

УДК 539.3

<https://doi.org/10.15407/itm2025.03.046>

Б. УСПЕНСЬКИЙ, К. АВРАМОВ, С. МАЛИШЕВ, І. БІБЛІК

**РЕЗОНАНСНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ
СЕНДВІЧ-ОБОЛОНКИ**

*Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,
вул. Комунальників, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: admi@ipmach.kharkov.ua*

Розглядаються циліндричні композитні сендвіч-оболонки, що складаються з двох тонких лицьових сторін і товстого стільникового заповнювача. Лицьові сторони виготовлені з композитного ортотропного матеріалу, наприклад, вуглепластика. Стільниковий заповнювач виготовляється з ортотропного пластика, наприклад, PLA. Для виготовлення стільникового заповнювача застосовуються адитивні технології.

Для отримання математичної моделі нелінійних коливань конструкції серединний шар гомогенізується в однорідне ортотропне суцільне середовище. Для такої гомогенізації використовується скінченно-елементне моделювання в програмному комплексі ANSYS. Розглядаються параметричні коливання циліндричної оболонки під дією поздовжнього навантаження. Кожен шар конструкції описується зсувною теорією високого порядку, яка використовує п'ять узагальнених переміщень (три проєкції переміщень на осі та два кути повороту нормалі до серединної поверхні). Проєкції переміщень конструкції задовольняють умові безперервності переміщень на границі між шарами. Для виведення нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що описують коливання сендвіч-конструкції, застосовується метод заданих форм. Цей метод використовує кінематичну та потенційну енергії конструкції.

Для дослідження нелінійних коливань, їхньої стійкості та біфуркацій застосовуються спільно метод пристрілки і метод продовження розв'язку за параметром. Для оцінки стійкості розраховуються мультиплікатори. Стійкість і біфуркації періодичних коливань показуються на частотних відгуках, які описують динаміку конструкції в області основних параметричних резонансів. У результаті чисельного аналізу встановлено, що в циліндричній оболонці спостерігаються стоячі хвилі. Внаслідок біфуркації стоячі хвилі перетворюються на біжучі. Біжучі хвилі описуються петлею на частотному відгуку.

Ключові слова: циліндрична композитна сендвіч-оболонка, динамічна система зі скінченним числом ступенів вільності, біжучі хвилі, біфуркація.

This paper considers cylindrical composite sandwich shells that consist of two thin outer layers and one thick honeycomb filler. The outer layers are made of a composite orthotropic material, for example, carbon-reinforced plastic. The honeycomb filler is made of an orthotropic plastic, for example, PLA, using additive technologies.

To obtain a mathematical model of nonlinear structural vibrations, the honeycomb core is homogenized into a uniform orthotropic solid layer using a finite-element simulation in ANSYS. Parametric vibrations of the cylindrical shell under the action of a longitudinal load are considered. Each layer of the structure is described by a higher-order shear theory, which uses five generalized displacements (three displacements projections onto the axes and two rotation angles of the middle surface normal). The displacement projections are continuous at the layer interfaces. The assumed mode method is used to obtain a system of nonlinear ordinary differential equations in the generalized coordinates. The method uses the kinetic and the potential energy of the structure.

The shooting technique and the parameter continuation method are used jointly to analyze nonlinear vibrations, their stability and bifurcations. The multipliers are calculated to estimate the vibration stability. The stability and bifurcations of periodic oscillations are shown in the frequency responses, which describe the structure dynamics in the principal parametric resonances. As shown by the numerical analysis, standing waves are observed in the cylindrical shell. As a result of the bifurcations, the standing waves are transformed into travelling ones, which are described by a loop in the frequency response.

Keywords: cylindrical composite sandwich shell, finite-degrees-of-freedom dynamical system, travelling wave, bifurcation.

Вступ. Тонкостінні сендвіч-конструкції надзвичайно міцні та легкі. Тому такі конструкції широко використовуються в аерокосмічній техніці та авіації. Багато зусиль зроблено для дослідження коливань таких конструкцій.

© Б. Успенський, К. Аврамов, С. Малишев, І. Біблік, 2025

Техн. механіка. – 2025. – № 3.

Розглянемо роботи, присвячені нелінійним коливанням таких конструкцій.

Нелінійні коливання сендвіч-оболонки подвійної кривизни з п'єзоелектричним шаром обговорюються в [1]. Геометрично нелінійна теорія фон Кармана і зсувна теорія високого порядку використовуються спільно для дослідження коливань конструкції. Нелінійні коливання сендвіч-панелей з магнітно-реологічним шаром і стільниковим заповнювачем обговорюються в [2]. Нелінійні коливання сендвіч-циліндричних оболонок з лицьовими сторонами, посиленими нанотрубками, розглядаються в [3]. Нелінійні коливання панелі подвійної кривизни з ауксетичними стільниковими заповнювачами, що мають від'ємний коефіцієнт Пуассона, обговорюються в [4]. Нелінійні рівняння руху сендвіч-панелей виводяться за допомогою варіаційного принципу Гамільтона в статті [5]. Коливання цієї сендвіч-панелі збуджуються поперечним навантаженням. Перехідні рухи в циліндричній панелі із зовнішніми шарами, посиленими нанотрубками, та ауксетичними стільниками розглядаються в [6] під дією вибухового навантаження. Геометрично нелінійне динамічне деформування багатошарової пластини з функціонально-градієнтними ауксетичними стільниками моделюється, використовуючи нелінійні скінченні елементи [7]. Геометрично нелінійна динамічна поведінка сендвіч-панелей розглядається у [8], використовуючи метод гомогенізації. Метод гомотопії застосовується для дослідження нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описують вимушені коливання сендвіч-панелі [9]. Геометрично нелінійні коливання сендвіч-оболонки зі стільниковим заповнювачем розглядаються в області основного резонансу методом гомотопії в [10]. Геометрично нелінійні коливання багатошарової пластини аналізуються методом диференціальних квадратур в [11]. Нелінійна теорія пластин фон Кармана використовується для аналізу коливань багатошарової пластини з ауксетичним заповнювачем під дією поздовжніх динамічних навантажень у [12].

У цій статті розглядаються параметричні геометрично нелінійні коливання циліндричних тришарових оболонок з гексагональним стільниковим заповнювачем і двома тонкими лицьовими сторонами, виготовленими з вуглепластика. Коливання кожного шару описуються п'ятьма узагальненими переміщеннями, до яких входять три проєкції переміщень серединної поверхні шару і два кути повороту нормалі до серединної поверхні шару. Для опису деформаційного стану пластини використовується зсувна теорія високого порядку. Коливання тонкостінної конструкції описуються системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, яка виводиться методом заданих форм. Біфуркації періодичних нелінійних коливань та їхня стійкість досліджуються методом продовження розв'язку. У результаті чисельного інтегрування в цій роботі встановлено, що більша частина частотного відгуку являє собою стоячі хвилі в окружному напрямку. У результаті біфуркацій ці стоячі хвилі перетворюються на біжучі хвилі. Наукова новизна роботи міститься у такому. Вперше досліджені параметричні коливання сендвіч-циліндричної оболонки при геометрично нелінійному деформуванні.

Постановка задачі. Розглядається тришарова циліндрична оболонка довжини L та внутрішнього радіуса R (рис. 1, а)). Вона має гексагональний стільниковий заповнювач (рис. 1, б)) та дві лицьові обшивки, які виготовлені з ортотропного композитного матеріалу. Зовнішня обшивка, заповнювач та внутрішня обшивка позначаються через t, c, b .

Для опису напружено-деформованого стану конструкції застосовується циліндрична система координат. Поздовжню та окружну координати оболонки позначимо x, φ . Для кожного шару введемо локальні поперечні координати z_t, z_c, z_b . Шари оболонки мають товщини h_t, h_c, h_b .

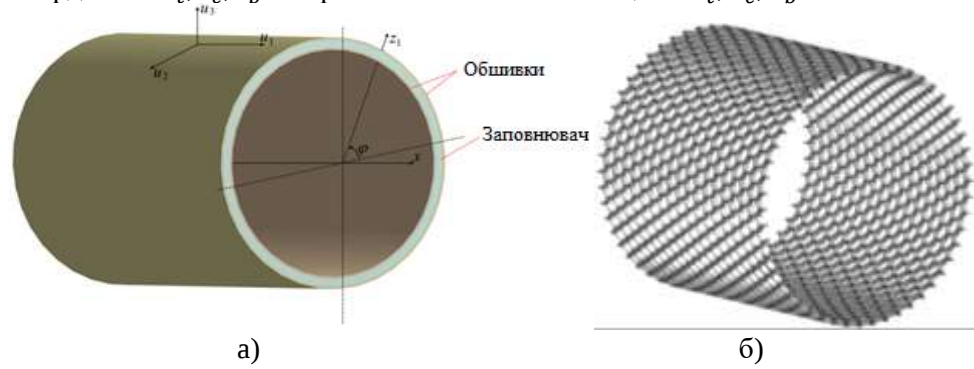


Рис. 1

Стільниковий заповнювач виготовляється з матеріалу ULTEM 9085 за допомогою адитивної технології. Цей матеріал є ортотропним. Стільниковий заповнювач замінюється еквівалентним ортотропним суцільним шаром шляхом гомогенізації заповнювача [13]. Закон Гука для цього суцільного шару має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi z}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \\ \sigma_{xy}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{\varphi z}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де $\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{\varphi z}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{xy}^{(c)}, \varepsilon_{xx}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}, \varepsilon_{zz}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(c)}, \varepsilon_{xz}^{(c)}, \varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензорів напружень та деформацій.

Обшивки зроблені з ортотропного матеріалу. Вони дуже тонкі, що дозволяє нехтувати їхніми поперечними деформаціями. Закон Гука для них має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z} &= G_{23} \varepsilon_{\varphi z}; \\ \sigma_{xz} &= G_{13} \varepsilon_{xz}; \\ \sigma_{x\varphi} &= G_{12} \varepsilon_{x\varphi}, \end{aligned}$$

де $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\varphi z}, \sigma_{xz}, \sigma_{\varphi z}$ – деформації та напруження зсуву; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{x\varphi}$ – елементи тензора деформацій Гріна; $\sigma_{xx}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{x\varphi}$ – елементи тензора напружень.

Досліджуються нелінійні параметричні коливання тришарової оболонки (рис. 1) з урахуванням геометричної нелінійності. По торцевих сторонах оболонки діє поздовжнє розподілене навантаження $\Phi \sin(\Omega \tau)$. В області параметричної нестійкості спостерігається зростання амплітуд коливань, яке

обмежується геометричною нелінійністю. У результаті цього обмеження в тонкостінній конструкції спостерігаються сталі коливання. Ці сталі коливання є предметом дослідження цієї статті.

Рівняння нелінійних коливань. Переміщення точок i -го шару вздовж координатних ліній x, φ, z позначимо

$$u_1^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_2^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_3^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), i = \{t, c, b\},$$

де τ – час. Проекції переміщень обшивок виражаються таким чином:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) &= u^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi_{1,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau); \\ u_2^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) &= v^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi_{2,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau); \\ u_3^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) &= w^{(i)}(x, \varphi, \tau), i = \{t, b\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, i = \{t, b\}$ – проєкції переміщень серединної поверхні; $\varphi_{1,1}^{(i)}, \varphi_{2,1}^{(i)}, i = \{t, b\}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні. Функції $\varphi_{1,2}^{(i)}, \varphi_{2,2}^{(i)}$ визначаються далі з граничних умов. Проекції переміщень заповнювача виражаються таким чином:

$$\begin{aligned} u_1^{(c)} &= u^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi_{1,1}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi_{1,2}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c^3 \varphi_{1,3}^{(c)}(x, \varphi, \tau); \\ u_2^{(c)} &= v^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi_{2,1}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi_{2,2}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c^3 \varphi_{2,3}^{(c)}(x, \varphi, \tau); \\ u_3^{(c)} &= w^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi_{3,1}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi_{3,2}^{(c)}(x, \varphi, \tau), \end{aligned} \quad (4)$$

де $u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}$ – проєкції переміщень серединної поверхні заповнювача; $\varphi_{1,1}^{(c)}, \varphi_{2,1}^{(c)}, \varphi_{3,1}^{(c)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні. Функції $\varphi_{1,2}^{(c)}, \varphi_{2,2}^{(c)}, \varphi_{3,2}^{(c)}, \varphi_{1,3}^{(c)}, \varphi_{2,3}^{(c)}, \varphi_{3,3}^{(c)}$ визначаються з умов безперервності переміщень, які розглядаються нижче.

Геометрично нелінійне деформування оболонки описується нелінійним зв'язком між деформаціями та переміщеннями [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(i)} &= u_{1,x}^{(i)} + \frac{1}{2} \left((u_{1,x}^{(i)})^2 + (u_{2,x}^{(i)})^2 + (u_{3,x}^{(i)})^2 \right); \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} &= C_i (u_{2,\varphi}^{(i)} + u_3^{(i)}) + \frac{1}{2} C_i^2 \left((u_{2,\varphi}^{(i)} + u_3^{(i)})^2 + (u_{1,\varphi}^{(i)})^2 + (u_2^{(i)} - R_i u_{3,\varphi}^{(i)})^2 \right); \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= u_{3,z_i}^{(i)} + \frac{1}{2} \left((u_{1,z_i}^{(i)})^2 + (u_{2,z_i}^{(i)})^2 + (u_{3,z_i}^{(i)})^2 \right); \\ \varepsilon_{\varphi z}^{(i)} &= u_{2,z_i}^{(i)} + C_i (u_{3,\varphi}^{(i)} - u_2^{(i)}) + C_i u_{1,z_i}^{(i)} u_{1,\varphi}^{(i)} - C_i (u_2^{(i)} - R_i u_{3,\varphi}^{(i)}) u_{1,z_i}^{(i)}; \\ \varepsilon_{xz}^{(i)} &= u_{1,z_i}^{(i)} + u_{3,x}^{(i)} + u_{1,x}^{(i)} u_{1,z_i}^{(i)} + u_{2,x}^{(i)} u_{2,z_i}^{(i)} - u_{3,x}^{(i)} u_{3,z_i}^{(i)}; \\ \varepsilon_{x\varphi}^{(i)} &= u_{2,x}^{(i)} + C_i u_{1,\varphi}^{(i)} + C_i \frac{1}{R_i} u_{1,x}^{(i)} u_{1,\varphi}^{(i)} + C_i (u_{2,\varphi}^{(i)} + u_3^{(i)}) u_{2,x}^{(i)} \\ &\quad - C_i (u_2^{(i)} - R_i u_{3,\varphi}^{(i)}) u_{3,x}^{(i)}; \quad i = t, c, b, \end{aligned} \quad (5)$$

де $u_{2,x}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x}$; $R_b = R + \frac{h_b}{2}$; $R_c = R + h_b + \frac{h_c}{2}$; $R_t = R + h_b + h_c + \frac{h_t}{2}$; $C_i = \frac{1}{R_i + z_i}$.

Граничні умови на поверхнях оболонки мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) &= 0; \sigma_{\varphi z}^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) = 0; \\ \sigma_{xz}^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) &= 0; \sigma_{\varphi z}^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Умови безперервності переміщень на границях між шарами оболонки є такими:

$$\begin{aligned}u_i^{(t)}\left(x, \varphi, -\frac{h_t}{2}, \tau\right) &= u_i^{(c)}\left(x, \varphi, \frac{h_c}{2}, \tau\right), i = 1, 2, 3; \\ u_i^{(b)}\left(x, \varphi, \frac{h_b}{2}, \tau\right) &= u_i^{(c)}\left(x, \varphi, -\frac{h_c}{2}, \tau\right), i = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (7)$$

Підставляючи вирази (3), (4) у (7) отримаємо:

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2}^{(t)} &= -\frac{1}{h_t}\left(w_{,x}^{(t)} + \varphi_{1,1}^{(t)}\right); \varphi_{1,2}^{(b)} = \frac{1}{h_b}\left(w_{,x}^{(b)} + \varphi_{1,1}^{(b)}\right); \\ \varphi_{2,2}^{(t)} &= \frac{1}{4R_t^2 h_t}\left(-4\varphi_{2,1}^{(t)} R_t^2 + R_t h_t \varphi_{2,1}^{(t)} - 4R_t w_{,\varphi}^{(t)} + v^{(t)} h_t\right); \\ \varphi_{2,2}^{(b)} &= \frac{1}{4R_b^2 h_b}\left(4\varphi_{2,1}^{(b)} R_b^2 + R_b h_b \varphi_{2,1}^{(b)} + 4R_b w_{,\varphi}^{(b)} + v^{(b)} h_b\right); \\ \varphi_{1,3}^{(c)} &= \frac{1}{h_c^3}\left(-h^{(t)} w_{,x}^{(t)} - h^{(b)} w_{,x}^{(b)} - 3h^{(b)} \varphi_{1,1}^{(b)} - 3h^{(t)} \varphi_{1,1}^{(t)} - 4h^{(c)} \varphi_{1,1}^{(c)} - 4u^{(b)} + 4u^{(t)}\right); \\ \varphi_{2,3}^{(c)} &= \frac{1}{h_c^3}\left(4v^{(t)} - 4v^{(b)} - 3h_t \varphi_{2,1}^{(t)} - 3h_b \varphi_{2,1}^{(b)} - 4h_c \varphi_{2,1}^{(c)} - 4\frac{h_c}{R_c} v^{(c)}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{h_c^3 R_b}\left(h_b w_{,\varphi}^{(b)} + 2h_b v^{(b)} + \frac{h_b^2}{4} \varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{h_b^2}{4R_b} v^{(b)}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{h_c^3 R_t}\left(h_t w_{,\varphi}^{(t)} + 2h_t v^{(t)} - \frac{h_t^2}{4} \varphi_{2,1}^{(t)} - \frac{h_t^2}{4R_t} v^{(t)}\right); \\ \varphi_{3,2}^{(c)} &= \frac{1}{h_c^2}\left(2w^{(t)} - 4w^{(c)} + 2w^{(b)}\right); \\ \varphi_{1,2}^{(c)} &= \frac{1}{2h_c^2}\left(-h_t w_{,x}^{(t)} + h_b w_{,x}^{(b)} + 3h_b \varphi_{1,1}^{(b)} - 3h_t \varphi_{1,1}^{(t)} + 4u^{(b)} + 4u^{(t)} - 8u^{(c)}\right); \\ \varphi_{2,2}^{(c)} &= \frac{1}{2h_c^2}\left(4v^{(t)} + 4v^{(b)} - 3h_t \varphi_{2,1}^{(t)} + 3h_b \varphi_{2,1}^{(b)} - 8v^{(c)}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2h_c^2 R_b}\left(h_b w_{,\varphi}^{(b)} + 2v^{(b)} h_b + \frac{h_b^2}{4} \varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{h_b^2}{4R_b} v^{(b)}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2h_c^2 R_t}\left(-h_t w_{,\varphi}^{(t)} - 2v^{(t)} h_t + \frac{h_t^2}{4} \varphi_{2,1}^{(t)} + \frac{h_t^2}{4R_t} v^{(t)}\right); \varphi_{3,1}^{(c)} = \frac{1}{h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right).\end{aligned}\quad (8)$$

Підстановка розкладань (3), (4), (8) у вирази (5) дозволяє представити деформації у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(j)} &= \varepsilon_{xx,0}^{(j)} + z_j k_{xx,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xx,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xx,2}^{(j)}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(j)} &= \varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(j)} + z_j k_{\varphi\varphi,0}^{(j)} + z_j^2 k_{\varphi\varphi,1}^{(j)} + z_j^3 k_{\varphi\varphi,2}^{(j)}; \\ \varepsilon_{x\varphi}^{(j)} &= \varepsilon_{x\varphi,0}^{(j)} + z_j k_{x\varphi,0}^{(j)} + z_j^2 k_{x\varphi,1}^{(j)} + z_j^3 k_{x\varphi,2}^{(j)}; \\ \varepsilon_{xz}^{(j)} &= \varepsilon_{xz,0}^{(j)} + z_j k_{xz,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xz,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xz,2}^{(j)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi z}^{(j)} &= \varepsilon_{\varphi z,0}^{(j)} + z_j k_{\varphi z,0}^{(j)} + z_j^2 k_{\varphi z,1}^{(j)} + z_j^3 k_{\varphi z,2}^{(j)}; \quad j = t, b, c; \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} &= \varepsilon_{zz,0}^{(c)} + z_c k_{zz,0}^{(c)},\end{aligned}\quad (9)$$

де компоненти розкладань за z_j (9) легко отримуються в середовищі Maple. Ці компоненти розкладань мають громіздкий вигляд. Тому вони тут не наводяться. Кінетична енергія оболонки має такий вигляд:

$$T = \sum_{i=(t,c,b)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i \left((\dot{u}_1^{(i)})^2 + (\dot{u}_2^{(i)})^2 + (\dot{u}_3^{(i)})^2 \right) (R_i + z_i) dz_i d\varphi dx, \quad (10)$$

де ρ_i – щільність i -го шару. Підстановка розкладань (3), (4) в кінетичну енергію (10) та інтегрування за z дозволяє представити кінетичну енергію так:

$$\begin{aligned}T &= 0.5 \sum_{i=(t,b)} \int_0^{2\pi} \int_0^L (r_0^{(i)} T_0^{(i)} + r_1^{(i)} T_1^{(i)} + \dots + r_5^{(i)} T_5^{(i)}) d\varphi dx \\ &+ 0.5 \rho_c \int_0^{2\pi} \int_0^L (T_0^{(c)} + T_2^{(c)} + T_4^{(c)} + T_6^{(c)}) d\varphi dx,\end{aligned}\quad (11)$$

де $r_j^{(i)} = \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} z_i^j \rho_i dz_i$; $i = t, b$. Величини з кінетичної енергії (11) $T_0^{(i)}, \dots, T_5^{(i)}, T_0^{(c)}, \dots, T_6^{(c)}$ залежать від параметрів розкладань (3), (4). Ці параметри розкладань знаходяться в середовищі Maple.

Потенційну енергію гомогенізованого стільникового заповнювача $\Pi^{(c)}$ представимо так:

$$\begin{aligned}\Pi^{(c)} &= 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left(\sigma_{xx}^{(c)} \varepsilon_{xx}^{(c)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} + \sigma_{zz}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + 2\sigma_{x\varphi}^{(c)} \varepsilon_{x\varphi}^{(c)} + 2\sigma_{\varphi z}^{(c)} \varepsilon_{\varphi z}^{(c)} \right. \\ &\left. + 2\sigma_{xz}^{(c)} \varepsilon_{xz}^{(c)} \right) (R_c + z_c) dz_c d\varphi dx.\end{aligned}\quad (12)$$

Потенційну енергію двох лицьових сторін представимо так:

$$\begin{aligned}\Pi^{(i)} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \left(\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \sigma_{\varphi z}^{(i)} \varepsilon_{\varphi z}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{x\varphi}^{(i)} \varepsilon_{x\varphi}^{(i)} \right) (R_i \\ &+ z_i) dz_i d\varphi dx.\end{aligned}\quad (13)$$

Співвідношення (1), (2) і розкладання (9) вводяться в потенційні енергії (12), (13). Усю послідовність перетворень потенційних енергій здійснюють у середовищі Maple. Граничні умови для оболонки, яку заземлено з обох сторін, мають вигляд:

$$\begin{aligned}u_1^{(i)} \Big|_{x=0} &= u_2^{(i)} \Big|_{x=0} = u_3^{(i)} \Big|_{x=0} = u_2^{(i)} \Big|_{x=L} = u_3^{(i)} \Big|_{x=L} = 0; \\ u_{1,x}^{(i)} \Big|_{x=0} &= u_{2,x}^{(i)} \Big|_{x=0} = u_{3,x}^{(i)} \Big|_{x=0} = u_{1,x}^{(i)} \Big|_{x=L} = u_{2,x}^{(i)} \Big|_{x=L} = u_{3,x}^{(i)} \Big|_{x=L} = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Перед аналізом нелінійних параметричних коливань тришарових оболонок проводиться аналіз їхніх лінійних коливань. По-перше, аналіз лінійних коливань дає змогу визначити внутрішні резонанси, які спостерігаються в конструкції. Внутрішні резонанси дають змогу визначити активні моди коливань, які спостерігаються під час резонансів параметричних коливань системи. По-друге, нелінійні коливання конструкції розкладаються за формами власних коливань.

Для аналізу лінійних коливань скористаємося методом Релея–Рітца [14]. Тоді основні невідомі задачі (узагальнені переміщення) (3), (4) подаються у вигляді:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \varphi_{1,1}^{(i)} \\ \varphi_{2,1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x, \varphi) \\ V_i(x, \varphi) \\ W_i(x, \varphi) \\ \Phi_i(x, \varphi) \\ \Psi_i(x, \varphi) \end{bmatrix} \cos(\omega\tau), \quad i = t, c, b, \quad (15)$$

де ω – частота коливань; $U_i(x, \varphi), V_i(x, \varphi), W_i(x, \varphi), \Phi^{(i)}(x, \varphi), \Psi^{(i)}(x, \varphi)$ – невідомі функції, що задовольняють граничним умовам (14). Ці функції представимо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} U_i &= \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N_u^{(i)}} U_m^{(i)} F_m^{(u)}(x); V_i = \sin(n\varphi) \sum_{m=1}^{N_v^{(i)}} V_m^{(i)} F_m^{(v)}(x); \\ W_i &= \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N_w^{(i)}} W_m^{(i)} F_m^{(w)}(x); \Phi_i = \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N_\Phi^{(i)}} \Phi_m^{(i)} F_m^{(\Phi)}(x); \\ \Psi_i &= \sin(n\varphi) \sum_{m=1}^{N_\Psi^{(i)}} \Psi_m^{(i)} F_m^{(\Psi)}(x), i = t, c, b, \end{aligned} \quad (16)$$

де n – кількість хвиль за окружною координатою; $F_m^{(u)}(x), F_m^{(v)}(x), F_m^{(w)}(x), F_m^{(\Phi)}(x), F_m^{(\Psi)}(x)$ – базисні функції, що задовольняють граничним умовам (14).

Проблема власних значень отримується з методу Релея–Рітца [14]. Розв'язуючи проблему власних значень, розраховуємо власні частоти ω_i ; $i = 1, 2, \dots$ і форми коливань

$$W_j^{(i)}(x), V_j^{(i)}(x), U_j^{(i)}(x), \Phi_j^{(i)}(x), \Psi_j^{(i)}(x); i = 1, 2, \dots; j = t, c, b.$$

Ці частоти і форми коливань використовуються для розв'язання нелінійної задачі.

Основні невідомі (узагальнені переміщення) $u^{(i)}(x, \varphi, \tau), v^{(i)}(x, \varphi, \tau), w^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau), i = \{t, b, c\}$ розкладемо за власними формами лінійної задачі так:

$$w^{(j)} = q_{j,1}^{(w)} W_j^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N_f} W_j^{(i)}(x) \left[q_{j,1+i}^{(w)} \cos(n_i \varphi) + q_{j,1+N_f+i}^{(w)} \sin(n_i \varphi) \right];$$

$$\begin{aligned}
v^{(j)} &= q_{j,1}^{(v)} V_j^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N_f} V_j^{(i)}(x) \left[q_{j,1+i}^{(v)} \cos(n_i \varphi) + q_{j,1+N_f+i}^{(v)} \sin(n_i \varphi) \right]; \\
u^{(j)} &= q_{j,1}^{(u)} U_j^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N_f} U_j^{(i)}(x) \left[q_{j,1+i}^{(u)} \cos(n_i \varphi) + q_{j,1+N_f+i}^{(u)} \sin(n_i \varphi) \right]; \\
\varphi_{1,1}^{(j)} &= q_{j,1}^{(\varphi 1)} \Phi_j^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N_f} \Phi_j^{(i)}(x) \left[q_{j,1+i}^{(\varphi 1)} \cos(n_i \varphi) + q_{j,1+N_f+i}^{(\varphi 1)} \sin(n_i \varphi) \right]; \\
\varphi_{2,1}^{(j)} &= q_{j,1}^{(\varphi 2)} \Psi_j^{(0)}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{N_f} \Psi_j^{(i)}(x) \left[q_{j,1+i}^{(\varphi 2)} \cos(n_i \varphi) + q_{j,1+N_f+i}^{(\varphi 2)} \sin(n_i \varphi) \right]; \quad (17) \\
j &= t, c, b,
\end{aligned}$$

де $n_i, i = 1 \dots N_f$ – кількість хвиль за окружною координатою. Вектор узагальнених координат $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_*})$; $N_* = 15 + 30N_f$ містить усі узагальнені координати розкладання (17) $q_{j,i}^{(w)}, q_{j,i}^{(v)}, q_{j,i}^{(u)}, q_{j,i}^{(\varphi 1)}, q_{j,i}^{(\varphi 2)}$. Як випливає з [14], у розкладанні нелінійних коливань оболонки (17) мають обов'язково бути присутніми осесиметричні моди коливань. У розкладанні (17) обов'язково присутні сполучені форми коливань, оскільки вони задовольняють умові внутрішнього резонансу 1:1. Підсумовування за i в розкладанні (17) відбувається за формами коливань, частоти яких беруть участь у внутрішніх резонансах і параметричних резонансних умовах.

Розкладання всіх узагальнених переміщень (17) вводять у потенційну енергію конструкції (12), (13) і в кінетичну енергію (11) і проводять інтегрування за $x, \varphi, z_i, i = \{t, c, b\}$. Кінетична енергія буде квадратичною формою елементів вектора узагальнених швидкостей $T = T(\dot{\mathbf{q}})$. Потенційна енергія міститиме квадратичні доданки, кубічні доданки та доданки четвертого степеню відносно елементів вектора узагальнених координат

$$\Pi(\Sigma) = \Pi(\Sigma)(\mathbf{q}) = \Pi^{(t)}(\mathbf{q}) + \Pi^{(c)}(\mathbf{q}) + \Pi^{(b)}(\mathbf{q}). \quad (18)$$

Роботу поздовжнього параметричного навантаження $\Phi \sin(\Omega \tau)$ представимо так:

$$\begin{aligned}
\tilde{W} &= -\frac{\Phi \sin(\Omega \tau)}{2} \left(h_t R_t \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi + h_c R_c \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi \right. \\
&\left. + h_b R_b \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi \right). \quad (19)
\end{aligned}$$

У роботу (19) введемо розкладання для переміщень (17). Тоді робота (19) представляється квадратичною формою від елементів вектора узагальнених координат: $\tilde{W} = \tilde{W}(\mathbf{q})$.

Нелінійні звичайні диференціальні рівняння руху конструкції відносно узагальнених координат представимо у вигляді рівнянь в матричному вигляді:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{q}) + \Phi \sin(\Omega \tau) \mathbf{K}^{(st)} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

де $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ – матриці мас та жорсткості; $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ – поліноміальна вектор-функція з кубічними доданками відносно узагальнених координат. Квадратичні доданки, які входять до (20), малі. Тому вони не враховуються.

Особливості конструкції циліндричної сендвіч-оболонки полягають у такому. По-перше, лицьові шари конструкції на порядок тонші за серединний шар. По-друге, щільність серединного шару значно менша за щільність лицьових сторін. Тому частина рядків матриці мас близькі до нуля. Для того щоб виділити нульові елементи матриці мас, систему (20) перепишемо в такому матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\ \mathcal{R}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \end{bmatrix} + \Phi \sin(\Omega \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(st)} & \mathbf{K}_{12}^{(st)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(st)} & \mathbf{K}_{22}^{(st)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (21)$$

Деякі матриці системи (21) складаються з елементів, близьких до нулів. Тому прийемо, що ці матриці складаються з нульових елементів: $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{22} = \mathbf{K}_{12}^{(st)} = \mathbf{K}_{21}^{(st)} = \mathbf{K}_{22}^{(st)} = \mathbf{0}$. Тоді друге матричне рівняння системи (21) матиме такий вигляд:

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{q}_2 = -\mathcal{R}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2). \quad (22)$$

Отже, отримали матричне нелінійне алгебраїчне рівняння (22) з поліноміальною кубічною нелінійністю. Розв'язок цього рівняння представимо так:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{B}\mathbf{q}_1 + \mathcal{H}(\mathbf{q}_1). \quad (23)$$

де $\mathbf{B}$ – матриця, що підлягає визначенню; $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1)$ – вектор-функція, що підлягає визначенню і складається з кубічних поліномів;

$$\mathcal{H}_i(\mathbf{q}_1) = \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{j=1}^v \sum_{j_1=1}^j \pi_{vjj_1}^{(i)} q_v q_j q_{j_1};$$

$\dim(\mathbf{q}_1) = N_1$; $\pi_{vjj_1}^{(i)}$ – коефіцієнти, що підлягають визначенню. Розкладання (23) вводиться в (22) і збираються окремо доданки при перших степенях $\mathbf{q}_1$ і при кубічних степенях $\mathbf{q}_1$. У результаті приходимо до такої системи матричних рівнянь:

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{B}\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}; \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{22}\mathcal{H}(\mathbf{q}_1) = -\mathcal{R}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{B}\mathbf{q}_1). \quad (25)$$

З рівняння (24) знайдемо матрицю $\mathbf{B}$ в такому вигляді:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}. \quad (26)$$

Під час розв'язання матричного рівняння (25) знаходиться вектор-функція $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1)$. Прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях $q_v q_j q_{j_1}$; $v = 1, \dots, N_1$; $j = 1, \dots, v$; $j_1 = 1, \dots, j$ отримуємо лінійні алгебраїчні рівняння щодо коефіцієнтів $\pi_{vjj_1}^{(i)}$. Розв'язуючи ці рівняння, отримуємо (23).

Тепер розв'язок (23) вводиться в перше матричне рівняння (21). У результаті отримуємо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь у такому вигляді:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_{11}^{(\Sigma)}\mathbf{q}_1 + \beta\mathbf{K}_{11}^{(\Sigma)}\dot{\mathbf{q}}_1 + \hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{q}_1) + \Phi\sin(\Omega\tau)\mathbf{K}_{11}^{(\text{st})}\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}, \quad (27)$$

де $\mathbf{K}_{11}^{(\Sigma)} = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}\mathbf{B}$; $\hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{q}_1) = \mathbf{R}_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{B}\mathbf{q}_1) + \mathbf{K}_{12}\mathcal{H}(\mathbf{q}_1)$. Припускається, що дисипація пропорційна матриці жорсткості конструкції.

Динамічну систему (27) представимо відносно модальних координат. Для цього результати аналізу лінійних коливань динамічної системи (27) представимо в такому матричному вигляді:

$$\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{11}^{(\Sigma)}\mathbf{U} = \mathbf{U}\boldsymbol{\omega}^2, \quad (28)$$

де $\mathbf{U}$ – матриця власних форм коливань; $\boldsymbol{\omega}^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{N_1}^2)$ – діагональна матриця власних частот коливань. Модальні координати лінійної частини динамічної системи (27) визначаються так: $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q}_1$. Тоді нелінійна динамічна система (27) щодо модальних координат набуде такого вигляду:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \beta\boldsymbol{\omega}^2\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\eta} + \hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{U}\boldsymbol{\eta}) + \Phi\sin(\Omega\tau)\hat{\mathbf{K}}_{11}^{(\text{st})}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad (29)$$

де $\boldsymbol{\delta} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_{N_1})$; $\hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{U}\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{q}_1)$; $\hat{\mathbf{K}}_{11}^{(\text{st})} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{11}^{(\text{st})}\mathbf{U}$.

Введемо безрозмірні змінні, параметри та матриці в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_c}\boldsymbol{\eta} &= \hat{\mathbf{q}}; \quad t = \omega_1\tau; \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_1}; \quad \hat{\boldsymbol{\delta}} = \beta\omega_1\bar{\omega}^2; \quad \hat{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_*}; \\ \frac{1}{\omega_1^2}\boldsymbol{\omega}^2 &= \bar{\boldsymbol{\omega}}^2; \quad \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(\text{st})} = \mathbf{K}_{11}^{(\text{st})}\frac{\Phi_*}{\omega_1^2}; \quad \hat{\mathbf{R}}_1(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\omega_1^2 h_c}\hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{U}\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (30)$$

де Φ_* – величина критичного навантаження. Тоді динамічна система (29) набуде такого вигляду щодо безрозмірних змінних і безрозмірних матриць:

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\boldsymbol{\delta}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^2\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{R}}_1(\hat{\mathbf{q}}) + \hat{\Phi}\sin(\bar{\Omega}t)\hat{\mathbf{K}}_{11}^{(\text{st})}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Чисельний підхід до аналізу нелінійних параметричних коливань оболонки. Досліджуються резонансні нелінійні параметричні коливання в областях основних параметричних резонансів, які задовольняють таким умовам

$$\bar{\Omega} \approx 2\bar{\omega}_l; \quad l = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Дослідження нелінійних параметричних коливань проходить у два етапи.

На першому етапі досліджуються області динамічної нестійкості тривіальних станів рівноваги. Для цього аналізується лінеаризована динамічна система (27) методом визначників Хілла. У результаті розрахунку отримуємо границі області динамічної нестійкості тривіального стану рівноваги.

На другому етапі досліджуються нелінійні параметричні коливання, які народжуються на границі області динамічної нестійкості. Для цього застосовується метод пристрілки спільно з алгоритмом продовження розв'язку. Для продовження розв'язку використовується алгоритм продовження по колу. Оцінюються стійкість періодичних рухів і досліджуються їхні біфуркації.

Зараз розглянемо стійкість тривіального стану рівноваги лінеаризованої динамічної системи (27). Для оцінки стійкості будемо використовувати динамічну систему в фізичних узагальнених координатах (27). В цьому випадку кубічні поліноми $\hat{\mathbf{R}}_1(\mathbf{q}_1)$ у рівняннях руху не враховуються. У

розкладанні (17) приймається $N_f = 1$, а осесиметричні форми коливань не враховуються. Тоді динамічна система (27) має шість ступенів вільності $N_1 = 6$. На границі області динамічної нестійкості існує періодичний розв'язок, який представимо у вигляді ряду Фур'є:

$$q_i = \sum_{j=1}^H \left[A_{i+2N_1(j-1)} \sin\left(j \frac{\bar{\Omega}}{2} t\right) + A_{i+N_1(2j-1)} \cos j \frac{\bar{\Omega}}{2} t \right], i = 1 \dots N_1, \quad (33)$$

де A_j – невідомі амплітуди гармонік; H – кількість членів розкладання.

Далі метод визначників Хілла збігається з методом гармонійного балансу. Розв'язок (33) вводиться в лінеаризовану динамічну систему (27) і збираються доданки при $\sin\left(j \frac{\bar{\Omega}}{2} t\right); \cos\left(j \frac{\bar{\Omega}}{2} t\right); j = 1, \dots, H$. У результаті виходить однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд гармонік ряду Фур'є

$$\mathbf{G}(\Omega, \Phi) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

де $\mathbf{G}(\Omega, \Phi)$ – матриця розмірністю $2HN_1 \times 2HN_1$, елементи якої залежать від Ω і Φ ; $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{2HN_1})$ – вектор невідомих амплітуд ряду Фур'є. Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (34) існує, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\det[\mathbf{G}(\Omega, \Phi)] = 0. \quad (35)$$

Співвідношення (35) є рівнянням границі області динамічної нестійкості на площині параметрів (Ω, Φ) .

Для розрахунку цієї границі задається значення амплітуди параметричного навантаження Φ . Тоді рівняння (35) є нелінійним алгебраїчним рівнянням відносно Ω , яке розв'язується методом Ньютона.

Для розрахунку нелінійних параметричних коливань у головних параметричних резонансах (32) чисельно досліджується динамічна система (31) відносно модальних узагальнених координат $\mathbf{\bar{q}}$. Насамперед, розмірність цієї динамічної системи скорочується. Враховуються тільки активні модальні координати, частоти яких задовольняють умові основного параметричного резонансу (32) та умовам внутрішніх резонансів. Ці умови внутрішніх резонансів будуть розглядатися в наступних розділах статті. Редуковані динамічні системи (31) також розглядатимуться далі.

Для чисельного моделювання нелінійних коливань редукованої динамічної системи (31) застосовано метод пристрілки спільно з алгоритмом продовження розв'язку у формі продовження по колу [15]. Ці розрахунки супроводжувалися оцінкою стійкості періодичних рішень. Для цього розраховували матриці монодромії рівнянь у варіаціях і мультиплікатори. Чисельно розраховуються біфуркаційні точки періодичних коливань.

Результати чисельного моделювання коливань. Розглядається циліндрична сендвіч-оболонка з двома лицьовими обшивками товщиною $h_t = h_b = 1$ мм. Ці обшивки виготовлено з вуглепластика SIGRAPREG C U200, вони мають чотири шари, які розташовано під кутами $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$. Еквівалентні механічні властивості цих лицьових шарів такі:

$$E_{11} = 35 \text{ ГПа}; E_{22} = 35 \text{ ГПа}; E_{33} = 8 \text{ ГПа}; \nu_{23} = 0,09; \nu_{13} = 0,09; \nu_{12} = 0,01; \\ G_{23} = 30 \text{ ГПа}; G_{13} = 30 \text{ ГПа}; G_{12} = 6 \text{ ГПа}; \rho_i = 1477 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, i = \{t, b\}. \quad (36)$$

Стільниковий заповнювач товщиною $h_c = 10$ мм виготовлено з матеріалу ULTEM 9085 за допомогою адитивної технології FDM. Комірку стільникового заповнювача зображено на рис. 2. Її розміри є такими:

$$l_1 = 6,1054 \text{ мм}; l_2 = 3,0527 \text{ мм}; \theta = 60^\circ; h_1 = h_2 = 0,4 \text{ мм}. \quad (37)$$

Гомогенізовані властивості заповнювача дорівнюють [4]:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 2,91 \text{ МПа}; E_{\varphi\varphi} = 2,91 \text{ МПа}; E_{zz} = 215,10 \text{ МПа}; \nu_{x\varphi} = 0,972; \\ \nu_{\varphi z} &= 0,0051; \nu_{xz} = 0,0042; G_{x\varphi} = 1,118 \text{ МПа}; G_{\varphi z} = 39,1 \text{ МПа}; \\ G_{xz} &= 39,1 \text{ МПа}; \rho_c = 253,189 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned} \quad (38)$$

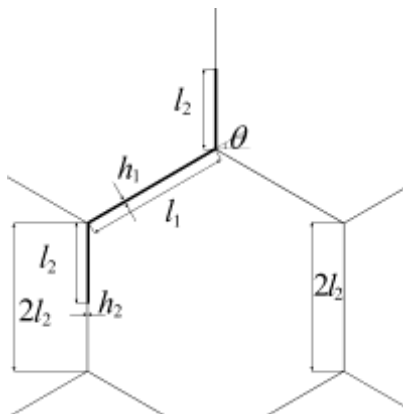


Рис. 2 – Одна комірка стільника

Довжина циліндру та внутрішній радіус оболонки дорівнюють $L = 1$ м, $R = 0,25$ м.

Розглядається защемлена з двох боків оболонка, яка задовольняє граничним умовам (14).

Для розрахунку вільних лінійних коливань циліндричної сендвіч-оболонки застосовується метод Релея–Рітца, який розглянуто вище. Як показали чисельні результати при $N_u^{(i)} = N_v^{(i)} = N_w^{(i)} = N_\Phi^{(i)} = N_\Psi^{(i)} = 25$ у розкладаннях (16) досягається збіжність власних частот. Перші дванадцять власних частот коливань наведено в другій колонці таблиці. У першій колонці таблиці подано номер власної частоти коливань. Число хвиль в окружному напрямку n наводиться в третій колонці.

Для верифікації отриманих власних частот коливань проводили їх розрахунок у програмному комплексі ANSYS. Результати таких розрахунків наведено в четвертій колонці таблиці. Відносна різниця власних частот коливань, отриманих різними методами, наводиться в п'ятій колонці. Ця різниця не перевищує 3 %.

Таблиця 1. Власні частоти коливань

Номер власної частоти	Власні частоти за методом Релея–Рітца, Гц	n	Власні частоти за ANSYS, Гц	Похибка, %
1	385,56	2	381,76	1,00
2	414,62	3	411,97	0,64
3	590,17	1	587,82	0,40
4	590,38	4	588,85	0,26
5	698,61	4	690,84	1,12
6	732,77	2	721,83	1,52
7	811,01	5	809,93	0,13
8	857,70	0	857,70	0,00
9	874,43	5	869,16	0,61
10	875,88	4	859,16	1,95
11	886,29	3	867,26	2,19
12	990,61	5	977,72	1,32

За результатами розрахунків власних частот коливань можна зробити такі висновки. Перша власна частота коливань $\bar{\omega}_1$ не бере участі у внутрішніх резонансах 1:2, 1:3. Тому, якщо частота параметричного навантаження і частота $\bar{\omega}_1$ задовольнятимуть основному параметричному резонансу (32), то крім двох сполучених мод розкладання (17), що задовольняють умові внутрішнього резонансу 1:1, не збуджуватимуться інші моди коливань.

Розглянемо основний параметричний резонанс першої власної частоти коливань $\bar{\omega}_1$ за умови взаємодії двох сполучених форм коливань. Редукована динамічна система (31) у цьому разі набуде такого вигляду:

$$\ddot{q}_i + \delta_1 \dot{q}_i + \bar{\omega}_1^2 q_i + \tilde{\mathcal{R}}_{1,i}(q_1, q_2, q_3) + \hat{\Phi} \sin(\bar{\Omega}t) \sum_{j=1}^3 \hat{K}_{11,ij}^{(st)} q_j = 0; \quad i = 1, 2; \quad (39)$$

$$\ddot{q}_3 + \delta_3 \dot{q}_3 + \bar{\omega}_0^2 q_3 + \tilde{\mathcal{R}}_{1,3}(q_1, q_2, q_3) + \hat{\Phi} \sin(\bar{\Omega}t) \sum_{j=1}^3 \hat{K}_{11,3j}^{(st)} q_j = 0,$$

де $\hat{q}_1, \hat{q}_2$ — узагальнені координати двох сполучених мод коливань з однаковою частотою $\bar{\omega}_1$; $\hat{q}_3$ — узагальнена координата, що описує осесиметричну форму коливань з частотою $\bar{\omega}_0$; $\tilde{\mathcal{R}}_{1,i}(q_1, q_2, q_3)$ — функції кубічних доданків відносно узагальнених координат. Осесиметрична форма коливань описує дихання оболонки, яке завжди має місце при її геометрично нелінійних коливаннях.

Проводилося чисельне моделювання оболонки з параметрами (36)–(38). Для побудови частотних відгуків, оцінювання стійкості періодичних розв'язків і визначення біфуркаційних точок застосовується метод пристрілки спільно з алгоритмом продовження.

Отримавши чисельно рух динамічної системи (39) у модальних координатах, перетворимо його до узагальнених координат динамічної системи (27) $q_1, \dots, q_{N_1}$. Результати чисельного моделювання частотного

відгуку на ділянці основного параметричного резонансу наведені на рис. 3, 4, де показуються залежності узагальнених координат q_1 і q_2 від безрозмірної частоти параметричного навантаження.

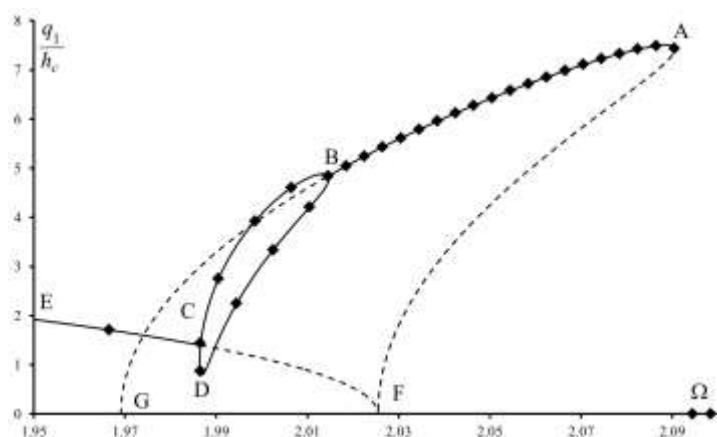


Рис. 3 – Амплітудно-частотна характеристика узагальненої координати q_1

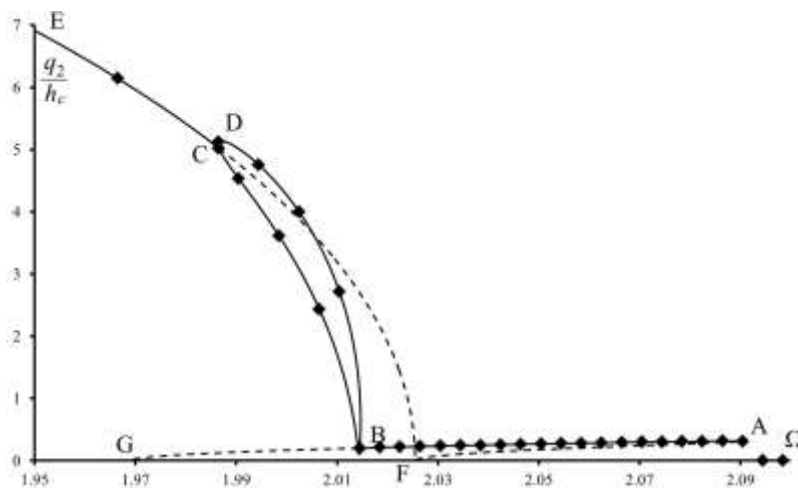


Рис. 4 – Амплітудно-частотна характеристика узагальненої координати q_2

Для верифікації періодичних коливань динамічної системи (39) з трьома ступенями вільності проводилося пряме чисельне інтегрування повної динамічної системи (27) з 18 ступенями вільності. Результати такого чисельного інтегрування показуються точками на рис. 3, 4. Близькість результатів, отриманих із математичних моделей з різною розмірністю, свідчить про адекватність динамічної системи (39).

Розглянемо динамічну поведінку оболонки, яку наведено на рис. 3, 4. Стійкі розв'язки показуються суцільною лінією, а нестійкі – пунктирною лінією. Резонансні періодичні коливання, які наведено на рис. 3, 4, народжуються внаслідок зміни стійкості тривіального стану рівноваги. На ділянці (GF) тривіальний стан рівноваги нестійкий. Петля (BCDB) описує біжучі хвилі уздовж окружної координати, коли взаємодіють дві спряжені

моди коливань. У цьому випадку спостерігається енергообмін між цими модами коливань. Усі інші ділянки, наведені на рис. 3, 4, описують стоячі хвилі в оболонці, коли збуджується одна з двох спряжених мод коливань.

У точці G народжуються нестійкі періодичні коливання, які стають стійкими внаслідок з'єднання в біфуркаційній точці В з петлею, що описує біжучі хвилі. У такій біфуркаційній точці мультиплікатор дорівнює 1 ($\lambda = 1$). У точці F народжуються дві гілки нестійких періодичних коливань. Одна з гілок стає стійкою в біфуркаційній точці С, де вона з'єднується з петлею біжучих хвиль. Гілка нестійких періодичних коливань (FA) у точці А зазнає сидло-вузлової біфуркації.

Розглянемо детальніше біжучі хвилі, які описуються петлею (BCDB) (див. рис. 3, 4). Частину розкладання (17), яка описує $w^{(j)}$, можна записати так:

$$W_j^{(1)}(x)[q_1 \cos(n_1\varphi) + q_2 \sin(n_1\varphi)] = W_j^{(1)}(x)A(t)\sin(n_1\varphi + \varphi_0(t)), \quad (40)$$

$$\text{де } A(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}; \sin\varphi_0 = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}; \cos\varphi_0 = \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Якщо φ_0 набуває двох постійних значень, які по черзі змінюються з плином часу, то в розглянутій оболонці спостерігаються стоячі хвилі. Якщо величина φ_0 є безперервною періодичною функцією часу, то спостерігаються біжучі хвилі уздовж окружної координати оболонки. Стоячі хвилі характеризуються функцією $\varphi_0(t)$, що показана на рис. 5. Тут спостерігаються два значення $\varphi_0(t)$, які дорівнюють $\mp 0.5\pi$. Функцію $\varphi_0(t)$ біжучих хвиль при $\Omega = 2,00005$ показано на рис. 6. Період руху біжучих хвиль дорівнює подвоєному періоду параметричного навантаження.

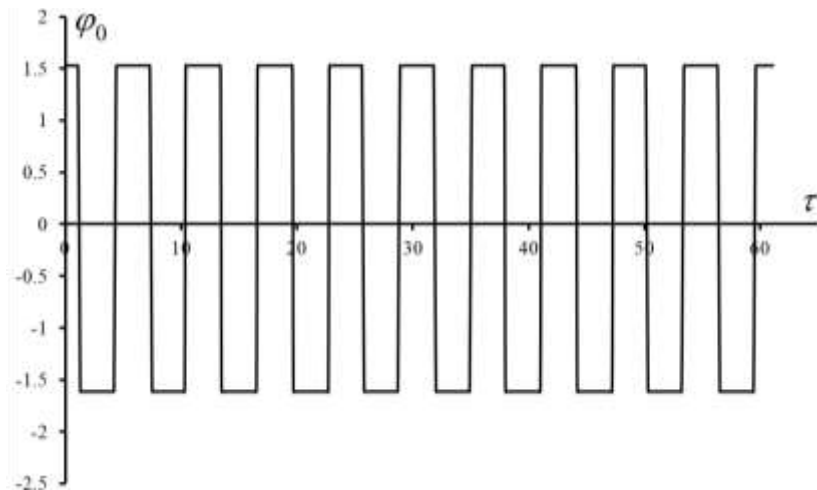


Рис. 5 – Функція $\varphi_0(t)$ при $\Omega = 2.0547$. Коливання спостерігаються на гілці (AB) частотного відгуку (див. рис. 3)

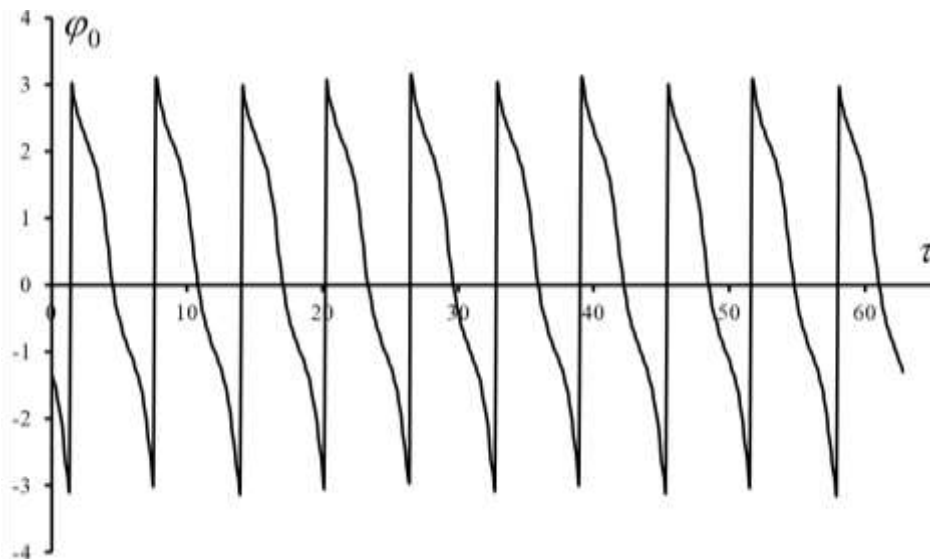


Рис. 6 – Функція $\varphi_0(t)$ при $\Omega = 2.00005$. Коливання спостерігаються на гілці (BC) частотного відгуку (див. рис. 3)

Висновки. Отримано математичну модель у вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що описує параметричні нелінійні коливання композитної сендвіч-оболонки зі стільниковим заповнювачем під дією параметричного навантаження. Для опису деформаційного стану конструкції використовується зсувна теорія високого порядку для кожного шару конструкції та умови безперервності переміщень між шарами. Ця модель використовується в рівняннях, що описують геометрично нелінійне деформування конструкції. Для отримання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь коливань застосовується метод заданих форм, що використовує кінетичну та потенційну енергії конструкції.

Із проведених багатоваріантних розрахунків можна зробити такий висновок щодо нелінійної динаміки композитних циліндричних сендвіч-оболонки, що збуджуються поздовжнім періодичним навантаженням. В областях основних параметричних резонансів, у точках біфуркації, де змінюється стійкість тривіального стану рівноваги, народжується одна або дві гілки періодичних коливань.

В областях основних параметричних резонансів на частотному відгуку спостерігається замкнена петля біжучих хвиль уздовж окружної координати. Усі інші рухи, представлені на частотних відгуках основних параметричних резонансів, є стоячими хвилями.

Криві частотного відгуку, що описують стоячі хвилі, двічі перетинають кожну петлю біжучих хвиль. При такому перетині стоячі хвилі змінюють стійкість.

Це дослідження фінансувалося Національним фондом досліджень України (грант за реєстраційним номером 2023.04/0001).

1. Karimiasl M., Ebrahimi F., Mahesh V. Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. Thin Wall. Struct. 2019. Vol. 143. P. 106152. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.044>
2. Karimiasl M., Ebrahimi F. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. Thin Wall. Struct. 2019. Vol. 144. P. 106128. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.020>

3. Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R. Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. *J. Sound Vib.* 2021. Vol. 510. P. 116283. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116283>
4. Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., Duc N. D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Compos. Struct.* 2018. Vol. 185. P. 455–465. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.047>
5. Zhang Y., Li Y. Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Compos. Struct.* 2019. Vol. 221. P. 110884. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.056>
6. Quyen N. V., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin Wall. Struct.* 2021. Vol. 162. P. 107571. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571>
7. Li C., Shen H.-S., Wang H., Yu Z. Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *Int. J. Mech. Sci.* 2020. Vol. 174. P. 105472. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105472>
8. Goncalves B. R., Jelovica J., Romanoff J. A homogenization method for geometric nonlinear analysis of sandwich structures with initial imperfections. *Int. J. Solids Struct.* 2016. Vol. 87. P. 194–205. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.02.009>
9. Yongqiang L., Feng L., Yongliang H. Geometrically nonlinear forced vibrations of the symmetric rectangular honeycomb sandwich panels with completed clamped supported boundaries. *Compos. Struct.* 2011. Vol. 93. P. 360–368. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.09.006>
10. Li Y., Zhou M., Wang T., Zhang Y. Nonlinear primary resonance with internal resonances of the symmetric rectangular honeycomb sandwich panels with simply supported along all four edges. *Thin Wall. Struct.* 2020. Vol. 147. P. 106480. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106480>
11. Malekzadeh P. A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates. *Thin Wall. Struct.* 2007. Vol. 45. P. 237–250. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.01.011>
12. Chen X., Feng Z. Dynamic behaviour of a thin laminated plate embedded with auxetic layers subject to in-plane excitation. *Mech. Res. Commun.* 2017. Vol. 85. P. 45–52. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.07.013>
13. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Compos. Struct.* 2014. Vol. 118. P. 664–676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057>
14. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *Int. J. Nonlin. Mech.* 2015. Vol. 69. P. 109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>
15. Parker T. S., Chua L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer, Berlin. 1989. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>

Отримано 24.06..2025,
в остаточному варіанті 04.09.2025