

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЛОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В БАКАХ СТОСОВНО ЗАДАЧІ ОПИСУ ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ РІДИННИХ РАКЕТ

Інститут технічної механіки

*Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: dolmrut@gmail.com*

У сучасних рідинних ракетах-носіях (РН) маса палива може перевищувати 90 % усієї маси РН. При описі поздовжніх коливань в пружному баку паливо зазвичай імітується механічними осциляторами. За такого підходу нівелюються відмінності в динамічних процесах, що протікають у рідких компонентах палива в баках і в конструкції РН як пружному твердому тілі. Метою роботи є врахування особливостей несталої течії рідини в баках стосовно до задачі опису поздовжніх коливань рідинних ракет. Розроблено підхід до математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи з розподіленими параметрами. З використанням імпедансного методу складено нелінійну систему рівнянь для визначення ефективної швидкості звуку в паливі бака і коефіцієнта інерційного опору на виході з бака. Розроблено підхід до математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи із зосередженими параметрами. Побудовано математичну модель із зосередженими параметрами для опису двох власних тонів коливань рідини в баку. Складено систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів моделі із зосередженими параметрами, в якій використовуються отримані раніше ефективна швидкість звуку і коефіцієнт інерційного опору на виході з бака. Застосування зазначених підходів продемонстровано на прикладі бака окислювача першого ступеня рідинної РН Циклон. Встановлено, що ефективна швидкість звуку у 7 разів менша за швидкість звуку в необмеженому середовищі. Коефіцієнт інерційного опору на виході з бака істотно перевищує сумарний коефіцієнт інерційного опору рідини в баку (на початку польоту більш ніж у 10 разів). Ці результати показують, що динаміка днища бака має важливе значення при математичному моделюванні несталої течії палива в баку. Визначено коефіцієнти математичної моделі несталої течії рідини в баку окислювача першого ступеня рідинної РН Циклон як системи із зосередженими параметрами за умови узгодження з відомим рішенням щодо власних частот коливань рідини в баку.

Ключові слова: *рідинна ракета-носіє, поздовжні коливання, нестала течія палива в баку, рівняння руху і нерозривності рідини, математичне моделювання, імпедансний метод.*

In today's liquid-propellant launch vehicles (LVs), the propellant mass may exceed 90 % of the total LV mass. When describing longitudinal oscillations in an elastic tank, the propellant is usually simulated by mechanical oscillators. This approach ignores the difference in dynamic processes in the liquid propellant components in the tanks and in the LV structure as an elastic body. The goal of this paper is to account for the features of an unsteady tank liquid flow as applied to the problem of description of liquid-propellant rocket pogo oscillations. An approach is developed to mathematical simulation of unsteady liquid flow in liquid-propellant LV tanks as a distributed-parameter system. Using the impedance method, a nonlinear system of equations is derived to determine the effective sound speed in the tank propellant and the inertia resistance coefficient at the tank outlet. An approach is developed to mathematical simulation of an unsteady liquid flow in liquid-propellant LV tanks as a lumped-parameter system. A lumped-parameter mathematical model is constructed to describe two eigenmodes of the tank liquid oscillations. A system of equations is derived to determine the coefficients of the lumped-parameter model, which uses the effective sound speed and the inertia resistance coefficient at the tank outlet found in the distributed-parameter model. The above approaches are demonstrated by the example of the oxidizer tank of the Cyclone liquid-propellant LV's first stage. It is shown that the effective sound speed is one seventh of the sound speed in an infinite medium. The inertia resistance coefficient at the tank outlet is far greater than the total inertia resistance coefficient of the tank liquid (early in the flight, by a factor of more than 10). These results show the tank bottom dynamics is of great importance in mathematical simulation of an unsteady tank propellant flow. The model coefficients are determined for the mathematical model of an unsteady liquid flow in the oxidizer tank of the Cyclone liquid-propellant LV's first stage as a lumped-parameter system from the condition of agreement with a known solution on tank liquid eigenfrequencies.

Keywords: *liquid-propellant launch vehicle, pogo oscillations, unsteady tank propellant flow, liquid flow and continuity equations, mathematical simulation, impedance method.*

Вступ. У сучасних рідинних ракетах-носіях (РН) маса палива може перевищувати 90 % усієї маси РН [1]. Тому паливо в баках РН значною мірою визначає динаміку всього корпусу РН [2, 3]. Завдання визначення власних поздовжніх частот коливань пружної оболонки бака разом з рідиною є дуже складним та багатограним. Воно вимагає врахування великої кількості складних та різноманітних динамічних процесів та явищ. Серед них можна виділити [4, 5] пружні деформації оболонки та днища бака, рухливість пали-

ва в баку, великі відхилення вільної поверхні рідини в баку та ін. Для визначення власних поздовжніх частот коливань пружної оболонки бака з рідиною використовуються як експериментальні [6, 7], так і теоретичні методи [4, 5], які ґрунтуються на вирішенні крайових задач гідродинаміки обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею. Можуть бути також використані сучасні засоби обчислень [8, 9], які ґрунтуються на математичному моделюванні просторових коливань оболонкових конструкцій, що містять рідину, з використанням методу кінцевих елементів та засобів комп'ютерного проектування та аналізу CAD/CAE-систем.

При визначенні власних характеристик корпусу РН осесиметричні коливання рідини в пружному баку для опису двох тонів поздовжніх коливань імітувалися двома механічними осциляторами [10], закріпленими на днище бака. Вони мають таку ж сумарну масу та сумарну кінетичну та потенційну енергії, як пружний бак з рідиною. За такого підходу нівелюються відмінності в динамічних процесах, що протікають у рідких компонентах палива в баках і в конструкції РН як пружному твердому тілі. Під час збурення у твердому тілі виникають хвилі розрядження з фазовою швидкістю, близькою до швидкості звуку в матеріалі, які передують хвилям стиснення в рідкому середовищі [11]. Крім того, процес дисипації енергії в рідині та в твердому тілі також відрізняється. У рідині механізм розсіювання енергії складно залежить від швидкості течії (числа Рейнольдса) і наявності в баку різних конструктивних елементів і пристроїв [6]. У найпростішому випадку у разі турбулентної течії коефіцієнт гідравлічних втрат є постійним.

У конструкції РН дисипація енергії зазвичай менша, ніж у рідкому середовищі. Існує три основні варіанти врахування сил тертя у твердому тілі, що ґрунтуються на різних гіпотезах [4]. Згідно з гіпотезою Фогта сила внутрішнього тертя пропорційна швидкості деформації. За другим варіантом сила тертя припускається пропорційною швидкості переміщення і називається силою в'язкого тертя. Згідно з гіпотезою Е. С. Сорокіна сила тертя не залежить від швидкості, але зсунута за фазою відносно пружної сили на кут $\pi/2$.

Метою роботи є врахування особливостей несталої течії рідини в баках стосовно до задачі опису поздовжніх коливань рідинних ракет.

1. Математична модель несталої течії рідини в баках як системи з розподіленими параметрами.

Нестала течія рідини в циліндричних баках рідинних ракет і трубопроводах відрізняються тим, що течію рідини в баках не можна вважати одновимірною, деформації стінок і днища бака можуть призводити до істотної зміни форми бака і його днища. Крім того, режим течії рідини в баках може перебувати не тільки у квадратичній області за коефіцієнтом гідравлічного тертя, як у трубопроводах, а й у перехідній області. Це ускладнює врахування демпфірування рідини в баках рідинних РН.

Нестала течія рідини в трубопроводах зазвичай описується рівняннями руху і нерозривності в частинних похідних [12]

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{g A_L} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{2 \Delta \bar{p}}{l \bar{G}} G = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c^2}{g A_L} \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де t – час; z – напрямок поздовжньої осі трубопроводу; p , G – тиск і витрата рідини; A_L – площа поперечного перерізу трубопроводу; Δp – втрати тиску на ділянці трубопроводу завдовжки l ; c – швидкість звуку в рідині; g – прискорення вільного падіння.

Відповідно до імпедансного методу [12] рішення системи рівнянь (1) може бути представлено у вигляді чотиріполюсника

$$\begin{cases} p_2 = b_{11} p_1 + b_{12} G_1, \\ G_2 = b_{21} p_1 + b_{22} G_1, \end{cases} \quad (2)$$

де p_1 , G_1 – тиск і витрата рідини на вході ділянки трубопроводу; p_2 , G_2 – тиск і витрата рідини на виході; b_{11} , b_{12} , b_{21} и b_{22} – елементи передавальної матриці ділянки трубопроводу

$$b_{11} = b_{22} = \text{ch}(\gamma z), \quad b_{12} = -Z_w \text{sh}(\gamma z), \quad b_{21} = -\text{sh}(\gamma z) / Z_w, \\ \gamma = \sqrt{Z_L Y_L}, \quad Z_w = \sqrt{Z_L / Y_L}, \quad Z_L = \frac{s+k}{g A_L}, \quad Y_L = \frac{g A_L s}{c^2}, \quad k = \frac{2 \Delta \bar{\rho} g A_L}{l \bar{G}},$$

s – змінна Лапласа.

З (2) можна визначити імпеданс на вході в трубопровід z_1

$$z_1 = \frac{p_1}{G_1} = \frac{b_{12} - z_2 b_{22}}{z_2 b_{21} - b_{11}}, \quad (3)$$

де $z_2 = \frac{p_2}{G_2}$ – імпеданс трубопроводу на виході.

Відповідно до імпедансного методу [12] власні (резонансні) частоти коливань трубопроводу можуть бути визначені з умови

$$z_1 = 0 \quad \text{або} \quad b_{12} - z_2 b_{22} = 0. \quad (4)$$

Застосуємо рівняння руху і нерозривності (1), а також імпедансний метод їх розв'язання, для опису несталої течії рідини в циліндричних баках. При цьому особливості несталої течії рідини в баках (неодномірність течії, істотна деформація стінок бака) враховуватимемо за допомогою деякої ефективної швидкості звуку c_R замість розрахункової швидкості звуку c .

Нижнє днище бака і рідина в баку утворюють єдину систему, в якій можуть відбуватися спільні поздовжні коливання. За умови невідривності рідини від нижнього днища бака між параметрами нижнього днища бака і рідиною поблизу нього можна встановити такі зв'язки

$$F_{Z2} = A_L p_2 \quad \text{и} \quad \dot{u}_{z2} = \frac{G_2}{\gamma_L A_L},$$

де F_{Z2} , $\dot{u}_{z2}$ – поздовжня сила і швидкість переміщення; γ_L – питома вага рідини.

Як граничні умови для несталої течії рідини в баку для днища бака можна записати другий закон Ньютона (в зображеннях за Лапласом)

$$m_D s \dot{u}_2 = F_{Z2},$$

де m_D – ефективна маса днища бака.

Тоді вираз для імпедансу на виході з бака z_2 матиме вигляд

$$z_2 = \frac{p_2}{G_2} = \frac{1}{\gamma_L A_L^2} \frac{F_{z2}}{\dot{u}_{z2}} = \frac{1}{\gamma_L A_L^2} m_D s = J_D s, \quad (5)$$

де J_D – деякий коефіцієнт, що має розмірність інерційних втрат тиску рідини. Він враховує рухливість днища бака.

При визначенні характеристик власних поздовжніх коливань рідинних ракет часто використовують [10] два тони коливань рідини в баках. Якщо відомі власні частоти поздовжніх коливань рідини в баку ω_1 і ω_2 то, використовуючи умову (4), можна скласти систему нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих параметрів c_R і J_D

$$\begin{cases} b_{12}(\omega_1) + J_D j \omega_1 b_{22}(\omega_1) = 0, \\ b_{12}(\omega_2) + J_D j \omega_2 b_{22}(\omega_2) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

де j – уявна одиниця.

З (6) можна отримати вираз для J_D

$$J_D = -\frac{b_{12}(\omega_1)}{b_{22}(\omega_1) j \omega_1} \text{ або } J_D = -\frac{b_{12}(\omega_2)}{b_{22}(\omega_2) j \omega_2}$$

і нелінійне рівняння для ефективної швидкості звуку рідини в баку c_R

$$b_{12}(\omega_2) b_{22}(\omega_1) - b_{12}(\omega_1) b_{22}(\omega_2) \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0. \quad (7)$$

2. Математична модель несталої течії рідини в баках як системи із зосередженими параметрами.

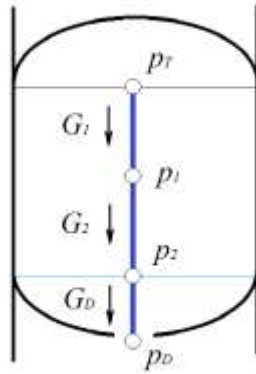


Рис. 1 – Розрахункова схема несталої течії рідини в баку як системи із зосередженими параметрами

Для математичного опису двох тонів поздовжніх коливань рідини в баку було складено розрахункову схему, представлену на рис. 1. Відповідно до цієї розрахункової схеми математична модель поздовжніх коливань рідини в баку ракети як системи із зосередженими параметрами включатиме систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} p_T = p_1 + (R_1 + s J_1) G_1, \\ s C_1 p_1 = G_1 - G_2, \\ p_1 = p_2 + (R_2 + s J_2) G_2, \\ s C_2 p_2 = G_2 - G_D, \\ p_2 = p_D + s J_D G_D, \end{cases} \quad (8)$$

де p_T – тиск наддуву бака; p_1 , p_2 , G_1 , G_2 – тиск і витрати палива на відповідних ділянках бака; p_D , G_D – тиск і витрата рідини на виході з бака; R_1 , R_2 , J_1 , J_2 , C_1 , C_2 – коефіцієнти гідрравлічного, інерційного опорів і податливості на відповідних ділянках бака.

Для визначення невідомих коефіцієнтів R_1 , R_2 , J_1 , J_2 , C_1 і C_2 пропонується такий підхід. Спочатку через малість демпфірування коливань рідини покладемо $R_1 = R_2 = 0$ та при $p_T = \text{const}$ і $p_D = \text{const}$ з (8) отримаємо характеристичне рівняння

$$as^4 + bs^2 + c = 0, \quad (9)$$

де $a = J_1 J_2 J_D C_1 C_2$, $b = J_1 C_1 (J_2 + J_D) + J_D C_2 (J_1 + J_2)$,

$$c = J_1 + J_2 + J_D. \quad (10)$$

У результаті розв'язання рівняння (9) (при $s = j\omega$) отримаємо

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ \omega_2^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{cases}$$

де j – уявна одиниця.

Частоти коливань ω_1 і ω_2 можуть бути визначені експериментальними [6, 7] або теоретичними методами [4, 5] і вважаються відомими. Визначимо через них коефіцієнти характеристичного рівняння (9) a і b

$$a(\omega_1, \omega_2, c) = \frac{4c}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}, \quad b(\omega_1, \omega_2, c) = \frac{4c(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}. \quad (11)$$

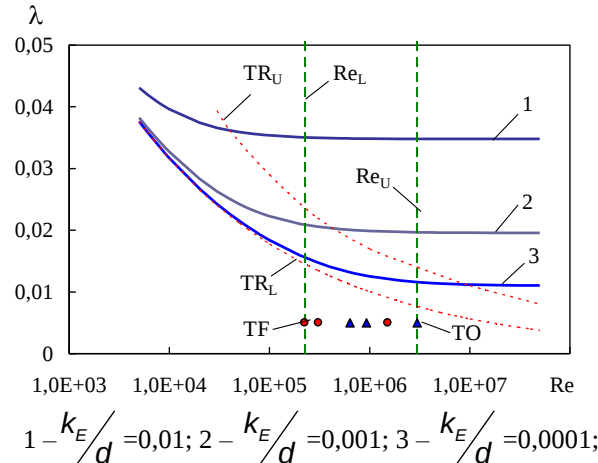
Для визначення невідомих коефіцієнтів J_1 , J_2 , C_1 і C_2 складемо систему рівнянь, яка включає рівняння (10) з урахуванням (11) і рівняння, що виражають збереження маси палива J_Σ і його загальної податливості в баку C_Σ

$$\begin{cases} J_1 J_2 J_D C_1 C_2 = a(\omega_1, \omega_2, c), \\ J_1 C_1 (J_2 + J_D) + J_D C_2 (J_1 + J_2) = b(\omega_1, \omega_2, c), \\ J_1 + J_2 + J_D = c, \\ J_1 + J_2 = J_\Sigma, \quad J_\Sigma = \frac{H_T}{gA_T}, \\ C_1 + C_2 = C_\Sigma, \quad C_\Sigma = \frac{gA_T H_T}{C_R^2}, \end{cases} \quad (12)$$

де J_Σ , C_Σ – коефіцієнти сумарного інерційного опору і податливості; H_T – висота палива у баку, A_T – площа поперечного перерізу циліндричного бака.

Система алгебраїчних рівнянь (12) може бути зведена до нелінійного рівняння відносно, наприклад, параметра J_1 . Рішення для J_1 відшукується в інтервалі від 0 до J_Σ . Інші невідомі коефіцієнти можуть бути обчислені за формулами із системи (12)

$$C_1 = \frac{b(\omega_1, \omega_2, c) - J_D J_\Sigma C_\Sigma}{J_1 (J_D + J_\Sigma - J_1) - J_D J_\Sigma}, \quad C_2 = C_\Sigma - C_1, \quad J_2 = J_\Sigma - J_1.$$



Re_L, Re_U – нижнє і верхнє значення числа Рейнольдса для течії в баках; TF, TO – значення чисел Рейнольдса для баків пального й окислювача; TR_L, TR_U – нижня і верхня границі області перехідної течії

Рис. 2 – Залежність коефіцієнта гідравлічного тертя від числа Рейнольдса

до турбулентного. Можна визначити діапазони значень чисел Рейнольдса для течії в баках окислювача і пального перших ступенів РН Циклон, Дніпро і Зеніт, які становлять $(0,64–2,98) \cdot 10^6$ і $(0,23–1,52) \cdot 10^6$ відповідно. Використовуючи універсальну формулу А. Д. Альтшуля [13] для коефіцієнта гідравлічного тертя λ

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{k_E}{d} \right)^{0,25},$$

було визначено його залежності від числа Рейнольдса для різних значень відносної еквівалентної шорсткості k_E/d . Тут роль еквівалентної шорсткості відіграють елементи конструкції бака, призначені для підвищення його міцності або стійкості, а також ті, що перешкоджають вільному переміщенню рідини в баку. Результати, представлені на рис. 2, показують, що за великих значень k_E/d течія в баках рідинних РН буде турбулентною, за малих k_E/d – може перебувати в перехідній області від ламінарної до турбулентної течії.

У цій роботі вважатимемо, що течія палива в баках рідинних РН є турбулентною. Це наближає її до течії рідини в трубопровідних системах рідинних РН. Незважаючи на малі значення гідравлічних втрат тиску в баках, коефіцієнти лінеаризованих гідравлічних опорів R_1 і R_2 необхідно використовувати при описі несталої течії рідини в баках як системи із зосередженими параметрами. Вони можуть бути визначені пропорційно інерційним втратам тиску на відповідних ділянках, якщо немає інших даних,

$$R_1 = J_1 \frac{R_1 + R_2}{J_\Sigma} \text{ і } R_2 = J_2 \frac{R_1 + R_2}{J_\Sigma}.$$

У трубопровідних системах рідинних РН реалізується переважно турбулентний режим течії, що характеризується постійним значенням коефіцієнта гідравлічного тертя від числа Рейнольдса Re . При використанні імпедансного методу це дає змогу прийняти постійним коефіцієнт гідравлічного опору і найбільш простим способом врахувати гідравлічні втрати тиску в трубопроводі. Під час течії палива в баках рідинних РН режим течії може бути як турбулентним, так і перехідним від ламінарного

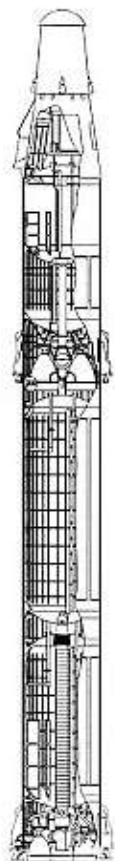


Рис. 3 – Загальний вигляд ракети-носія Циклон

3. Математичне моделювання несталої течії рідини в баку окислювача першого ступеня ракети-носія Циклон. Розглянемо застосування запропонованого підходу з математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН на прикладі бака окислювача першого ступеня РН Циклон [1] (див. рис. 3). Залежності частот коливань двох нижчих тонів коливань рідини в баку окислю-

$$\text{вача } f_{o1} = \frac{\omega_{o1}}{2\pi} \text{ і } f_{o2} = \frac{\omega_{o2}}{2\pi} \text{ від часу польоту наведе-}$$

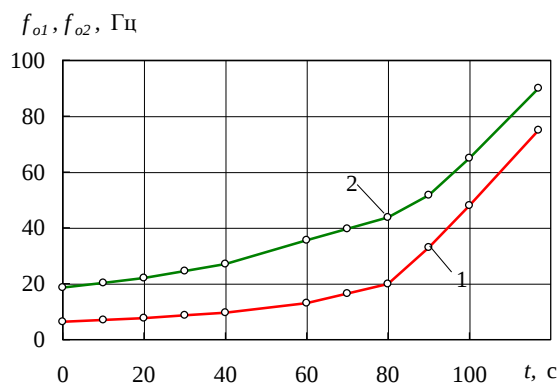
дено на рис. 4. Частоти коливань було визначено теоретично [4, 5] на підставі розв'язання крайової задачі гідродинаміки обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею. Ці частоти коливань поряд із геометрією бака, ступенем його заповнення, характеристиками рідини є вихідними даними для опису несталої течії рідини в баку РН.

Під час математичного моделювання несталої течії рідини в баку як системи з розподіленими параметрами було визначено залежності ефективної швидкості звуку c_R та інерційного коефіцієнта J_D від часу польоту внаслідок розв'язання нелінійної системи рівнянь (6) для різних значень часу польоту. Ці залежності ефективної швидкості звуку c_R

та відносного інерційного коефіцієнта $\tilde{J}_D = J_D / J_\Sigma$

від часу польоту представлені на рис. 5.

З цього рисунка видно, що ефективна швидкість звуку рідини в баку окислювача c_R істотно менша (у 7 разів) за швидкість звуку в необмеженому середовищі. Першу половину польотного часу вона слабо змінюється, але потім



1 – перший тон коливань; 2 – другий тон коливань

Рис. 4 – Залежність частот коливань рідини в баку окислювача від часу польоту

падає до низьких значень. Коефіцієнт інерційного опору J_D істотно перевищує сумарний коефіцієнт інерційного опору рідини в баку J_Σ , особливо на початку польоту. Коефіцієнти J_D і J_Σ порівнюються приблизно за $t = 70$ с. Ці результати показують, що динаміка днища бака має важливе значення при математичному моделюванні несталої течії палива в баку рідинних РН.

З першого рівняння чотириполосника (2) із урахуванням граничних умов (3) і (5) було отримано вираз для коефіцієнта підсилення рідини в баку за математичною моделлю з розподіленими параметрами

$$\frac{p_2}{p_T} = b_{11} + b_{12} \frac{1}{Z_1}.$$

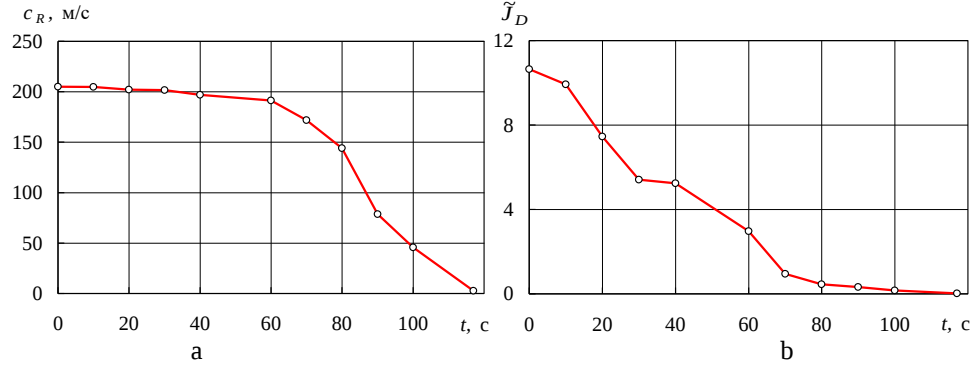
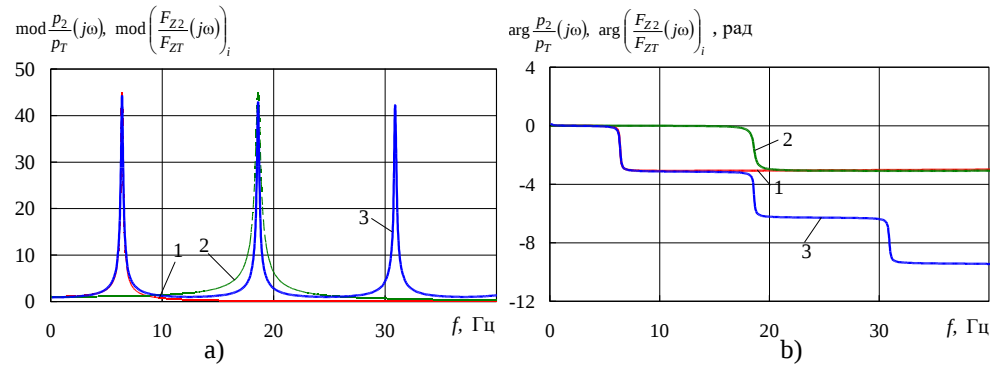


Рис. 5 – Залежності ефективної швидкості звуку c_R (а) та відносного інерційного коефіцієнта $\tilde{J}_D$ (б) від часу польоту



1 – перший тон $\left(\frac{F_{z22}}{F_{zT}}(j\omega) \right)_i$; 2 – другий тон $\left(\frac{F_{z22}}{F_{zT}}(j\omega) \right)_i$; 3 – $\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_T}(j\omega)$ за системою з розподіленими параметрами

Рис. 6 – Модуль (а) и фаза (б) коефіцієнта підсилення

Результати розрахунку цього коефіцієнта підсилення для часу польоту $t = 0$ с (за гідравлічних втрат тиску $\Delta p = 0,005$ бар) подано на рис. 6. На цьому ж рисунку показано коефіцієнти підсилення $\left(\frac{F_{z22}}{F_{zT}}(j\omega) \right)_i$ $i = 1, 2$ для двох тонів коливань рідини в баку за традиційного опису динаміки рідини в баках рідинних РН [10]. Вирази для коефіцієнтів підсилення $\left(\frac{F_{z22}}{F_{zT}}(j\omega) \right)_i$ $i = 1, 2$ було отримано з рівнянь руху і стану конструкції трубопроводу [11] при переході до зосереджених параметрів [14].

$$\left(\frac{F_{z22}}{F_{zT}}(j\omega) \right)_i = \frac{1}{1 - \frac{m_i c_i \omega^2}{1 + j\omega \mu_{zi}}},$$

де m_i , c_i – наведена маса та податливість i -го тону коливань; μ_{zi} – коефіцієнт, що характеризує розсіювання енергії.

При визначенні коефіцієнтів підсилення $\left(\frac{F_{Z2}}{F_{ZT}}(j\omega) \right)_i$ $i = 1, 2$ було враховано такі формули, що пов'язують параметри математичної моделі

$$m_i c_i = \frac{1}{\omega_i^2}, \quad \mu_{zi} = \frac{\delta_i}{\pi \omega_i},$$

де ω_i , δ_i – власна частота і декремент коливань i -го тону коливань.

У розрахунках цієї роботи, як і в роботі [10], вважалося $\delta_i = 0,07$.

Аналіз рис. 6 показує, що запропонований підхід математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН дає змогу не тільки точно одержати резонансні частоти коливань рідини в баку, а й домогтися задовільного узгодження частотних характеристик у значущому частотному діапазоні.

Для знаходження коефіцієнтів математичної моделі несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи із зосередженими параметрами J_1 , J_2 , C_1 і C_2 було використано систему рівнянь (12). У цій системі як вихідні дані використовують коефіцієнт інерційного опору J_D , отриманий раніше під час математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи з розподіленими параметрами. Використовуються також сумарні коефіцієнти інерційного опору J_Σ і податливості C_Σ . У формулу для розрахунку C_Σ входить ефективна швидкість звуку c_R , визначена раніше спільно з коефіцієнтом інерційного опору J_D .

Залежності коефіцієнтів $\tilde{J}_\Sigma = \frac{J_\Sigma}{J_\Sigma(t=0)}$ і C_Σ від часу польоту наведено

на рис. 7. Лінійний спад $\tilde{J}_\Sigma$ характеризує постійну витрату окислювача з бака в процесі роботи двигунної установки першого ступеня. Коефіцієнт C_Σ протягом польоту змінюється слабо. Його різке зростання наприкінці польоту є наслідком різкого зменшення ефективної швидкості звуку c_R .

У результаті розв'язання системи рівнянь (12) отримано коефіцієнти математичної моделі несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи із зосередженими параметрами J_1 , J_2 , C_1 і C_2 , залежності яких за часом польоту подано на рис. 8. Із цих рисунків видно, що незважаючи на постійне зниження й істотне зменшення J_Σ , а також падіння J_D , коефіцієнти

$\tilde{J}_1 = \frac{J_1}{J_\Sigma}$ і $\tilde{J}_2 = \frac{J_2}{J_\Sigma}$ мало змінюються по всьому польоту. При цьому коефіцієнт $\tilde{J}_1$ помітно більший за коефіцієнт $\tilde{J}_2$. Залежності відносних коефіцієнтів

$\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{C_\Sigma}$ і $\tilde{C}_2 = \frac{C_2}{C_\Sigma}$ за часом польоту змінюються більшою мірою, ніж $\tilde{J}_1$ і $\tilde{J}_2$. Однак різниця між $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ менша.

З системи рівнянь (12) можна отримати вираз для коефіцієнта підсилення рідини в баку за моделлю із зосередженими параметрами

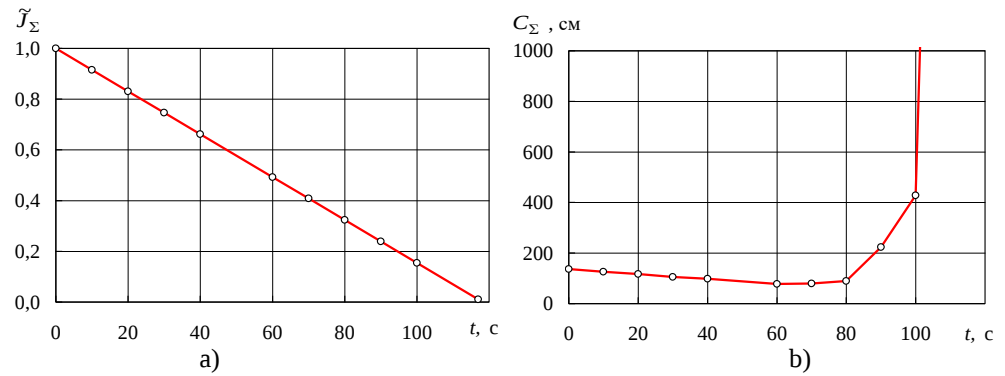


Рис. 7 – Залежності коефіцієнта відносної сумарної інерційності

$$\tilde{J}_\Sigma = \frac{J_\Sigma}{J_\Sigma(t=0)} \quad \text{(a) і сумарної податливості (b) } C_\Sigma \text{ рідини від часу польоту}$$

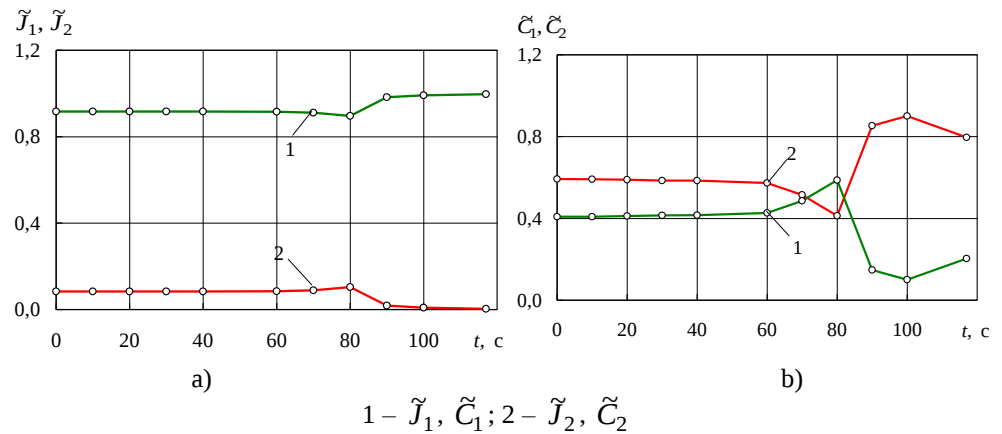


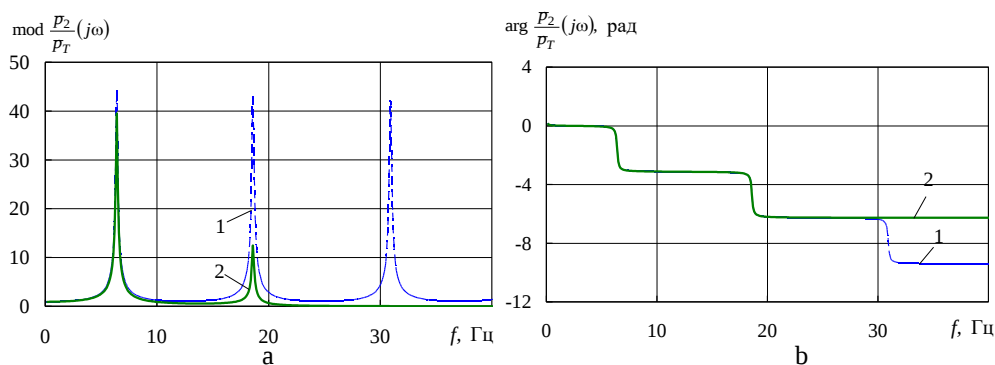
Рис. 8 – Залежності відносних коефіцієнтів інерційного опору (a) і податливості (b) на ділянках бака від часу польоту

$$\frac{\rho_2}{\rho_T} = \frac{1}{1 + Z_{1T} Y_D + Z_{1T} (Y_D + j\omega C_1 (1 + Z_{2T} Y_D))},$$

$$\text{де } Z_{1T} = R_1 + j\omega J_1, \quad Z_{2T} = R_2 + j\omega J_2, \quad Y_D = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega J_D}.$$

Результати розрахунку цього коефіцієнта підсилення для часу польоту $t = 0$ с представлено на рис. 9. На цьому ж рисунку показано коефіцієнт підсилення за моделлю з розподіленими параметрами. З аналізу рисунка видно, що спостерігається не тільки збіг резонансних частот коливань, а й задовільне узгодження частотних характеристик.

Таким чином, для опису несталої течії рідини в баку рідинної РН побудовано математичну модель, що містить рівняння руху та нерозривності рідини як системи із зосередженими параметрами, та визначено коефіцієнти цієї моделі з умови узгодження з відомим рішенням щодо власних частот коливань рідини в баку.



1 – за системою з розподіленими параметрами;
2 – за системою із зосередженими параметрами

Рис. 9 – Модуль (а) и фаза (б) коефіцієнта підсилення $\frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_T}(j\omega)$

Висновки. Розроблено підхід до математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи з розподіленими параметрами стосовно до задачі опису поздовжніх коливань рідинних РН. З використанням імпедансного методу складено нелінійну систему рівнянь для визначення ефективної швидкості звуку в паливі бака і коефіцієнта інерційного опору на виході з бака. Ці коефіцієнти дають змогу врахувати неодномірність течії рідини в баку, а також рухливість днища бака.

Розроблено підхід до математичного моделювання несталої течії рідини в баках рідинних РН як системи із зосередженими параметрами. Побудовано математичну модель із зосередженими параметрами для опису двох власних тонів коливань рідини в баку. Складено систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів моделі із зосередженими параметрами, в якій використовуються отримані раніше ефективна швидкість звуку і коефіцієнт інерційного опору на виході з бака.

Застосування зазначених підходів продемонстровано на прикладі бака окислювача першого ступеня рідинної РН Циклон. Визначено ефективну швидкість звуку та коефіцієнт інерційного опору на виході з бака за часом польоту. Встановлено, що ефективна швидкість звуку постійна в першій половині польоту і в 7 разів менша за швидкість звуку в необмеженому середовищі. Коефіцієнт інерційного опору на виході з бака істотно перевищує сумарний коефіцієнт інерційного опору рідини в баку (на початку польоту більш ніж у 10 разів). Ці результати показують, що динаміка днища бака має превалююче значення під час математичного моделювання несталої течії палива в баку. Визначено коефіцієнти математичної моделі несталої течії рідини в баку окислювача першого ступеня рідинної РН Циклон як системи із зосередженими параметрами з умови узгодження з відомим рішенням щодо власних частот коливань рідини в баку.

1. Дегтярев А. В. Ракетная техника. Проблемы и перспективы. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2014. 420 с.
2. Pylypenko O. V., Dolgoplov S. I., Nikolayev O. D., Khoriak N. V. Mathematical modeling of the transient processes in propulsion system of the upper stage of the Cyclone-4M launch vehicle. Science and Innovation. 2024. Vol. 20, No. 1. P. 49–67. <https://doi.org/10.15407/scine20.01.049>
3. Dolgoplov S., Nikolayev O. Features of mathematical modeling of nonlinear Pogo oscillations of launch vehicles. CEAS Space Journal. 2024, March. Vol. 16, Issue 2. P. 32–48. <https://doi.org/10.1007/s12567-024-00541-3>
4. Колесников К. С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 378 с.

5. Абгарян К. А., Калязин Э. Л., Мишин В. П., Рапопорт И. М. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1990. 464 с.
6. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
7. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
8. Николаев А. Д., Баилий И. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний жидкости в цилиндрическом баке при продольных вибрациях его конструкции. Техническая механика. 2012. № 2. С. 14–22.
9. Баилий И. Д., Николаев А. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний оболочечных конструкций с жидкостью с использованием современных средств компьютерного проектирования и анализа. Техническая механика. 2013. № 2. С. 18–25.
10. Николаев А. Д., Хоряк Н. В. Определение параметров собственных продольных колебаний конструкции корпуса жидкостных ракет-носителей с учетом диссипации энергии. Авиационно-космическая техника и технология. 2004. № 4. С. 62–73.
11. Wiggert D. C., Otwell R. S., Hatfield F. J. The Effect of Elbow Restraint on Pressure Transients. ASME J. Fluids Eng. 1985. V. 107. P. 402–406. <https://doi.org/10.1115/1.3242500>
12. Пилипенко В. В., Задонцев В. А., Натанзон М. С. Кавитационные колебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение. 1977. 352 с.
13. Альтишуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1970. 216 с.
14. Жулай Ю. А., Долгополов С. И., Грабовская Т. А. Математическое моделирование совместных продольных колебаний конструкции трубопровода и жидкости при кавитационных колебаниях в линиях питания ЖРД. Авиационно-космическая техника и технология. 2009. № 5(62). С. 58–63.

Отримано 21.04.2025,
в остаточному варіанті 05.08.2025