

МЕТОД РАНЖИРУВАННЯ ПРОЄКТІВ ЗА КІЛЬКІСНИМИ ТА ЯКІСНИМИ КРИТЕРІЯМИ

Інститут технічної механіки

*Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лещико-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: 53mamval@gmail.com*

Питання визначення ефективності та пріоритетності науково-технічних проєктів завжди були і є актуальними та важливими. Вони знайшли широке відображення у працях багатьох вітчизняних і зарубіжних вчених. Водночас у сучасних дослідженнях досі недостатньо вирішено проблему оцінювання проєктів за перевагою в багатовимірному просторі різномірних критеріїв. Тож основною ціллю цієї статті є розробка методу ранжирування проєктів за кількісними та якісними показниками на основі алгоритму узгодженого шкалювання критеріїв та демонстрація можливості його застосування. Алгоритм узгодженого шкалювання (АУШ) є одним з різновидів відомих алгоритмів спільного шкалювання критеріїв. На відміну від алгоритму незалежного шкалювання (АНШ), що використовується для побудови адитивної інтегральної функції цінності (ІФЦ) у нормованому виді, АУШ призначений для побудови адитивної ІФЦ у канонічному виді. Зазначені алгоритми базуються на методах багатокритеріальної теорії корисності (Multi-Attribute Utility Theory), в яких використовується операція заміщення одного показника якості іншим. Класичні АУШ і АНШ мають роздільну силу, яка дорівнює одиниці, але оперують лише з кількісними критеріями, що істотно звужує область їх застосування. Для вирішення цієї проблеми операцію заміщення в АУШ було модифіковано та запропоновано окрему процедуру спільного шкалювання різномірних критеріїв. На основі цього розроблено поетапні процедури побудови локальних функцій цінності як для кількісних, так і для якісних критеріїв. В результаті було вирішено такі задачі. Запропоновано спосіб верифікації незалежності по перевазі якісних критеріїв. Подолано проблему незрівняності різномірних критеріїв шляхом модифікації алгоритму узгодженого шкалювання. Побудовано адитивну модель ІФЦ канонічного виду для різномірних критеріїв та запропоновано кілька способів перевірки ІФЦ на адекватність, серед яких конструктивна перевірка дозволяє формально ідентифікувати неадекватні моделі. Розроблено метод ранжирування альтернатив в просторі кількісних та якісних критеріїв з максимальною роздільною силою. В даній роботі застосовано методи теорії прийняття рішень, багатокритеріальної теорії корисності і вербального аналізу рішень. Отримані результати можна використати при оцінюванні ефективності інноваційних технологій, при конкурсному відборі проєктів і формуванні програм науково-технічних досліджень, що сприятиме підвищенню якості управління проєктами та дозволить обґрунтувати доцільність їх впровадження.

Ключові слова: *кількісні та якісні критерії, гештальт-вектор, шкалювання критеріїв по перевазі, функція цінності, адекватність моделі, ранжирування проєктів.*

Determining the efficiency and priority of R&D projects has always been topical and important. It has been widely considered by numerous home and foreign researchers. However, the problem of project evaluation by preference in a multidimensional space of heterogeneous criteria has not been adequately addressed yet. The main goal of this paper is to present a method of project ranking by quantitative and qualitative criteria based on a consistent criteria scaling algorithm and to demonstrate its applicability. The consistent scaling algorithm (CSA) is a variant of the familiar algorithms of joint criteria scaling. As distinct from an independent scaling algorithm (ISA), which is used in the construction of an additive integral value function (IVF) in normalized form, the CSA is used in the construction of a canonical IVF. These algorithms are based on methods of multi-attribute utility theory, which use the operation of trading off one quality index against another. The classical CSA and ISA have a resolution equal to one, but they operate with qualitative criteria alone, thus considerably narrowing their field of application. To resolve this problem, the tradeoff operation of replacement in the CSA was modified, and a special procedure was proposed for joint scaling of heterogeneous criteria. Based thereon, stage-by-stage procedures were developed to construct local value functions both for qualitative and for quantitative criteria. As a result, the following problems were solved. A method was proposed to verify the preferential independence of qualitative criteria. By modifying the CSA, the problem of incomparability of heterogeneous criteria was overcome. An additive model of a canonical IVF was constructed for heterogeneous criteria, and several methods to verify the IVF for adequacy were proposed, including a constructive verification, which allows one to formally identify inadequate models. A method was developed to rank alternatives in a space of quantitative and qualitative criteria with a maximum resolution. This work used methods of decision-making theory, multi-attribute utility theory, and verbal analysis of solutions. The obtained results may be used in evaluating the efficiency of innovative technologies, in project competitions, and in R&D program formation, thus improving project management quality and allowing one to justify project advisability.

Keywords: *quantitative and qualitative criteria, gestalt-vector, scaling criteria by preference, value function, model adequacy, project ranking.*

Аналіз моделей і методів прийняття рішень [1 – 6], які широко застосовуються у прикладних задачах управління проєктами [7 – 12], дозволяє зробити висновок, що в сучасних умовах зростання складності науково-технічних завдань у багатьох практичних випадках існуючого математичного забезпечення недостатньо для ефективної підтримки управлінських рішень. Виникає потреба в удосконаленні традиційних інструментів вирішення слабоструктурованих проблем і, зокрема, в удосконаленні методів визначення пріоритетності проєктів в багатовимірному просторі різномірних критеріїв.

Оцінювання альтернатив за багатьма критеріями та впорядкування їх по пріоритетності можна здійснити за допомогою методів, заснованих на алгоритмах спільного шкалювання критеріїв, серед яких найбільш відомими є алгоритм узгодженого шкалювання (АУШ) та алгоритм незалежного шкалювання (АНШ) [2 – 4]. Зазначені алгоритми призначені для побудови локальних функцій цінності (ЛФЦ) та інтегральної функції цінності (ІФЦ), основним недоліком яких є вимога кількісної вимірності критеріїв, що змушує представляти вербальні градації якісних критеріїв, зазвичай, у вигляді штучних бальних оцінок. Цей суттєвий недолік усунено в роботах [13, 14] при побудові мультиплікативно-адитивної та адитивної ІФЦ нормованого виду. Тож вирішимо цю проблему для адитивної ІФЦ канонічного виду

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \omega_i(u_i), \quad (1)$$

де φ – інтегральна функція цінності; $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор локальних критеріїв в просторі U^n ; u_i – i -й локальний критерій (i -я компонента вектора u); n – кількість локальних критеріїв; $\omega_i(u_i)$ – дійсна невід’ємна локальна функція цінності для критерію $u_i \in U$.

Як відомо, модель ІФЦ (1) будується за концепцією АУШ, яка у порівнянні з АНШ менш громіздка і вимоглива до когнітивних можливостей людини, оскільки в АУШ операція заміщення простіша, ніж в АНШ [2, 3]. Модель (1) не потребує визначення шкалюючих коефіцієнтів [13], вона також легша для людського сприйняття. АУШ та АНШ багато в чому схожі, але між ними є і суттєві відмінності. Модифікуємо класичний АУШ та побудуємо ІФЦ у формі (1) для оцінювання альтернатив в просторі як кількісних, так і якісних критеріїв.

Алгоритм узгодженого шкалювання кількісних та якісних критеріїв.

Крок 1. Аналіз альтернатив та структуризація критеріїв.

На скінченній множині альтернатив, заданих векторами, що складаються із значень $k \geq 2$ кількісних і $n - k$ якісних локальних критеріїв u_i , $i = \overline{1, n}$, виділимо області їх визначення $[u_{i \min}, u_{i \max}] \subset U_i$ та встановимо граничні значення $u_i^{\inf}$ і $u_i^{\sup}$:

- нехай буде $u_i^{\inf} = u_{i \min}$, $u_i^{\sup} = u_{i \max}$, якщо критерій u_i задовольняє принципу «чим більше u_i – тим краще», тобто якщо $u_{i \min} \prec u_{i \max}$;

- нехай буде $u_i^{\inf} = u_{i \max}$, $u_i^{\sup} = u_{i \min}$, якщо критерій u_i задовольняє принципу «чим менше u_i – тим краще», тобто якщо $u_{i \min} \succ u_{i \max}$.

Тут і далі символ $\prec$ означає «менш прийнятний, ніж»; символ $\succ$ означає «більш прийнятний, ніж»; символ $\sim$ означає «еквівалентний по перевазі».

Таким чином отримаємо вектори $u^{\inf} = (u_1^{\inf}, u_2^{\inf}, \dots, u_n^{\inf})$ і $u^{\sup} = (u_1^{\sup}, u_2^{\sup}, \dots, u_n^{\sup})$ з найгіршими та найкращими значеннями критеріїв, що характеризують нижню і верхню опорні ситуації [5].

Зауваження. Вище вказане обмеження $k \geq 2$ на величину k можна подолати у разі можливості оцінити альтернативи за допомогою грошових еквівалентів [2]. Такий підхід передбачає розгляд грошового критерію у парі з не грошовим критерієм (до грошових критеріїв відносять як власне гроші, так і вартість, прибуток та будь-які інші фінансові критерії). Тобто, якщо вважається можливим використання грошей в якості універсальної міри цінності, то є можливість розглядати варіанти значень $k = 1$ і $k = 0$. У першому випадку гроші є єдиним кількісним критерієм з природною шкалою виміру цінності. У другому випадку, за наявності в задачі лише якісних критеріїв, гроші можна використати як додаткову міру для безпосереднього оцінювання вербальних градацій за допомогою операцій заміщення [2, 3].

Крок 2. Верифікація взаємнезалежності критеріїв.

Передумовою існування функції (1) є взаємнезалежність локальних критеріїв по перевазі [2, 3]. З метою забезпечення математичної коректності використання адитивної форми ІФЦ верифікуємо взаємнезалежність критеріїв. Тобто перевіримо справедливості припущень щодо виконання умов незалежності по перевазі (НП-умов) на множині $n - 1$ пар локальних критеріїв $u_1, u_i, i = \overline{2, n}$.

Для перших $k - 1$ пар критеріїв застосуємо традиційний спосіб перевірки виконання НП-умов [2, 3] у нижній та у верхній опорних ситуаціях. Оскільки такий спосіб прийнятний лише для кількісних критеріїв, для якісних критеріїв застосуємо дещо інший спосіб. Візьмемо пару з одним кількісним u_1 та одним якісним u_i критерієм з індексом $i \in [k + 1, n]$ і розглянемо вектори $a = (u_1^c, u_i', u(\bar{1}, \bar{i}))$ та $b = (u_1', u_i^c, u(\bar{1}, \bar{i}))$, де u_1^c, u_i', u_i^c – фіксовані значення кількісного u_1 та якісного u_i критеріїв ($u_i' \neq u_i^c$); u_1' – значення кількісного критерію u_1 , яке підлягає визначенню; $u(\bar{1}, \bar{i}) = (u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ – доповнення пари критеріїв u_1, u_i , фіксоване на довільному рівні.

Запропонуємо особі, що приймає рішення (ОПР), скористатися операцією заміщення [2, 3] і виконати таке завдання: підібрати у векторі b таке значення u_1' , при якому буде справедливе відношення байдужості $b \sim a$. Визначивши значення u_1' , отримаємо еквівалентні по перевазі вектори a та b . Зафіксуємо в цих векторах доповнення $u(\bar{1}, \bar{i})$ на якомусь іншому рівні. Якщо відношення байдужості між a та b збережеться і, на думку ОПР, буде зберігатися при будь-якому доповненні $u(\bar{1}, \bar{i})$, то пару критеріїв u_1, u_i можна вважати незалежною від їх доповнення. Зрозуміло, що виконання НП-умов необхідно засвідчити на всій множині пар критеріїв $u_1, u_i, i = \overline{k + 1, n}$.

Як видно, особливістю запропонованого способу верифікації взаємнезалежності якісних критеріїв є перевірка на незалежність кожного якісного

критерію у парі з кількісним критерієм шляхом реалізації операції заміщення за рахунок саме кількісного критерію.

У разі порушення НП-умов хоча б для однієї пари критеріїв скористаємося рекомендаціями [5, 15 – 18] та переформулюємо задачу так, щоб новий набір локальних критеріїв зберіг їх найбільш суттєві властивості, необхідні для досягнення загальної мети, а також задовольнив усім вимогам їх взаємозалежності. Для цього, використовуючи відомі прийоми перетворень локальних критеріїв та повторюючи кроки 1-2 даного алгоритму, сформуємо такий набір критеріїв, який забезпечить виконання всіх НП-умов. При неможливості зазначених перетворень подамо ІФЦ в іншій формі та застосуємо інший підхід для вирішення поставленої задачі [3, 14].

Крок 3. Визначення початку відліку цінності.

Існуючі методи побудови адитивних функцій цінності засновані на використанні вимірності переваг у порядковій та інтервальній шкалі. Ця властивість дозволяє встановлювати початок відліку та одиницю виміру цінності довільно. Зазвичай за початок відліку функцій цінності $\omega_i(u_i)$ приймають точки $u_i^{\inf}$ і вважають $\omega_i(u_i^{\inf}) = 0$. Тобто надають цим точкам нульовий рівень цінності. Таке завдання початкових точок не завжди коректне. У багатьох випадках це призводить до похибок в оцінках переваг, що підтверджується такими аргументами. Точки $u_i^{\inf}$ належать області допустимих значень критеріїв. Тобто вони, хоч і меншою мірою, але значущі для ОПР і не еквівалентні по перевазі. Додавання до наявної множини нових альтернатив часто призводить до розширення інтервалів зміни критеріїв u_i , наслідком чого є порушення прийнятого припущення $\omega_i(u_i^{\inf}) = 0$. Це, своєю чергою, потребує уточнення ЛФЦ та ІФЦ. Для вирішення цієї проблеми пропонується початок відліку функцій цінності розміщувати не в точках $u_i^{\inf}$, а в точках u_i^0 , які визначаються таким чином.

Процедури визначення початкових точок ЛФЦ та ІФЦ. Експерименти показують, що малі значення u_i в околі $u_i^{\inf}$ людина впевненіше і надійніше розрізняє на тлі великих значень $u^{\sup}(\bar{i})$, чіткіше відчувачи різницю їх цінності. Враховуючи це, запропонуємо ОПР спочатку розглянути та подумки оцінити альтернативу $a = (u_1^{\sup}, u_2^{\sup}, \dots, u_i^{\inf}, \dots, u_n^{\sup})$, а потім використати її для порівняння з іншими альтернативами, які відрізняються від a значеннями критерію u_i . А саме, зменшимо $u_i^{\inf}$ на деяку величину Δ_i і попросимо ОПР оцінити альтернативу $b = (u_1^{\sup}, u_2^{\sup}, \dots, u_i^{\inf} - \Delta_i, \dots, u_n^{\sup})$. Метою зазначених операцій є пошук такого значення Δ_i , при якому цінність альтернативи b стане для ОПР мінімальною. По досягненню цього порога зафіксуємо знайдену точку u_i^0 та приймемо $\omega_i(u_i^0) = 0$. Застосовуючи цю процедуру до всіх кількісних критеріїв, визначимо початкові (нульові) градації u_i^0 та отримаємо

$$\omega_i(u_i^0) = 0, \text{ де } i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Очевидно, що даний спосіб не можна використати для якісних критеріїв u_i , $i \in [k+1, n]$, з вербальними шкалами. На дискретній шкалі таких критеріїв за початкову точку логічно прийняти додаткову градацію u_i^0 і поставити її у відповідність нульове значення цінності, яке буде означати відсутність властивості, що характеризується i -м критерієм. Вводячи таким чином на шкалах якісних критеріїв початкові (нульові) градації u_i^0 , отримаємо

$$\omega_i(u_i^0) = 0, \text{ де } i = \overline{k+1, n}. \quad (3)$$

Визначивши всі початкові точки ЛФЦ, зафіксуємо у просторі U^n вектор $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$. Назвемо точку u^0 початковою опорною ситуацією. Підставивши її в (1), встановимо початок відліку ІФЦ $\phi(u^0) = 0$.

Зауваження. Точки u_i^0 , $i = \overline{1, n}$, стійкі до зміни нижньої та верхньої опорної ситуації для конкретної ОНР. Тобто, у разі коригування $u_i^{\inf}$ та $u_i^{\sup}$ та зміни області визначення локальних критеріїв уточнювати значення u_i^0 не потрібно.

Крок 4. Вибір базового критерію та одиниці виміру переваги.

В основі алгоритму побудови інтегральної функції цінності (1) лежить процедура вибору базового критерію та встановлення одиниці виміру переваги [3]. Шкалювання критеріїв по перевазі (цінності) здійснюється шляхом зіставлення значень базового та не базових критеріїв. Природним і найбільш універсальним базовим критерієм є критерій, що вимірюється у грошових одиницях, а за його відсутності базовим критерієм може бути будь-який кількісний критерій з безперервною шкалою вимірів [2]. Для зручності побудови ІФЦ у формі (1) за базовий критерій доцільно прийняти критерій з найбільшим розмахом (амплітудою) переваги на інтервалі $[u_i^0, u_i^{\sup}]$, якому відповідає максимальний приріст $\max_{i \in \{1, k\}} |\omega_i(u_i^{\sup}) - \omega_i(u_i^0)|$ і максимальна кількість градацій цінності. Критерій з найбільшим розмахом переваги можна виділити шляхом зіставлення векторів $(u_i^{\sup}, u^0(\bar{i}))$ та $(u_j^{\sup}, u^0(\bar{j}))$, $j \neq i$, тобто шляхом порівняння $u_i^{\sup}$ з $u_j^{\sup}$ на тлі нульових компонент. Більший розмах переваги буде мати той із критеріїв u_i та u_j , якому буде відповідати краща альтернатива – вектор з компонентою $u_i^{\sup}$ або $u_j^{\sup}$. Відкинемо гіршу альтернативу і здійснимо аналогічні порівняння альтернатив із тими i і j , що залишилися. В результаті $k-1$ подібних порівнянь визначимо базовий критерій по нижньому індексу не нульової компоненти найкращої альтернативи.

Зважаючи на можливість довільної нумерації критеріїв, пронумеруємо базовий критерій індексом 1. Для базового критерію u_1 з найбільшим розмахом переваги будемо мати $\omega_1(u_1^{\sup}) \geq \omega_i(u_i^{\sup})$, $i = \overline{2, k}$.

Встановимо для u_1 одиницю виміру цінності. Для цього ОНР має вказати таке значення u_1^1 , при якому, на її думку, вектор $(u_1^1, u_2^0, \dots, u_n^0)$ буде від-

чутно краще за вектор $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$, але в порівнянні з $|u_{1\max} - u_{1\min}|$ приріст $\Delta_1 = |u_1^1 - u_1^0|$ буде відносно не великий. Оскільки на порядковій шкалі одиницю цінності можна задавати довільно [3], поставимо у відповідність градації u_1^1 значення функції ω_1 , що дорівнює одиниці:

$$\omega_1(u_1^1) = 1. \quad (4)$$

Встановлена міра в подальшому дозволить шкалювати за цінністю усі локальні критерії в процесі квантифікації переваг ОНР (див. рис. 1).

Відповідно до адитивної форми ІФЦ (1), а також в силу (2), (3) та (4) матимемо таку загальну оцінку вектора $a = (u_1^1, u^0(\bar{1}))$:

$$\varphi(a) = \varphi(u_1^1, u^0(\bar{1})) = \omega_1(u_1^1) + \sum_{i=2}^n \omega_i(u_i^0) = 1, \quad (5)$$

де $u^0(\bar{1}) = (u_2^0, u_3^0, \dots, u_n^0)$ – доповнення критерію u_1 у початковій опорній ситуації.

Крок 5. Перший етап шкалювання кількісних критеріїв.

Для кожного кількісного критерію u_i , $i = \overline{2, k}$, визначимо значення першої градації u_i^1 еквівалентне по перевазі u_1^1 , яке забезпечить рівність значень функції $\varphi(u)$ в точках u_i^1 і u_1^1 так, що $\varphi(u_i^1, u^0(\bar{i})) = \varphi(u_1^1, u^0(\bar{1})) = 1$. З цією метою застосуємо відомі прийоми квантифікації переваг ОНР [2] і порівняємо два вектори $a = (u_1^1, u^0(\bar{1}))$ та $b = (u_i^1, u^0(\bar{i}))$. Попросимо ОНР задати у векторі b таке значення $u_i^1 \in (u_i^0, u_i^{\sup}]$, при якому буде справедливе відношення еквівалентності по перевазі $b \sim a$ (див. рис. 1). Тобто:

$$(u_i^1, u^0(\bar{i})) \sim (u_1^1, u^0(\bar{1})). \quad (6)$$

Використовуючи форму інтегрального критерію (1), замінимо векторне відношення (6) його аналітичним аналогом

$$\omega_i(u_i^1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j(u_j^0) = \omega_1(u_1^1) + \sum_{j=2}^n \omega_j(u_j^0). \quad (7)$$

З рівняння (7) та з урахуванням (2), (3), (4) після першого етапу шкалювання кількісних критеріїв для всіх $i = \overline{1, k}$ отримаємо

$$\omega_i(u_i^1) = 1. \quad (8)$$

Очевидно, що розмах переваги на інтервалі $[u_i^0, u_i^{\sup}]$ у різних критеріїв u_i , $i \in \overline{1, k}$, може бути різним. Тому і кількість градацій у різних критеріїв може бути різною.

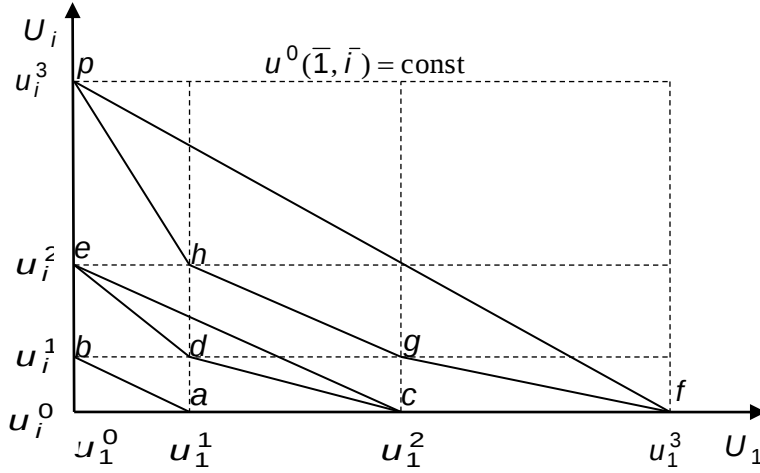


Рис. 1 – Шкалювання кількісного критерію $u_i, i \in [1, k]$

Пронумеруємо ненульові градації критерію u_i цілими числами від 1 до q_i і назвемо градації з номерами від 2 до $q_i - 1$ проміжними градаціями, а градацію з номером q_i – кінцевою градацією. Аналогічно поділимо етапи шкалювання критерію u_i на проміжні і кінцеві. Дамо цим етапам формальне визначення.

Визначення 1. Етап шкалювання не базового критерію $u_i, i \in [2, k]$, порядковий номер t якого більше одиниці, є проміжним етапом, якщо на цьому етапі ОПР вважає справедливим $(u_i^{\text{sup}}, u^0(\bar{i})) \succ (u_1^t, u^0(\bar{1}))$. В іншому випадку етап t є кінцевим для критерію u_i , порядковий номер якого $t = q_i$.

Зрозуміло, що на етапі $t > 1$ можуть мати місце такі відношення:

$$(u_i^{\text{sup}}, u^0(\bar{i})) \succ (u_1^t, u^0(\bar{1})), \quad (9)$$

$$(u_i^{\text{sup}}, u^0(\bar{i})) \sim (u_1^t, u^0(\bar{1})), \quad (10)$$

$$(u_i^{\text{sup}}, u^0(\bar{i})) \prec (u_1^t, u^0(\bar{1})). \quad (11)$$

У разі виконання відношення (9), яке характеризує проміжний етап шкалювання критерію u_i , перейдемо на крок 6 алгоритму. В іншому випадку перейдемо на крок 7 – до кінцевого етапу шкалювання. Таким чином, за допомогою процедур проміжного етапу t будемо визначати проміжну градацію u_i^t , що лежить в інтервалі $[u_i^{t-1}, u_i^{\text{sup}}]$ і задовольняє нерівності $u_i^t < u_i^{\text{sup}}$. При порушенні цієї нерівності будемо визначати кінцеву градацію $u_i^{q_i}$ за допомогою процедур кінцевого етапу $t = q_i$.

Зауваження. При шкалюванні базового критерію у визначенні 1 та у відношеннях (9), (10), (11) потрібно покласти $i = 1$ та замінити вектор $(u_1^t, u^0(\bar{1}))$ на вектор $(u_1^{t-1}, u_j^1, u^0(\bar{1}, \bar{j}))$, де $j \in [2, k]$.

Крок 6. Проміжний етап шкалювання кількісних критеріїв.

Нехай t – номер етапу шкалювання, на якому має місце відношення (9). Легко помітити, що компоненти векторів $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$, $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_k^1, u_{k+1}^0, \dots, u_n^0)$, ..., $u^{t-1} = (u_1^{t-1}, u_2^{t-1}, \dots, u_k^{t-1}, u_{k+1}^0, \dots, u_n^0)$, визначені на попередніх етапах алгоритму, можна використати на етапі t для побудови нових пар векторів критеріїв. Метою таких побудов є визначення градацій u_i^t із відносин, аналогічних (6), та отримання оцінок $\omega_i(u_i^t)$ із рівнянь, аналогічних (7). Реалізуємо ці можливості в такий спосіб.

Із компонент векторів $u^0, u^1, \dots, u^{t-1}$ сформуємо вектор $u^\#$ так, щоб його цінність $\varphi(u^\#) = t$. Назвемо вектор $u^\#$ гештальт-вектором та використаємо для підбору еквівалентних за цінністю альтернатив. У загальному виді гештальт-вектор представлятимемо структурою

$$u^\# = (u_i^{m_1}, u_j^{m_2}, u^0(\bar{i}, \bar{j})), i, j \in [1, k], i \neq j. \quad (12)$$

Тут m_1 і m_2 – невід’ємні цілі числа, сума яких дорівнює номеру t шуканої градації, тобто $m_1 + m_2 = t$.

Для полегшення процесу квантифікації переваг ОПР бажано використовувати в $u^\#$ мінімально можливу кількість компонент з ненульовими верхніми індексами, включаючи компоненту базового критерію. Зазначеній вимозі задовольняє структура гештальт-вектора (12), в якій кількість компонент з ненульовими верхніми індексами дорівнює одиниці або двом. При шкалюванні u_1 покладемо у (12) $j = 1$, $m_2 = t - 1$, $i \in [2, k]$, $m_1 = 1$. Тобто, в якості гештальт-вектора візьмемо вектор $g = (u_1^{t-1}, u_i^1, u^0(\bar{1}, \bar{i}))$, в якому дві компоненти мають ненульові верхні індекси і для якого справедливо $\varphi(g) = \varphi(u_1^{t-1}, u_i^1, u^0(\bar{1}, \bar{i})) = m_1 + m_2 = t$. Підберемо для g еквівалентний за цінністю вектор $f = (u_1^t, u^0(\bar{1}))$ такий, що $\varphi(f) = \varphi(g) = t$. Іншими словами, визначимо градацію u_1^t , еквівалентну по перевазі парі градацій u_1^{t-1}, u_i^1 . Для цього попросимо ОПР задати у векторі f таке значення $u_1^t \in (u_1^{t-1}, u_1^{\sup}]$, за якого буде справедливе відношення $f \sim g$ (при $t = 3$ на рис. 1), тобто

$$(u_1^t, u^0(\bar{1})) \sim (u_1^{t-1}, u_i^1, u^0(\bar{1}, \bar{i})). \quad (13)$$

Використовуючи форму (1), представимо відношення (13) у вигляді алгебраїчного рівняння

$$\omega_1(u_1^t) + \sum_{j=2}^n \omega_j(u_j^0) = \omega_1(u_1^{t-1}) + \omega_i(u_i^1) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \omega_j(u_j^0). \quad (14)$$

З урахуванням (2), (3), (8) та результатів обчислень на етапі $t - 1$, із (14) отримаємо

$$\omega_1(u_1^t) = t. \quad (15)$$

Після визначення градації u_1^t базового критерію прошкалюємо інші критерії. Спростимо структуру (12) і покладемо $j = 1$, $m_2 = t$, $i \in [2, k]$, $m_1 = 0$. Тобто, в якості $u^\#$ візьмемо щойно знайдений вектор $f = (u_1^t, u^0(\bar{1}))$, що містить одну компоненту з ненульовим верхнім індексом, для якого $\varphi(f) = \varphi(u_1^t, u^0(\bar{1})) = t$. Підберемо для вектора f еквівалентний за цінністю вектор $p = (u_i^t, u^0(\bar{i}))$ такий, що $\varphi(p) = \varphi(f) = t$. Тим самим визначимо градацію u_i^t еквівалентну по перевазі градації u_1^t . Для цього попросимо ОПР задати у векторі p таке значення $u_i^t \in (u_i^{t-1}, u_i^{\sup}]$, за якого буде справедливе відношення $p \sim f$ (при $t = 3$ на рис. 1), тобто

$$(u_i^t, u^0(\bar{i})) \sim (u_1^t, u^0(\bar{1})). \quad (16)$$

Векторному відношенню (16) поставимо у відповідність його алгебраїчний вираз

$$\omega_i(u_i^t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j(u_j^0) = \omega_1(u_1^t) + \sum_{j=2}^n \omega_j(u_j^0). \quad (17)$$

Враховуючи (15) та вирішуючи рівняння (17), після проміжного етапу t шкалювання кількісного критерію u_i отримаємо

$$\omega_i(u_i^t) = t, \quad i \in [1, k]. \quad (18)$$

Як бачимо, проміжна градація базового критерію визначається у процесі побудови пари векторів (13), а проміжна градація не базового критерію – у процесі побудови пари векторів (16).

Крок 7. Кінцевий етап шкалювання кількісних критеріїв.

У випадках (10), (11) етап t є кінцевим для критерію u_i , $i \in [1, k]$. Номер t кінцевої градації цього критерію позначимо символом q_i . В таких ситуаціях нерівність $u_i^t < u_i^{\sup}$ не виконується. Тому в якості кінцевої градації $u_i^{q_i}$ критерію u_i візьмемо праву межу інтервалу $[u_i^0, u_i^{\sup}]$, тобто покладемо $u_i^{q_i} = u_i^{\sup}$. Залежно від того, яке з відношень (10) або (11) справедливе, реалізуємо один з таких способів оцінювання кінцевої градації.

У випадку (10) для оцінювання кінцевої градації виконаємо процедури, викладені на кроці 6. У цьому випадку локальна функція цінності $\omega_i(u_i)$ в точці $u_i^{q_i}$ за аналогією з (18) матиме ціле значення $\omega_i(u_i^{q_i}) = \omega_i(u_i^{\sup}) = q_i$.

У випадку (11) для оцінювання кінцевої градації застосуємо стандартний прийом екстраполяції таблично заданої функції. А саме, за відомими значеннями функції $\omega_i(u_i)$ в точках $u_i^0, u_i^1, \dots, u_i^{q_i-1}$ визначимо її в точці $u_i^{\sup}$. У даному випадку локальна функція цінності $\omega_i(u_i)$ в точці $u_i^{q_i}$ матиме дріб-

не значення у проміжку між цілими числами $q_i - 1$ та q_i , тобто $q_i - 1 < \omega_i(u_i^{q_i}) = \omega_i(u_i^{\sup}) < q_i$.

Розглянуті на кроках 6 і 7 процедури шкалювання будемо застосовувати доти, доки не будуть отримані оцінки кінцевих градацій для всіх кількісних критеріїв.

Крок 8. Побудова ЛФЦ кількісних критеріїв.

Після шкалювання кількісних критеріїв з'являється можливість візуалізації розрахунків $\omega_i(u_i)$, $i = \overline{1, k}$. При невеликій кількості критеріїв функції $\omega_i(u_i)$ можна представити у графічному виді, з'єднавши плавною кривою точки, знайдені на кроках 4 – 7. В задачах із великою кількістю критеріїв доцільно формалізувати процедуру побудови ЛФЦ. Для цього можна використати один із методів апроксимації таблично заданої функції і представити $\omega_i(u_i)$ в аналітичному виді. Графічне або аналітичне подання ЛФЦ дозволяє знаходити значення $\omega_i(u_i)$ у будь-якій точці інтервалу $[u_i^0, u_i^{q_i}]$.

Крок 9. Шкалювання якісних критеріїв.

На відміну від кількісного критерію u_j , градації $u_j^0, u_j^1, \dots, u_j^{q_j}$ якого визначають у процесі його шкалювання, градації $u_j^0, u_j^1, \dots, u_j^{q_j}$ якісного критерію u_j визначати не потрібно, оскільки вони заздалегідь відомі – представлені набором вербальних значень лінгвістичної змінної. Єдиною метою шкалювання якісного критерію є визначення цінності вербальних значень якісного критерію. Вирішимо цю задачу таким чином.

Нехай u_j^t – поточна градація якісного критерію u_j , $t \in [1, q_j]$, $j \in [k+1, n]$. Цінність $\omega_j(u_j^h)$ градації u_j^h , де $0 \leq h < t$, будемо вважати визначеною на більш ранніх етапах обчислень. Градації u_j^t поставимо у відповідність еквівалентні за ступенем впливу на ІФЦ градацію u_j^h та значення $\hat{u}_i^t$, де $i \in [1, k]$, $u_j^t \succ u_j^h$. Іншими словами, підберемо для u_j^t еквівалентну по перевазі пару u_j^h та $\hat{u}_i^t$, де u_j^h – значення якісного критерію, $\hat{u}_i^t$ – значення кількісного критерію, яке підлягає визначенню. З цією метою порівнюємо вектори $c = (u_j^t, u^0(\bar{j}))$ та $d = (\hat{u}_i^t, u_j^h, u^0(\bar{i}, \bar{j}))$, що відрізняються компонентами двох різнорідних критеріїв u_i та u_j . Попросимо ОПР задати у векторі d таке значення $\hat{u}_i^t \in (u_i^0, u_i^{\sup}]$, при якому буде справедливе відношення еквівалентності $d \sim c$ (див. рис. 2), тобто

$$(\hat{u}_i^t, u_j^h, u^0(\bar{i}, \bar{j})) \sim (u_j^t, u^0(\bar{j})). \quad (19)$$

Очевидно, що відношення (19) має сенс за умови

$$\hat{u}_i^t \leq u_i^{\sup}. \quad (20)$$

Виконання цієї умови можна забезпечити за рахунок критерію u_j шляхом підбору відповідної градації u_j^h .

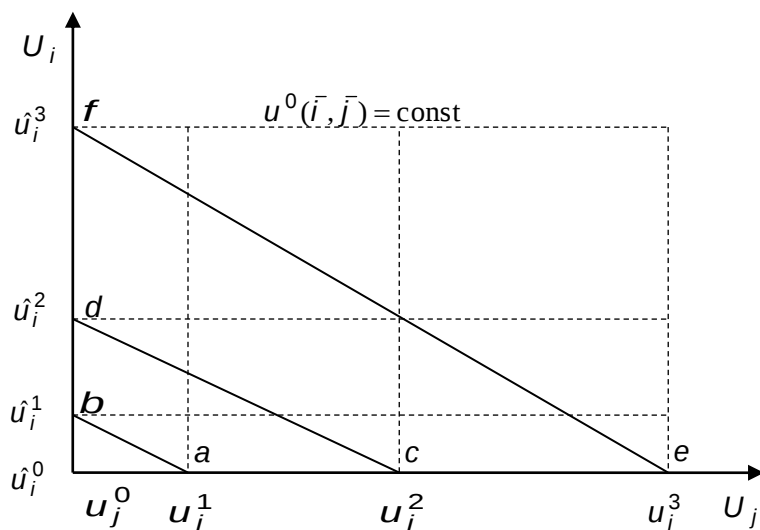


Рис. 2 – Шкалювання якісного критерію u_j , $j \in [k+1, n]$

Зрозуміло, що зі збільшенням h значення $\hat{u}_i^t$ зменшуватиметься. Отже, збільшуватиметься і вірогідність виконання умови (20). З іншого боку, при $h=0$ структура відношення (19) набуде вигляду $(\hat{u}_i^t, u^0(\bar{i})) \sim (u_j^t, u^0(\bar{j}))$, що полегшить процес порівняння альтернатив. Для вирішення цього протиріччя візьмемо градацію u_j^h з найменшим, по можливості, індексом h , $0 \leq h < t$. Тим самим спростимо частково задачу і, водночас, виконаємо умову (20).

Зауваження. Вирішенню зазначеного протиріччя сприятиме також використання $\hat{u}_1^t$ базового критерію у лівій частині (19).

Задовольнивши умову (20) за рахунок градації u_j^h та визначивши з (19) величину $\hat{u}_i^t$, знайдемо значення $\omega_i(\hat{u}_i^t)$ за формулою ЛФЦ, отриманою на кроці 8. Після цього використаємо форму інтегрального критерію (1) та замінимо векторне рівняння (19) його аналітичним аналогом

$$\omega_i(\hat{u}_i^t) + \omega_j(u_j^h) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n \omega_k(u_k^0) = \omega_j(u_j^t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \omega_k(u_k^0). \quad (21)$$

З рівняння (21) для будь-якого $j \in [k+1, n]$ отримаємо

$$\omega_j(u_j^t) = \omega_i(\hat{u}_i^t) + \omega_j(u_j^h), \text{ де } i \in [1, k], 0 \leq h < t. \quad (22)$$

У правій частині (22) другий доданок при $h=0$ обнулюється.

Як видно, (19) є узагальненою формою відношення, за допомогою якого визначається значення $\hat{u}_i^t$ кількісного критерію та підбирається значення u_j^h якісного критерію, що використовуються при обчисленні цінності градації u_j^t за формулою (22). Виконаємо зазначені процедури для всіх $t = \overline{1, q_j}$, $j = \overline{k+1, n}$ та визначимо цінність усіх якісних градацій.

Крок 10. Побудова ЛФЦ якісних критеріїв.

Областю визначення ЛФЦ якісного критерію є кінцева множина вербальних градацій. Тобто ЛФЦ є функцією дискретного аргументу, яку можна подати таблично або графічно, візуалізуючи її, наприклад, стовпчастою діаграмою. Скористаємося одним із способів представлення дискретних функцій та по знайденим значенням $\omega_j(u_j)$ в точках $u_j^0, u_j^1, \dots, u_j^{q_j}$ побудуємо ЛФЦ для якісних критеріїв $u_j, j = \overline{k+1, n}$.

Крок 11. Побудова інтегральної функції цінності (ІФЦ).

Інтегральний критерій ефективності або ІФЦ, що визначає узагальнену цінність альтернативи за всіма кількісними та якісними локальними критеріями, представимо у такому виді:

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^k \omega_i(u_i) + \sum_{j=k+1}^n \omega_j(u_j), \quad (23)$$

де $\omega_i(u_i)$ – ЛФЦ кількісного критерію, яка будується на кроці 8; $\omega_j(u_j)$ – ЛФЦ якісного критерію, яка будується на кроці 10.

Зауваження. При оцінюванні та порівнянні альтернатив за допомогою формули (23) допускається використання лише двох властивостей ІФЦ – монотонності та ординальності.

Крок 12. Перевірка адекватності моделі.

Інтегральна функція цінності (23) є кількісною моделлю якісних пріоритетів ОПР [1]. Інформація про ці пріоритети міститься приховано в узагальненій оцінці порівнюваних альтернатив у вигляді суб'єктивних переваг ОПР та враховується при математичному моделюванні. Для забезпечення достовірності цієї оцінки переваги ОПР мають бути адекватно відображені в моделі цінності альтернатив. Адекватність цієї моделі, тобто відповідність математичної моделі (23) системі переваг ОПР, можна перевірити кількома способами.

Конструктивна перевірка. Класичним об'єктивним методом багатокритеріальної оптимізації є метод Парето-оптимізації [19]. За допомогою цього методу можна конструктивно, тобто не залучаючи ОПР, перевірити модель суб'єктивних переваг на адекватність. Конструктивну перевірку слід розглядати тільки як попередню перевірку. Реалізуємо її таким чином.

В області допустимих значень критеріїв згенеруємо випадковим способом гіпотетичну множину P , що складається з декількох десятків або сотень альтернатив (у множину P також можна включати задані альтернативи). Виділимо з P підмножину P_1 Парето-ефективних альтернатив – страту 1-го рівня. Для різниці P і P_1 виконаємо аналогічну операцію, а саме, виділимо з множини $P \setminus P_1$ підмножину P_2 Парето-ефективних альтернатив – страту 2-го рівня. І так доти, доки в процесі стратифікації альтернатив не отримаємо $P \setminus P_1 \setminus \dots \setminus P_k \setminus P_{k+1} \setminus \dots = \emptyset$.

Дослідження властивостей виділених Парето-ефективних рішень дає можливість зробити такий висновок: краща альтернатива a_k^* страти P_k пріоритетніша за будь-яку альтернативу a_{k+1} страти P_{k+1} , тобто $a_k^* \succ a_{k+1}$. Природно, що цей висновок має підтверджуватись аналітичною моделлю пе-

реварг ОПР, оскільки об'єктивні та суб'єктивні оцінки альтернатив не повинні суперечити одна одній. Тобто для всіх $a_{k+1} \in P_{k+1}$ має виконуватися умова

$$\varphi(a_k^*) > \varphi(a_{k+1}). \quad (24)$$

Перевірити адекватність моделі (23) за допомогою нерівності (24) вдається дуже рідко, оскільки метод Парето, як правило, не дозволяє виділити кращу альтернативу a_k^* . Тому, замість нерівності (24) пропонується використовувати нерівність

$$\max_{a_k \in P_k} \varphi(a_k) > \varphi(a_{k+1}). \quad (25)$$

Легко бачити, що ця нерівність дає необхідну, але не достатню умову адекватності. Незважаючи на це, конструктивний спосіб перевірки з процедурою Парето-стратифікації не можна ігнорувати, оскільки він дозволяє при порушенні умови (25) формально без участі ОПР встановити факт неадекватності математичної моделі (23). При наявності цього факту скоригуємо ІФЦ за наведеними нижче рекомендаціями. У протилежному випадку – продовжимо тестування ІФЦ за допомогою прямої або зворотної перевірки.

Пряма перевірка. Користуючись формулами, таблицями або графіками ЛФЦ, сконструюємо для ОПР (за допомогою ЕОМ) гіпотетичну пару векторів критеріїв $a = (u_1^a, u_2^a, \dots, u_n^a)$ та $b = (u_1^b, u_2^b, \dots, u_n^b)$ таких, що $\varphi(a) = \varphi(b)$. Попросимо ОПР порівняти по перевазі побудовані без її участі альтернативи. Якщо ОПР визнає їх рівноцінними (підтвердить справедливості $a \sim b$), то в цьому випадку модель (23) адекватна [2, 3, 5, 20].

Зворотна перевірка. Попросимо ОПР взяти участь у конструюванні пари еквівалентних по перевазі векторів критеріїв a і b таких, що $a \sim b$. Використовуючи формальну модель переваг ОПР, порівняємо за критерієм $\varphi(u)$ альтернативи a і b . Якщо значення $\varphi(a)$ і $\varphi(b)$ з прийнятною точністю будуть співпадати, то в цьому випадку модель (23) адекватна.

При зворотній перевірці часто виникає більше труднощів, ніж при прямій перевірці, оскільки ОПР доводиться майже самостійно конструювати еквівалентні пари векторів критеріїв. Але, якщо у базі знань ОПР є в наявності приклади альтернатив з апіорі відомими відношеннями переваги (еталонні зразки альтернатив), то зворотна перевірка адекватності ІФЦ значно спрощується.

Зрозуміло, що за аналогією з зазначеними способами адекватність ІФЦ можна протестувати не тільки на відношеннях еквівалентності, але й на відношеннях переваги. Важливо лише, щоби перевірка адекватності задовольняла вимогам повноти та надійності. Для цього необхідно в області значень критеріїв (і, особливо, в області компромісу) проаналізувати таку кількість альтернатив, прийнятних для сприйняття та порівняння людиною, яка переконає ОПР у достовірності ІФЦ. При негативних результатах тестування ІФЦ необхідно з'ясувати причини невідповідності моделі (23) системі переваг ОПР, усунути недоліки моделювання ЛФЦ та скоригувати ІФЦ [2, 3, 5, 21].

Зауваження. У зв'язку з обмеженими можливостями людської системи переробки інформації рекомендується конструювати вектори a та b так, щоби більша частина їх компонент збігалася.

Визначення пріоритетності та ранжирування проєктів. З метою зіставлення результатів ранжирування проєктів, отриманих за різними моделями ІФЦ, у наведеному нижче прикладі використаємо ті ж вихідні дані і ту ж систему переваг ОНР, що у роботах [13, 14].

Враховуючи це, розглянемо проєкти P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , що описуються п'ятьма векторами, які складаються із компонент кількісних та якісних критеріїв:

$u_1 \in [3, 7]$ – бюджетна ефективність (безрозмірний критерій);

$u_2 \in [15, 30]$ – собівартість (млн. грн.);

$u_3 \in \{\text{мал, пр, зн, вис}\}$ – можливість впровадження (*мал* – мала, *пр* – прийнятна, *зн* – значна, *вис* – висока).

Упорядкуємо проєкти за рівнем їх пріоритетності, використовуючи модифікований алгоритм узгодженого шкалювання.

У прикладі, що розглядається, метод визначення пріоритетності проєктів має багато спільного з методами, наведеними у роботах [13, 14]. Тому дамо лише підсумкові результати розрахунків, проведених за допомогою АУШ (див. табл. 1).

Таблиця 1

Шифр проєкту	Локальні оцінки			Інтегральна оцінка ϕ	Пріоритетність
	ω_1	ω_2	ω_3		
P_1	0,8	2,8	3,2	6,8	5
P_2	2,0	4,7	1,6	8,3	2
P_3	5,7	1,5	3,2	10,4	1
P_4	2,5	0,0	5,7	8,2	3
P_5	3,5	2,3	1,6	7,4	4

На підставі даних останнього стовпця таблиці 1 проранжируємо проєкти: $P_3 > P_2 > P_4 > P_5 > P_1$. Отримане ранжирування збігається з ранжируванням у [13] та у [14], що підтверджує коректність рішення задачі і, зокрема, взаємозалежність критеріїв, адитивність системи переваг ОНР та адекватність побудованої ІФЦ.

Результати і висновки.

1. Розроблено метод ранжирування проєктів за кількісними та якісними критеріями шляхом модифікації класичного алгоритму узгодженого шкалювання (АУШ) та продемонстровано можливість його застосування в багатовимірному просторі.

2. Запропоновано спосіб верифікації незалежності по перевазі якісних критеріїв у парі з кількісними критеріями шляхом реалізації операції заміщення за рахунок кількісних критеріїв.

3. Вирішено проблему незрівнянності кількісних та якісних показників при побудові адитивної функції цінності канонічного виду шляхом спільного шкалювання критеріїв.

4. Розроблено процедури для побудови локальних функцій цінності кількісних і якісних критеріїв та побудовано інтегральний критерій ефективності, за допомогою якого альтернативи можна ранжувати з максимальною роздільною силою.

5. Запропоновано три способи перевірки математичної моделі переваг ОПР на адекватність, серед яких конструктивна перевірка дає можливість формально без участі ОПР ідентифікувати неадекватні моделі.

Перевагою розробленої версії АУШ є інваріантність моделі оцінювання альтернатив, що дозволяє після побудови ІФЦ додавати до наявних нові проекти та оцінювати їх за допомогою одного й того ж аналітичного виразу.

Досвід ранжирування проектів показує, що алгоритм узгодженого шкалювання критеріїв є більш доступним і природним для людського сприйняття, ніж алгоритм незалежного шкалювання.

Отримані результати можуть бути використані при оцінюванні ефективності науково-технічних проектів та формуванні програм космічних досліджень в ракетно-космічній галузі.

1. Нейман Дж. Фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: пер. с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Наука, 1974. 708 с.
2. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
3. Николаев В. И., Брук В. М. Системотехника: методы и приложения. Л.: Машиностроение, 1985. 199 с.
4. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. К.: Наукова думка, 2002. 381 с.
5. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах. М.: Логос, 2006. 392 с.
6. Петровский А. Б. Теория принятия решений. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 400 с.
7. Ларичев О. И., Прохоров А. С., Петровский А. Б. и др. Опыт планирования фундаментальных исследований на конкурсной основе. Вестн. АН СССР. 1989. № 7. С. 51–61.
8. Филипенко О. В., Переверзев Е. С., Алпатов А. П., Марченко В. Т., Хорольский П. П., Печеневская О. К. Эффективность научно-технических проектов и программ. Днепропетровск: Пороги, 2008. 509 с.
9. Петровский А. Б., Ройзензон Г. В., Тихонов И. П., Башишев А. В. Багатокритерійний підхід до оцінки результативності наукових проектів. Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. Харків: МНТУ «ХПІ». 2009. № 43. С. 138–148.
10. Voronin A. Multi-criteria evaluation of Space Activity Projects. International Journal «Information Technologies & Knowledge». 2014. V. 8, No 1. P. 14–21.
11. Бескоровайний В. В., Москаленко А. С., Подоляка К. Е. Многофакторное оценивание вариантов реинжиниринга крупномасштабных объектов на основе компараторной идентификации. Электротехнические и компьютерные системы. 2016. № 23 (99). С. 192–200. <https://doi.org/10.15276/etecs.23.99.2016.30>
12. Колпаков В. М. Теория и практика принятия управленческих решений: учеб. пособие. К.: МАУП, 2004. 504 с.
13. Мамчук В. М. Визначення пріоритетності науково-технічних проектів за допомогою алгоритму шкалювання критеріїв. Технічна механіка. 2020. № 1. С. 91–105. <https://doi.org/10.15407/itm2020.01.091>
14. Мамчук В. М. Побудова мультиплікативно-адитивної згортки критеріїв в просторі кількісних і якісних показників для визначення пріоритетності проектів. Технічна механіка. 2022. № 1. С. 77–90. <https://doi.org/10.15407/itm2022.02.077>
15. Глотов В. А., Павельев В. В. Векторная стратификация. М.: Наука, 1984. 94 с.
16. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.
17. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений / Под ред. А. Б. Петровского. М.: Наука, 2006. 181 с.
18. Петровский А. Б., Ройзензон Г. В. Интерактивная процедура снижения размерности признакового пространства в задачах многокритериальной классификации. Поддержка принятия решений: Труды Института системного анализа Российской академии наук. М.: Едиториал УРСС, 2008. Т. 35. С. 43–53.
19. Кондрук Н. Е., Малияр М. М. Багатокритеріальна оптимізація лінійних систем: навч. посібник. Ужгород: РА «АУТДОР-ШАРК», 2019. 76 с.
20. Петров Э. Г., Шило Н. С. Методика оценки адекватности моделей точечной идентификации индивидуальных предпочтений ЛПР. РИ. 2003. № 2. С. 97–103.
21. Ларичев О. И., Мошкович Е. М. Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ решений. М.: Наука. Физматлит, 1996. 208 с.

Отримано 26.05.2025,
в остаточному варіанті 04.07.2025