A(\alpha_k, 1) - C(\alpha_k, 1)}{B(\alpha_k, 1) - D(\alpha_k, 1)}.$$

3.3. Розрахунок параметрів нелінійної динамічної системи. Коефіцієнти динамічної системи (19) містять перші та другі похідні від власних форм коливань. У свою чергу похідні від власних форм містять дельта-функції. Розрахунок таких коефіцієнтів потребує додаткові пояснення, що обговорюється в цьому підрозділі. У подальшому аналізі використовуватимемо такі співвідношення, що містять дельта-функції [27]:

$$U(x - x_0)\delta(x - x_1) = \begin{cases} 1; & x_0 < x_1; \\ 0.5\delta(x - x_0); & x_0 = x_1; \\ 0; & x_0 > x_1; \end{cases} \quad (25)$$

$$\delta(x - x_0)\delta(x - x_1) = \begin{cases} 0; & x_0 \neq x_1; \\ A\delta(x - x_0); & x_0 = x_1; \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[U^2(x - x_0)] = 2U(x - x_0)\delta(x - x_0) = \delta(x - x_0),$$

де $A = 2.013$ [28].

Власну форму коливань балки з n розкритими тріщинами (24) представимо в такому узагальненому вигляді:

$$\underline{W}_i(x) = \sum_{k=1}^n S_k^i(x)U(x - x_{0k}) + \beta_i(x). \quad (26)$$

Коефіцієнти при нелінійних доданках динамічної системи (19), що містять дельта-функції, представимо так:

$$\hat{R}_{ijnm} = \frac{EA}{2l} \hat{R}_{ij}^* \hat{R}_{nm}^*; \hat{R}_{ij}^* = \int_0^l \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_j}{\partial x} dx. \quad (27)$$

Параметр \hat{R}_{ij}^* представимо у вигляді чотирьох інтегралів так:

$$\hat{R}_{ij}^* = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^i(x)U(x - x_{0k}) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^j(x)U(x - x_{0k}) \right) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^i(x) U(x - x_{0k}) \right) \frac{\partial}{\partial x} \beta^j(x) dx \\
& + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \beta^i(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^j(x) U(x - x_{0k}) \right) dx + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \beta^i(x) \frac{\partial}{\partial x} \beta^j(x) dx. \quad (28)
\end{aligned}$$

Останній інтеграл цього співвідношення тривіальний, його можна розрахувати будь-яким чисельним методом, тому ми не будемо розглядати його. З іншого боку, перші три інтеграли містять узагальнені функції, тому їх має сенс спростити з огляду на їхні властивості. Розглянемо другий інтеграл (28). Він подається так:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^i(x) U(x - x_{0k}) \right) \frac{\partial}{\partial x} \beta^j(x) dx = \\
& \sum_{k=1}^n \int_{x_{0k}}^l \frac{\partial S_k^i(x)}{\partial x} \frac{\partial \beta^j(x)}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^n S_k^i(x) \frac{\partial \beta^j(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_{0k}}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Третій інтеграл співвідношення (28) представимо так:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \beta^i(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n S_k^j(x) U(x - x_{0k}) \right) dx = \\
& \sum_{k=1}^n \int_{x_{0k}}^l \frac{\partial \beta^i(x)}{\partial x} \frac{\partial S_k^j(x)}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \beta^i(x)}{\partial x} S_k^j(x) \Big|_{x=x_{0k}}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Розглянемо аналогічно перший інтеграл співвідношення (28). Тоді, остаточно величина \hat{R}_{ij}^* розраховується так:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{ij}^* & = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\int_{\max(x_{0m}, x_{0k})}^l \frac{\partial S_k^i(x)}{\partial x} \frac{\partial S_m^j(x)}{\partial x} dx + a_{km} \left(\frac{\partial S_k^i(x)}{\partial x} S_m^j(x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + S_m^i(x) \frac{\partial S_k^j(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{0m}} \right] + \\
& \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \beta^i(x) \frac{\partial}{\partial x} \beta^j(x) dx + \sum_{k=1}^n \left[\int_{x_{0k}}^l \frac{\partial S_k^i(x)}{\partial x} \frac{\partial \beta^j(x)}{\partial x} + \frac{\partial \beta^i(x)}{\partial x} \frac{\partial S_k^j(x)}{\partial x} dx + \right. \\
& \quad \left. \left(A S_k^i(x) S_k^j(x) + S_k^i(x) \frac{\partial \beta^j(x)}{\partial x} + \frac{\partial \beta^i(x)}{\partial x} S_k^j(x) \right) \Big|_{x=x_{0k}} \right], \quad (31)
\end{aligned}$$

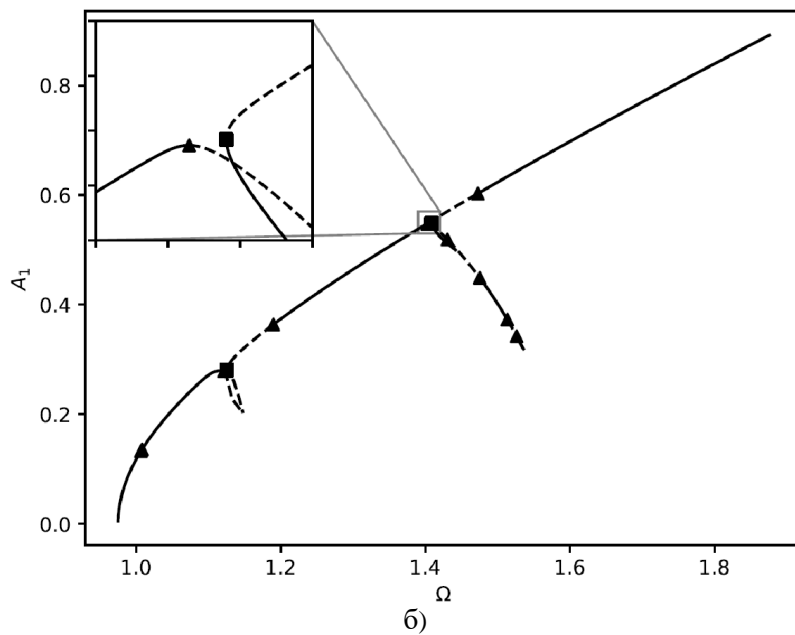
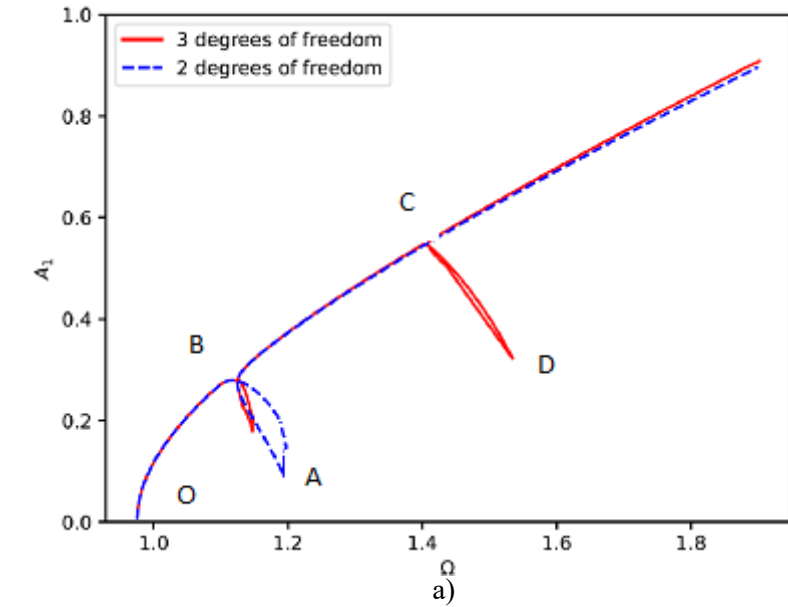
де $a_{mk} = \{1; k > m; 0.5; k = m; 0; k < m$.

4. Чисельний аналіз нелінійних нормальних форм. У цьому розділі досліджуються вільні геометрично нелінійні коливання балки з однією дихаючою тріщиною. Отже, у конструкції є два види нелінійностей. Для дослідження нелінійних вільних коливань скористаємося методологією нелінійних нормальних форм (ННФ) Каудерера–Розенберга [29 – 31]. У цьому разі переміщення подаються в конфігураційному просторі. Як було показано в [32 – 34] для чисельного моделювання скелетних кривих нелінійних нормальних форм можна використовувати розв'язання двоточкової нелінійної крайової задачі для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язання такої задачі в цій статті застосовано метод колокацій спільно з методом продовження [35 – 37]. Отримані чисельні розв'язки подаються в конфігураційному просторі у вигляді ННФ.

Нами використовувалися такі чисельні значення параметрів конструкції:

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}, \rho = 7800 \text{ кг/м}^3, l = 0.177 \text{ м}, x_c = 0.0885 \text{ м}, h = 0.01 \text{ м}, \\ b = 0.01 \text{ м}, a = 0.004 \text{ м}. \quad (32)$$

Для отримання нелінійної динамічної системи (19) скористаємося нелінійним рівнянням у частинних похідних (14). Для аналізу збіжності розв'язків отримаємо нелінійні динамічні системи з двома і трьома ступенями вільності. Дослідимо ННФ Каудерера–Розенберга для динамічних систем (19) із двома і трьома ступенями вільності. Результати розрахунків ННФ наведено на рис. 2, а), де показано залежність амплітуди коливань першої узагальненої координати q_1 від частоти вільних коливань. Скелетні криві, отримані для двох і трьох ступенів вільності, близькі. За винятком областей із петлями рішень.



а) – аналіз збіжності; б) – біфуркації та стійкість вільних коливань

Рис. 2 – Скелетні криві динамічної системи з двома та трьома ступенями вільності

Петля L_1 (рис. 2) спостерігається в системах з двома і трьома ступенями вільності, а петля L_2 тільки в системі з трьома ступенями вільності. Як видно з рисунка, коли кількість ступенів вільності збільшується, то в системі з'являються додаткові періодичні режими коливань, які мають вигляд петель скелетних кривих. Для подальшого аналізу будемо використовувати моделі з трьома ступенями вільності. Петлі на скелетних кривих ННФ було отримано в роботах [32, 33].

Досліджували стійкість і біфуркації в динамічній системі (19) із трьома ступенями вільності. Для цього розраховували мультиплікатори з результатів розрахунку матриці монодромії. Результати розрахунків стійкості та біфуркацій показано на рис. 2, б). Було виявлено сідло-вузлові біфуркації та біфуркації Неймарка–Сакера. Сідло-вузлові біфуркації позначаються маленькими чорними квадратиками, а біфуркації Неймарка–Сакера маленькими чорними трикутниками.

Розглянемо ННФ, які спостерігаються на ділянці (ОА) скелетної кривої (рис. 2, а)). ННФ таких коливань представляються в конфігураційному підпросторі (q_1, q_3) на рис. 3. ННФ є синфазними. Як випливає з результатів розрахунку, за малих амплітуд коливань, ННФ близькі до прямих ліній. При збільшенні амплітуд коливань ННФ викривляються. Підкреслимо, що за великих амплітуд коливань ННФ осцилює в конфігураційному просторі. Коливання з плином часу на цій ННФ, що осцилює, показуються на рис. 4. Як видно з цього рисунка, коливання $q_1(\tau)$ – моногармонійні, а коливання $q_3(\tau)$ – полігармонійні.

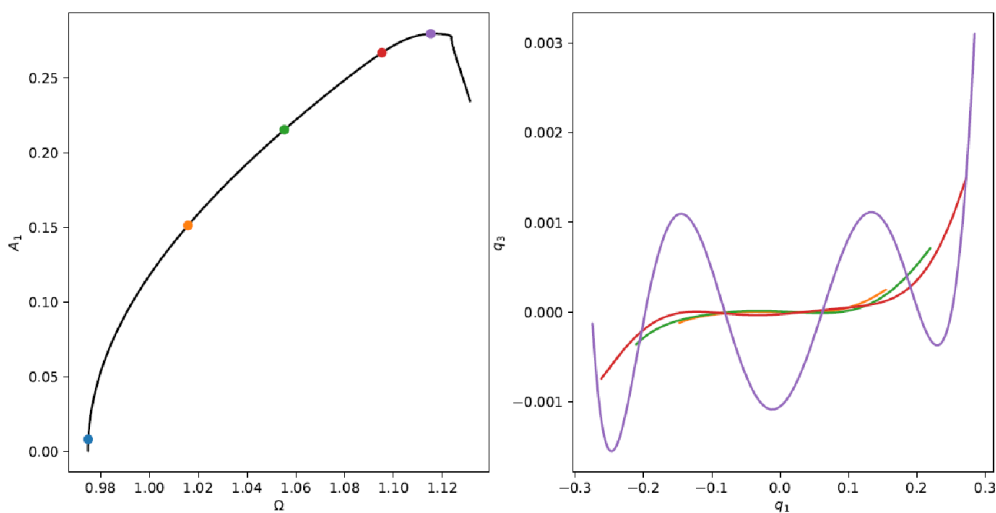


Рис. 3 – Скелетна крива і ННФ у конфігураційному підпросторі (q_1, q_3)

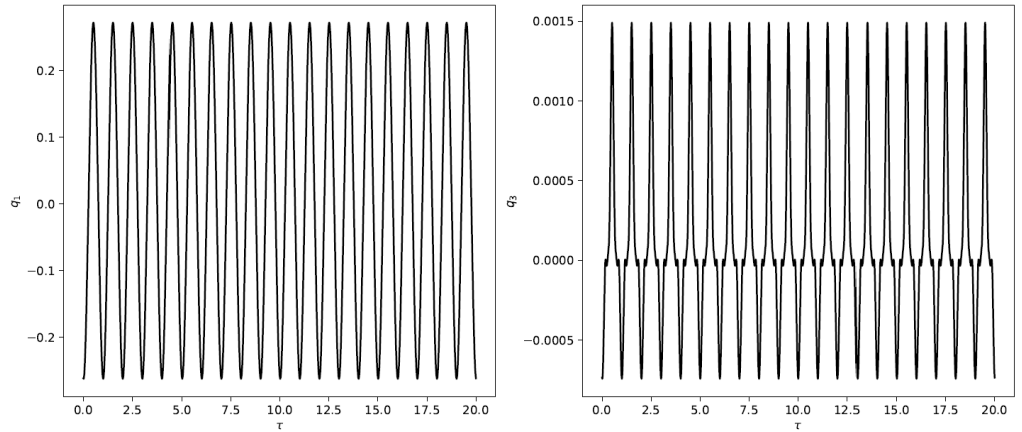


Рис. 4 – Коливання на ННФ при $\Omega = 1.095$

Тепер дослідимо вільні нелінійні коливання при великих амплітудах коливань. Розглянемо ділянку (BCD) скелетної кривої (рис. 2, а)). Результати такого аналізу наводяться на рис. 5. Зліва на цьому рисунку показується ділянка скелетної кривої і точки, в яких досліджуються ННФ. ННФ у конфігураційному підпросторі (q_1, q_3) показуються праворуч на цьому ж рисунку. За невеликих амплітуд коливань, близько точки B нелінійні нормальні слабо викривлені. На петлі L_2 (рис. 2) за великих амплітуд коливань, ННФ осцилюють, що представлено на правому рис. 5. Коливання на ННФ показуються на рис. 6 і рис. 7. На рис. 6 показуються коливання на ННФ з частотою $\Omega = 1.2$. У цьому разі коливання $q_1(\tau)$ – моногармонійні, а коливання $q_3(\tau)$ – полігармонійні. Розглянемо тепер коливання на ННФ, що має осциляційний вигляд, і належить петлі L_2 . Такі коливання показуються на рис. 7. У цьому випадку, коливання $q_1(\tau)$ – моногармонійні, а частота коливань $q_3(\tau)$ у п'ятеро більша за частоту коливань $q_1(\tau)$.

Крім описаних вище ННФ, знайдено ще одну гілку скелетної кривої, що наводиться на рис. 8. На скелетній кривій показуються точки, для яких побудовано ННФ на правому рис. 8. Усі показані ННФ є антифазними. Особливо слід підкреслити, що всі побудовані ННФ не мають спільного початку. Цьому факту є пояснення. Рухи на ННФ (рис. 8) можна представити у вигляді такого ряду Фур'є:

$$q_i = R_0^{(i)} + \sum_{j=1} R_j^{(i)} \cos(j\omega\tau), \quad (33)$$

де $R_j^{(i)}$ – амплітуди гармонік. У розкладанні координати q_1 присутня значна величина $R_0^{(1)}$. Причому, під час збільшення амплітуди коливань, величина $R_0^{(1)}$ істотно змінюється, що призводить до поведінки ННФ, показаної у рис. 8.

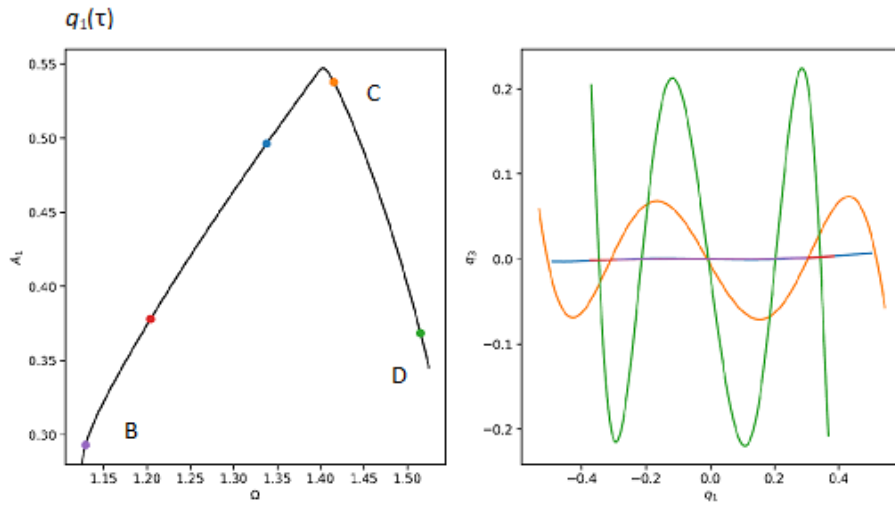


Рис. 5 – Ділянка скелетної кривої і ННФ Каудерера–Розенберга в конфігураційному підпросторі (q_1, q_3)

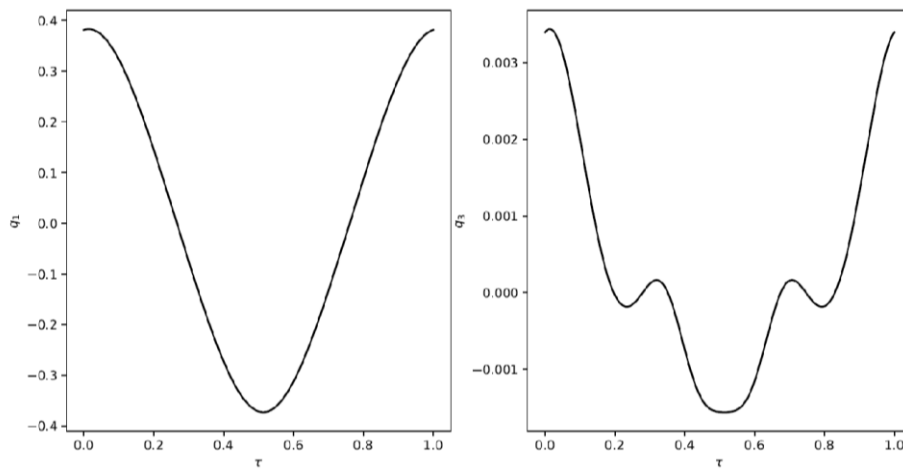


Рис. 6 – Коливання на ННФ з частотою $\Omega = 1.2$

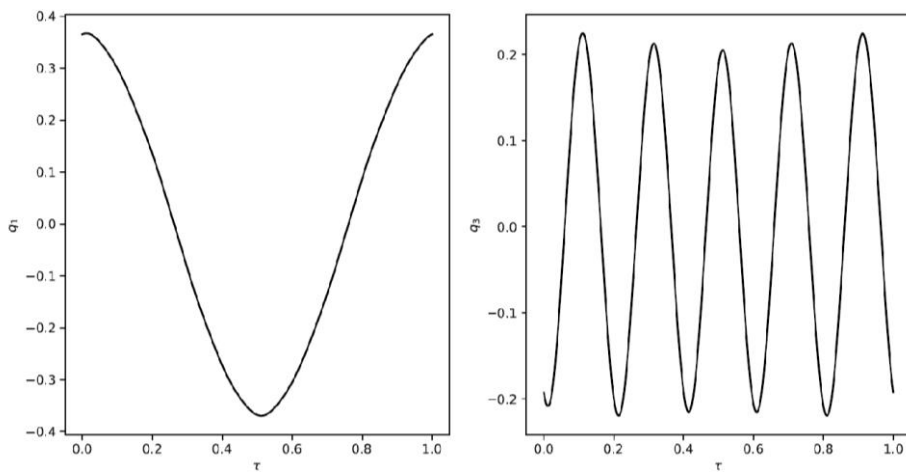


Рис. 7 – Коливання на ННФ з частотою $\Omega = 1.52$

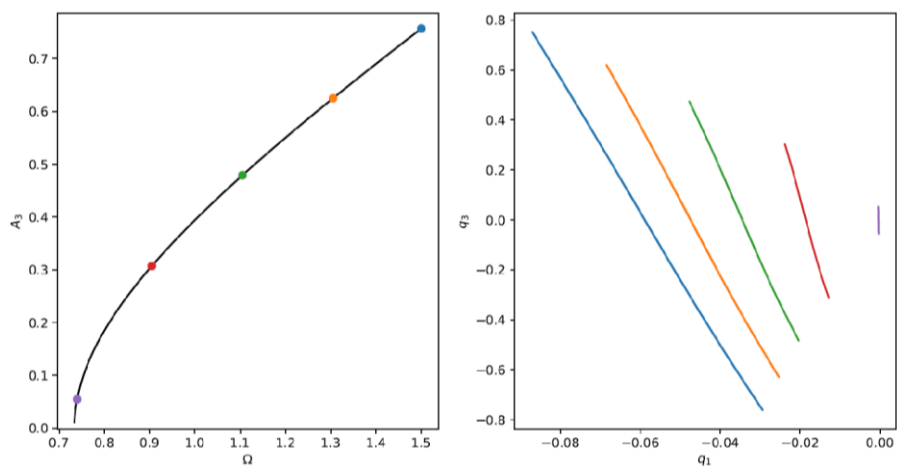


Рис. 8 – Скелетна крива та ННФ

Висновки. Для дослідження геометрично нелінійних згинальних коливань гнучких стрижнів з дихаючими тріщинами в роботі пропонується дві моделі. Перша модель виводиться з варіаційного принципу Ху–Вашидзу з використанням функції тріщини, яка описує особливості деформування біля тріщини. У другій моделі для опису тріщини використовується дельта-функція. Обидві моделі зводяться до нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Для опису дихання тріщини вводиться параметр контакту. Застосовуючи метод Бубнова–Гальоркіна до нелінійного інтегро-диференціального рівняння в частинних похідних, доходимо до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь із кубичною нелінійністю та кусково-лінійною функцією, яка описує пружність конструкції. Кубічна нелінійність описує геометрично нелінійне деформування конструкції, а кусково-лінійна функція – дихання тріщини.

Для дослідження періодичних коливань, їхньої стійкості та біфуркацій сформульовано двоточкову крайову задачу для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що ефективно розв'язується поєднанням методу колокацій та продовження по довжині дугі.

Скелетні криві розраховуються для аналізу нелінійних моделей вільних геометрично нелінійних коливань гнучких стрижнів з дихаючими тріщинами. У результаті такого аналізу виявлено петлі скелетних кривих, біфуркації Неймарка–Сакера та сідло-вузлові біфуркації. Нелінійні нормальні форми коливань конструкції істотно викривляються в конфігураційному просторі. Більше того, спостерігаються осциляції нелінійних нормальних форм у конфігураційному просторі на петлях скелетних кривих.

1. *Bovsunovsky A., Surace C.* Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review. *Mech. Syst. and Signal Proc.* 2015. Vol. 62-63. P. 129–148. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.01.021>
2. *Christides S., Barr A. D. S.* One-dimensional theory of cracked Bernoulli- Euler beams. *Int. J. Mech. Sci.* 1984. Vol. 26. P. 639–648. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(84\)90017-1](https://doi.org/10.1016/0020-7403(84)90017-1)
3. *Shen M. H. H., Pierre C.* Free vibrations of beams with a single – edge crack. *J. Sound Vib.* 1994. Vol. 170. P. 237–259. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1058>

4. *Shen M. H. H., Chu Y. C.* Vibrations of beams with a fatigue crack. *Comp. Struct.* 1992. Vol. 45. P. 79–93. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90347-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90347-3)
5. *Chu Y.C., Shen M. H. H.* Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics. *AIAA J.* 1992. Vol. 30. P. 2512–2519. <https://doi.org/10.2514/3.11254>
6. *Chondros T. G., Dimarogonas A. D., Yao J.* A continuous cracked beam vibration theory. *J. Sound Vib.* 1998. Vol. 215. P. 17–34. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1640>
7. *Chati M., Rand R., Mukherjee S.* Modal analysis of a cracked beam. *J. Sound Vib.* 1997. Vol. 207. P. 249–270. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1099>
8. *Tsyfanskyy S. L., Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. *J. Sound Vib.* 1998. Vol. 213. P. 159–168. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1502>
9. *Caddemi S., Cali I., Marletta M.* The non-linear dynamic response of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks. *Int. J. Non-Linear. Mech.* 2010. Vol. 45. P. 714–726. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.05.001>
10. *Carneiro G. N., Ribeiro P.* Vibrations of beams with a breathing crack and large amplitude displacements. *J. Mech. Eng. Sci.* 2016. Vol. 230. P. 34–54. <https://doi.org/10.1177/0954406215589333>
11. *Bikri K. El., Benamar R., Bennouna M. M.* Geometrically non-linear free vibrations of clamped–clamped beams with an edge crack. *Comp. Struct.* 2006. Vol. 84. P. 485–502. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.09.030>
12. *Sinha J. K., Friswell M. I., Edwards S.* Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. *J. Sound Vib.* 2002. Vol. 251. P. 13–38. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3978>
13. *Ostachowicz W. M., Krawczuk M.* Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *J. Sound Vib.* 1991. Vol. 150. P. 191–201. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90615-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90615-Q)
14. *Plakhtienko N. P., Yasinskii S. A.* Resonance of second order in vibrations of a beam containing a transverse crack. *Strength Mater.* 1995. Vol. 27. P. 146–152. <https://doi.org/10.1007/BF02209480>
15. *Avramov K., Raimberdiyev T.* Modal asymptotic analysis of sub-harmonic and quasi-periodic flexural vibrations of beams with cracks. *Nonlinear Dyn.* 2017. Vol. 88. P. 1213–1228. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3305-0>
16. *Avramov K., Raimberdiyev T.* Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. *Eng. Fract. Mech.* 2017. Vol. 178. P. 22–38. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.006>
17. *Avramov K., Malyshev S.* Bifurcations and chaotic forced vibrations of cantilever beams with breathing cracks. *Eng. Fract. Mech.* 2019. Vol. 214. P. 289–303. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.03.021>
18. *Palmieri A., Ciccirello A.* Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *Int. J. Sol. Struct.* 2011. Vol. 48. P. 2184–2195. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.024>
19. *Dotti F. E., Cortinez V. H., Reguera F.* Non-linear dynamic response to simple harmonic excitation of a thin-walled beam with a breathing crack. *Appl. Math. Model.* 2016. Vol. 40. P. 451–467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.04.052>
20. *Zhao X., Zhao Y. R., Gao X. Z., Li X. Y., Li Y. H.* Green's functions for the forced vibrations of cracked Euler–Bernoulli beams. *Mech. Sys. Signal Proc.* 2016. Vol. 68–69. P. 155–175. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.06.023>
21. *Zhang W., Ma H., Zeng J., Wu S., Wen B.* Vibration responses analysis of an elastic-support cantilever beam with crack and offset boundary. *Mech. Sys. Signal Proc.* 2017. Vol. 95. P. 205–218. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.03.032>
22. *Andreas U., Casini P., Vestroni F.* Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2007. Vol. 42. P. 566–575. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.08.007>
23. *Bovsunovskii A. P., Bovsunovskii O. A.* Application of nonlinear resonances for the diagnostics of closing cracks in rod like elements. *Strength of Mater.* 2010. Vol. 42. P. 331–342. <https://doi.org/10.1007/s11223-010-9222-4>
24. *Bovsunovsky A. P., Surace C.* Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack. *J. Sound Vib.* 2005. Vol. 288. P. 865–886. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.038>
25. *Pugno N., Surace C.* Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks. *J. Sound Vib.* 2000. Vol. 235. P. 749–762. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2980>
26. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. New York: Pergamon Press, 1982. 630 p.
27. *Caddemi S., Calio I.* Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks. *J. Sound Vib.* 2009. Vol. 327. P. 473–489. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.008>
28. *Biondi B., Caddemi S.* Closed form solutions of Euler–Bernoulli beams with singularities. *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. P. 3027–3044. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.09.048>
29. *Mikhlin Y. V., Avramov K. V.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010. Vol. 63. p. 060802. <https://doi.org/10.1115/1.4003825>
30. *Avramov K. V., Mikhlin Y. V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013. Vol. 65. p. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.4023533>
31. *Mikhlin Y. V., Avramov K. V.* Nonlinear normal modes of vibrating mechanical systems: 10 years of progress. *Appl. Mech. Rev.* 2024. <https://doi.org/10.1115/1.4063593>
32. *Renson L., Kerschen G., Cochelin B.* Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *J. Sound Vib.* 2016. Vol. 364. P. 177–206. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.033>
33. *Peeters M., Vigié R., Sérandour G., Golinval J.C.* Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mech. Sys. Sign. Proc.* 2009. Vol. 23. P. 195–216. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.003>

34. *Avramov K.* Nonlinear normal modes of multi-walled nanoshells with consideration of surface effect and nonlocal elasticity. *Int. J. Non-linear Mech.* 2024. Vol. 159. p. 104622. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104622>
35. *Villadsen J. V., Stewart W. E.* Solution of boundary – value problems by orthogonal collocation. *Chem. Eng. Sci.* 1967. Vol. 22. P. 1483–1501. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(67\)80074-5](https://doi.org/10.1016/0009-2509(67)80074-5)
36. *Seydel R.* Nonlinear computation. *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1997. V. 7. Pp. 2105-2126. <https://doi.org/10.1142/S0218127497001564>
37. *Doedel E., Keller H. B., Kernevez J. P.* Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensions. *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 493–520. <https://doi.org/10.1142/s0218127491000397>

Отримано 11.06.2024,
В остаточному варіанті 06.12.2024