УДК 539.3:624.04:004.942 https://doi.org/10.15407/itm2025.02.063

О. Є. КУЧЕРЕНКО, В. А. БЛАЖКО

ВЕРИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ОБОЛОНКОВОЇ СТРУКТУРИ З ЛОЖЕМЕНТОМ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: ak_sci@proton.me

У статті розглядається задача скінченно-елементного моделювання горизонтального сталевого резервуара об'ємом 50 м^3, який спирається на дві бетонні опори і зазнає впливу статичних навантажень. Зазначена конструкція має циліндричну стінку довжиною 8.15 м та радіусом 1.4 м. Товщина циліндричної стінки дорівнює $5\cdot10^{-3}$ м. Модель представлена у вісесиметричному вигляді; досліджується напружено-деформований стан циліндричної стінки, проводиться аналіз зони контакту системи «ребро жорсткості – оболонка – ложемент» при різних значеннях різниці між радіусами циліндричної оболонки і ложемента при дії гідростатичного тиску. Наводяться геометрична та скінченно-елементна моделі резервуара з деталізацією контактної зони. Використовуються тривимірні елементи (SOLID186) та просторові оболонкові елементи (SHELL281) для вісесиметричного моделювання оболонкової конструкції та опори в тривимірній постановці. Для моделювання зони контакту застосовуються просторові контактні скінченні елементи, які використовуються для подання рухомої поверхні зі сторони оболонки та нерухомої поверхні зі сторони жорсткої основи. Ребра жорсткості моделюються за допомогою балочних елементів з трьома вузлами. Для верифікації скінченно-елементної моделі контакту застосовується модель Вінклера, в якій радіальний контактний тиск приймається пропорційним до радіальних переміщень контактної поверхні. Для визначення вигину ребра жорсткості при дії складного локального навантаження застосовується метод Фур'є, відповідно до якого всі функції, що визначають зусилля, які діють на конструкцію, і її напружено-деформований стан, апроксимуються за допомогою ряду Фур'є за кутовою координатою. Нескінченна система, яка встановлює зв'язок між радіальними переміщеннями ребра жорсткості і зовнішніми навантаженнями, редукується і замінюється скінченною. Для визначення розподілу контактного тиску розв'язується система рівнянь і знаходиться реальне значення контактного тиску за допомогою рівняння $p = -c\cdot w$, де w – радіальний зсув контактної поверхні, c – жорсткість основи. Для проведення процедури верифікації порівнюється розподіл контактного тиску, який отримано за допомогою чисельного моделювання, зі значеннями, обчисленими за допомогою моделі Вінклера. Розбіжність не перевищує 16 %, що свідчить про адекватність скінченно-елементної моделі. Аналіз зони контакту проводиться для умов експлуатації, при яких розбіжність між радіусами циліндричної оболонки і ложементу варіюється від 0 до 4 см. Модель зони контакту "ребро жорсткості – оболонка – ложемент" з достатньою точністю описується моделлю Вінклера для пружної основи.

Ключові слова: *оболонка, резервуар, моделювання, основа, тиск, скінченний елемент, контакт, модель Вінклера.*

This article addresses the finite-element simulation of a horizontal steel tank with a volume of 50 m^3, which rests on two concrete supports and is subjected to static loads. The structure has a cylindrical wall with a length of 8.15 m and a radius of 1.4 m. The thickness of the cylindrical wall is 0.005 m. The model is presented in axisymmetric form; the stress and strain field of the cylindrical wall is investigated, and the contact zone of the stiffener – shell – support system is analyzed at different values of the difference in radius between the cylindrical shell and the support under hydrostatic pressure. A geometric and a finite-element model of the tank with detailed contact zones are presented. Three-dimensional elements (SOLID186) and spatial shell elements (SOLID186) (SHELL281) are used in the axisymmetric simulation of the shell structure and the support in a three-dimensional formulation. The contact zone is simulated using spatial contact finite elements to represent the movable surface on the shell side and the stationary surface on the stiff base side. The stiffeners are simulated using three-node beam elements. The contact finite-element model is verified using the Winkler model, in which the radial contact pressure is assumed to be proportional to the radial displacements of the contact surface. The stiffener bending under complex local loading is determined using the Fourier method, according to which all functions that define the forces acting on the structure and its stress and strain field are approximated using a Fourier series in the angular coordinate. The infinite system that relates the radial displacements of the stiffener to the external loads is reduced and replaced with a finite one. To determine the contact pressure distribution, the system is solved, and the actual contact pressure is found using the equation $p = -c\cdot w$ where w is the radial displacement of the contact

© О. Є. Кучеренко, В. А. Блажко, 2025

surface, and c is the stiffness of the base. The verification is made by comparing the contact pressure distribution obtained by the numerical simulation with that found using the Winkler model. The discrepancy does not exceed 16%, thus indicating the adequacy of the finite-element model. The contact zone is analyzed for operating conditions where the difference in radius between the cylindrical shell and the support varies from 0 to 4 cm. The contact zone model of the stiffener – shell – support system is adequately described by the Winkler model for an elastic support.

Keywords: *shell, tank, simulation, support, pressure, finite element, contact, Winkler model.*

Вступ. Тонкостінні оболонкові конструкції широко використовуються у сучасній інженерній практиці завдяки їхній здатності забезпечувати необхідні – близькі до оптимальних – експлуатаційні характеристики при відносно невеликих затратах. Вони поширені в авіакосмічній, автомобільній, суднобудівній галузях, а також у будівництві, де ефективність і надійність споруд мають критичне значення [1]. Водночас, складність механічних і геометричних властивостей тонкостінних оболонок ставить перед інженерами та дослідниками складні задачі при їхньому моделюванні та аналізі.

Чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів, є потужним інструментом для моделювання і аналізу поведінки тонкостінних оболонок при дії різних видів навантаження. Вони дозволяють враховувати складні геометричні форми, нелінійні матеріальні характеристики та закони деформування з урахуванням різних граничних умов [2]. Однак, розробка чисельної моделі є лише одним із кроків на шляху до їхнього практичного застосування. Для того, щоб отримана модель могла бути використана для реального проєктування та оцінки стану конструкцій, необхідно провести процедуру верифікації.

Верифікація чисельної моделі – критично важлива складова процесу моделювання (рис. 1), оскільки вона забезпечує перевірку правильності обраних чисельних методів і алгоритмів, а також дозволяє підтвердити достовірність отриманих результатів. Загалом, верифікація спрямована на встановлення відповідності між чисельною моделлю та теоретичними засадами, які ця модель покликана відбивати. Відсутність належної верифікації може призвести до помилкових висновків і, як наслідок, до неадекватних інженерних рішень, що може мати катастрофічні наслідки для безпеки та надійності конструкцій [3].

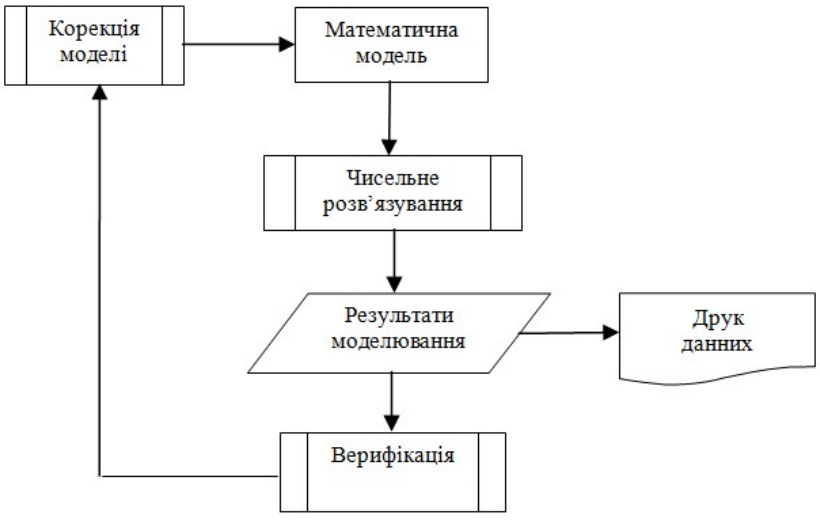


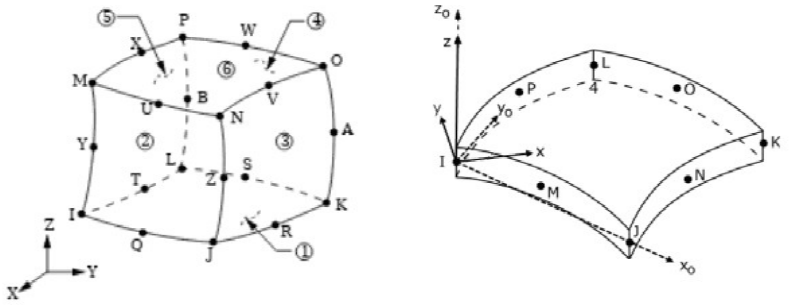
Рис. 1 – Циклічний граф процесу верифікації та корекції моделі

Оболонкові споруди у вигляді горизонтальних резервуарів являються однією з найпоширеніших форм таких конструкцій. Ці інженерні об’єкти використовуються для зберігання та перевезення сипучих та рідких речовин, зокрема нафтопродуктів. Варто зазначити, що статистичні дані, отримані при експлуатації резервуарів такого типу, вказують на те, що певні особливості їхньої роботи не завжди адекватно враховуються в інженерних розрахунках, що ґрунтуються переважно на спрощених аналітичних підходах. Це обумовлено рядом ефектів, що виникають через фізичні та геометричні нелінійності при деформації оболонкових конструкцій, що на практиці майже неможливо врахувати, використовуючи суто аналітичні методики. Серед таких питань – розрахунок і аналіз напружено-деформованого стану горизонтального резервуара з кільцями жорсткості, який дискретно спирається на сідлові опори (ложементи). Ця проблема може бути зведена до розв’язання спрощеної задачі контактної взаємодії зазначених кілець та пружної основи з урахуванням реакцій прилеглих до кілець жорсткості оболонок з використанням математичної моделі контакту Вінклера у поєднанні з тригонометричними рядами Фур'є [4]. Інший підхід – розв’язання суто шляхом комп’ютерного моделювання із застосуванням метода скінченних елементів з використанням відповідних контактних елементів.

У статті розглядається скінченно-елементна модель горизонтального сталевого резервуара, який спирається на дві сідлові опори. Можливе неповне прилягання поверхонь контакту резервуара та основи, зокрема, через розбіжність радіусів циліндричного корпусу резервуара та сідлоподібної опори (ложемента). Знаходиться числовий розв’язок задачі визначення контактного тиску при різних значеннях величини початкового зазору між циліндричним корпусом резервуара та ложементом. Пропонується процедура верифікації отриманої моделі за допомогою моделі пружного контакту Вінклера [5].

Постановка задачі. Моделюється оболонкова конструкція у вигляді горизонтального сталевого резервуара об'ємом 50 м^3, який зазнає впливу комбінації статичних навантажень. Геометрична модель об'єкту подається у вісесиметричному вигляді. Об'єктом дослідження є напружено-деформований стан циліндричної стінки та зона контакту циліндричної оболонки з ложементом при різних значеннях зазору між оболонкою та опорою.

Моделювання проводиться у тривимірній постановці з застосуванням тривимірних двадцятивузлових скінченних елементів другого порядку (рис. 2, а)) та оболонкових елементів з вісьмома вузлами (рис. 2, б)). Останні базуються на теорії пластин Міндліна–Рейсснера [6], яка застосовується для розрахунку тонких і помірно товстих пластин та оболонок.



а) б)

Рис. 2 – Геометрія скінченних елементів

Для моделювання контакту використовуються скінченні контактні елементи з вісьмома вузлами (рис. 3).

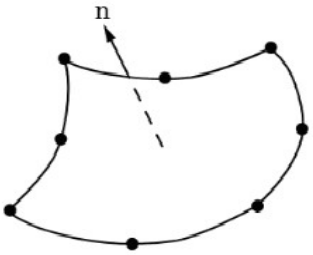


Рис. 3 – Геометрія контактного елемента

Геометрична модель резервуара. Геометрична модель ґрунтується на конструкції горизонтального циліндричного резервуара для нафти та нафтопродуктів об'ємом 50 м^3. Резервуар включає циліндричну стінку, днища та спирається на дві опори (рис. 4), кожна з яких завширшки a_1 = 0.45 м. Матеріал опор – бетон густиною 2300 кг/м^3 та модулем Юнга $3\cdot10^{10}$ Па. Кут напівобхвату $\varphi_0 = 45°$. Відстань від опори до краю резервуара l_1 = 1.46 м.

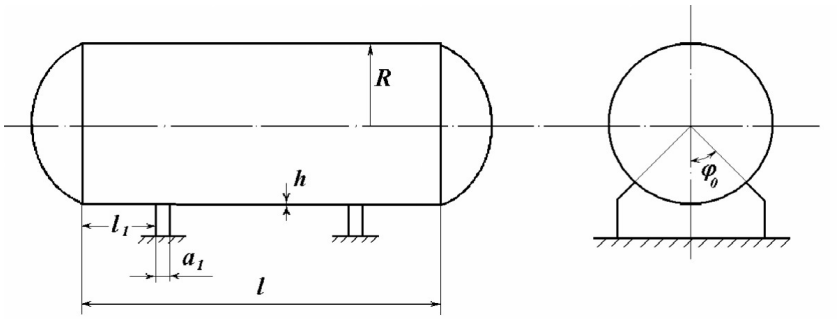


Рис. 4 – Загальна схема спирання оболонки на ложементи

Довжина циліндричного корпусу резервуара дорівнює l = 8.15 м, а радіус R = 1.40 м. Товщина циліндричної стінки h = $5\cdot10^{-3}$ м. Модуль Юнга матеріалу резервуара дорівнює $E = 2\cdot10^{11}$ Па, а коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Зображення тривимірної вісесиметричної (1/4) моделі резервуара із зазначеними параметрами наведено на рис. 5.

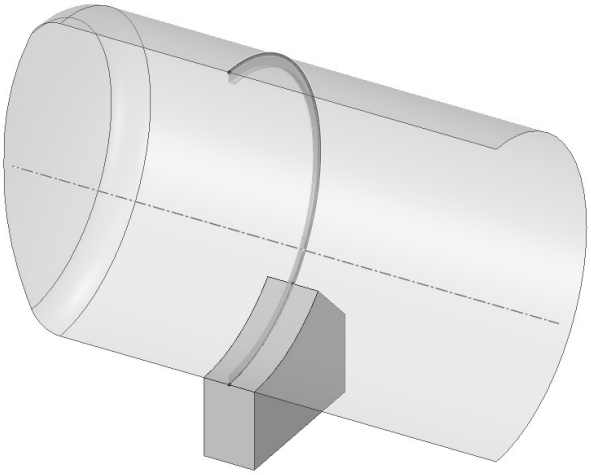


Рис. 5 – Тривимірна геометрична вісесиметрична модель резервуара

У місцях контакту оболонки з опорою моделюються також ребра жорсткості (рис. 5) у вигляді нерівнобічного кутника 90 мм х 56 мм х 6 мм з площею перерізу 8.54 см^2, моментами інерції I_x=70.58·10^{-8} м^4, I_y=21.22·10^{-8} м^4 та моментами опору W_x=11.66·10^{-6} м^3, W_y=4.91·10^{-6} м^3.

Модель контакту «ребро жорсткості–оболонка–ложемент». Для моделювання зазначеного контакту використовується тривимірна модель з покращеною сіткою розбиття у місці контакту елементів. У цій моделі для побудови циліндричної стінки задіяні просторові оболонкові скінченні елементи (рис. 2, б)) з квадратичним законом переміщень. Також використовуються нелінійні тривимірні елементи (рис. 1, а)) для моделювання ложемента. Для моделювання ребер жорсткості використовуються нелінійні тривимірні балочні елементи з трьома вузлами, які базуються на теорії балки Тимошенка [7]. Структура зони контакту подана на рис. 6.

Нижня частина бетонної опори зафіксована. Між днищем та основою моделюється контакт з коефіцієнтом тертя сталь–бетон 0.55 [8, 9]. Контакти такого типу моделюються за допомогою вищезазначених скінченних елементів (рис. 3).

На резервуар діють такі навантаження:

1) сила тяжіння;
2) гідростатичний тиск від продукту зі щільністю 1000 кг/м^3 (повне залиття).

На рис. 7 наведено розподіл загальних деформацій в оболонці при дії зазначених навантажень.

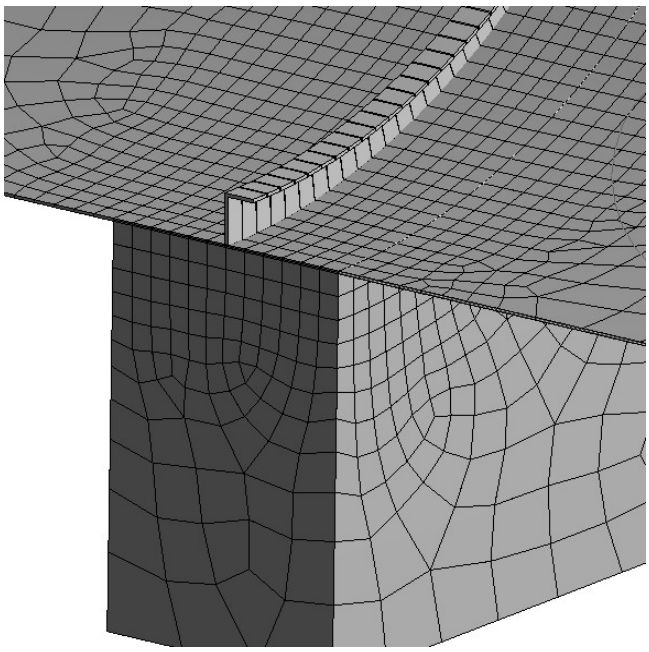


Рис. 6 – Скінченно-елементна модель контакту
«ребро жорсткості–оболонка–ложемент»

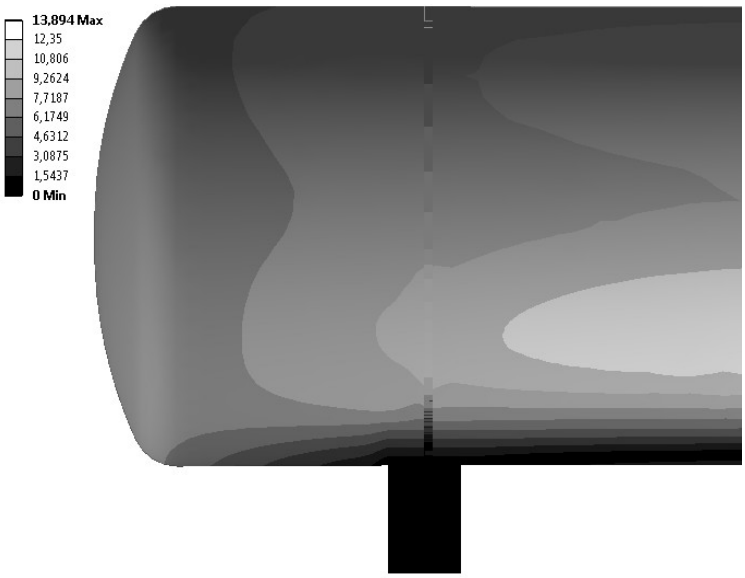


Рис. 7 – Розподіл поля деформацій в оболонці (в мм)

На рис. 8 наведено якісну картину розподілу контактного тиску при різних значеннях різниці (δ) між радіусами ложементу R_l та оболонки R. При моделюванні зони контакту величина δ відповідно набуває значень 0, 1, 2, 3 та 4 см.

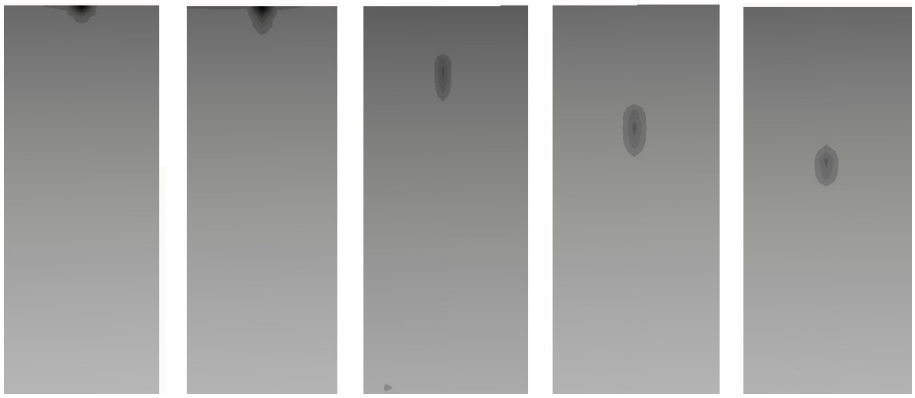


Рис. 8 – Якісна картина розподілу контактного тиску при варіюванні δ від 0 (ліворуч) до 4 (праворуч) см

На рис. 9 наведено залежність контактного тиску від кутової координати при різних значеннях величини δ.

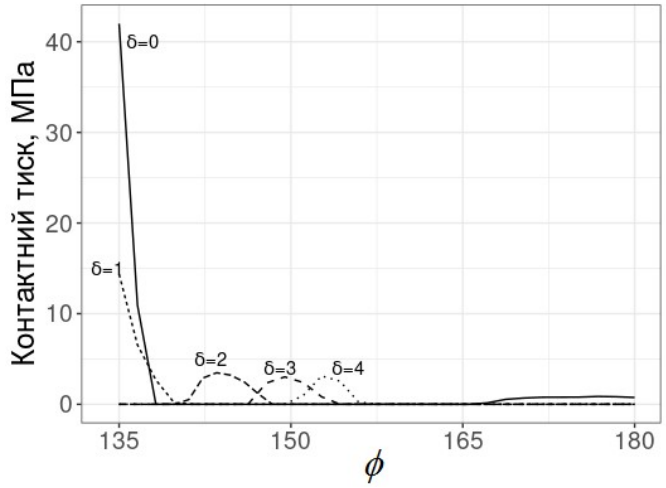


Рис. 9 – Залежність контактного тиску від кутової координати

Модель контакту Вінклера. Для верифікації скінченно-елементної моделі контакту пропонується обчислення контактного тиску з використанням моделі Вінклера [10], в якій радіальний контактний тиск приймається пропорційним до радіальних переміщень контактної поверхні

$$p = -c \cdot w(\phi), \tag{1}$$

де w – радіальний зсув контактної поверхні, ϕ – кругова координата, c – жорсткість кругової основи. Вважається, що між круговою основою і циліндричної оболонкою є пружна прокладка, за рахунок чого ложемент може розглядатися як податлива кругова основа. Товщина прокладки порівняно невелика, тоді кругову основу можна вважати пружною, а її жорсткість c обчислюється так:

$$c = -\frac{E_n}{H} b, \tag{2}$$

де E_n – модуль пружності матеріалу прокладки; H, b – товщина і ширина прокладки відповідно.

Диференціальне рівняння вигину у своїй площині кругового ребра жорсткості, що знаходиться в системі прилеглих оболонок і контактує з круговою основою, представляється у такому вигляді:

$$\frac{dp}{d\phi} - \tau = \frac{EJ}{R^4}\left(\frac{d^5 w}{d\phi} + 2\frac{d^3 w}{d\phi^3} + \frac{dw}{d\phi}\right), \tag{3}$$

де E, J – модуль Юнга і момент інерції перерізу ребра жорсткості; p, τ – сумарні радіальне і тангенціальне навантаження.

Для визначення вигину ребра жорсткості при дії складного локального навантаження застосуємо метод Фур'є, відповідно до якого всі функції, що визначають зусилля, які діють на конструкцію, і її напружено-деформований стан, апроксимуються за допомогою ряду Фур'є за координатою ϕ:

$$\omega(\phi) = \sum_{n=0} a_n \cos n\phi + \sum_{n=1} b_n \sin n\phi, \tag{4}$$

де $\omega(\phi)$ – навантаження і компоненти деформованого і напруженого станів елементів конструкції; a_n, b_n – коефіцієнти ряду Фур'є.

Вважатимемо, що деформація симетрична. Радіальне переміщення вісі ребра жорсткості задамо у такому вигляді:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\phi\,. \tag{5}$$

Тоді у матричній формі система рівнянь, що визначає зв'язок між радіальними переміщеннями ребра жорсткості і зовнішніми навантаженнями, запишеться так:

$$AW = B, \tag{6}$$

де A – квадратна матриця, елементи якої залежать від параметрів ребра жорсткості, оболонок і пружної основи; W – матриця-стовпець радіальних переміщень; B – матриця-стовпець навантажень.

Характерною особливістю матриці A є те, що її діагональні елементи a_{ii} (крім a_{11}) залежать від жорсткості ребра жорсткості, основи та прилеглих оболонок, та зі зростанням номера і суттєво зростають, а недіагональні a_{ij}, що залежать тільки від параметрів основи, не зростають і $a_{ii} > a_{ij}$. Виходячи з перерахованих властивостей елементів матриці, нескінченна система може бути замінена з достатньою мірою точності скінченною (редукованою).

Оскільки переміщення w, а отже і навантаження p заздалегідь невідомі, то визначення напружено-деформованого стану конструкції здійснюється одночасно з розв'язанням контактної задачі (задачі спільного деформування ребра жорсткості та основи).

Для визначення розподілу контактного тиску використовується метод послідовних наближень, на першому кроці якого допускається наявність контакту по всій довжині ложемента. Контакт коригується на кожному наступному кроці. Цей процес закінчується за збігу результатів двох послідовних розрахунків.

На рис. 10 наведено залежність контактного тиску від кутової координати, який обчислено за наведеним вище підходом з метою верифікації скінченно-елементної моделі контакту. Алгоритм реалізовано у вигляді програмного модуля з використанням мови FORTRAN. Коефіцієнт постелі для моделі Вінклера приймався рівним 10000 МН/м^3.

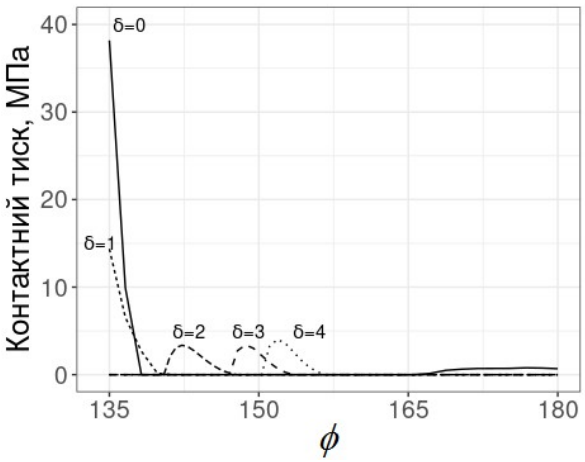


Рис. 10 – Залежність контактного тиску від кутової координати при використанні моделі Вінклера

При порівнянні розподілів контактного тиску, отриманих двома способами, обчислено середню відносну похибку (mean absolute percentage error – MAPE), яка не перевищує 16 %, що свідчить про адекватність скінченно-елементної моделі.

Висновки

1. Результати моделювання створеної тривимірної скінченно-елементної моделі горизонтального сталевого резервуара об'ємом 50 м^3 на бетонних опорах узгоджується з теоретичними засадами та дозволяє визначати деформації та напруження в оболонці та зоні контакту з основою.
2. Обчислено контактний тиск у зоні контакту «ребро жорсткості – оболонка – ложемент». Обидві моделі (скінченно-елементна і модель Вінклера) показали близьку картину розподілу тиску. Наявність проміжку між оболонкою і ложементом має суттєвий вплив на зону контакту та картину розподілу контактних зусиль.
3. Верифікація скінченно-елементної моделі зони контакту за допомогою моделі Вінклера виявила адекватність отриманої чисельної моделі.

1. *Гудрамович В. С., Деменков А. Ф., Егоров Е. А., Репринцев А. В*. О влиянии технологи изготовления на несущую способность стальных резервуаров. Проблемы прочности. 2006. №4. С. 125–131.
2. *Brenner S. C., Scott L. R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag. 2008. 400 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0
3. *Деменков А. Ф., Репринцев А. В., Самарская Е. В*. Влияние технологических и эксплуатационных дефектов на прочность вертикальных резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов. Вісник Дніпропетровського ун-ту. 2006. № 2/2. Вип. 10. С. 51 – 55.
4. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М.* Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. Київ: Наукова Думка. 1988. 288 с.
5. *Popov V. L.* Contact Mechanics and Friction. Berlin: Springer. 2017. 391 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53081-8
6. *Mittelstedt C.* Theory of Plates and Shells. Berlin: Springer. 2023. 579 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66805-4
7. *Hauck B., Szekrenyes A.* Enhanced beam and plate finite elements with shear stress continuity for compressible sandwich structures. Mathematics and Mechanics of Solids. 2024. Vol. 29(7). P. 1325–1363. https://doi.org/10.1177/10812865231221992

8. *Rabbat B. G., Russell H. G.* Friction Coefficient of Steel on Concrete or Grout. Journal of Structural Engineering. 1985. Vol. 111. Issue 3. P. 505–515. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:3(505)
9. *Zhao W., Zhu B.* Theoretical model for the bond-slip relationship between ribbed steel bars and confined concrete. Structural Concrete. 2018. Vol. 19. Issue 2. P. 548–558. https://doi.org/10.1002/suco.201700008
10. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Chichester: John Wiley & Sons Ltd. 2002. 441 p.

Отримано 26.02.2025,
в остаточному варіанті 28.05.2025