

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ СПОСОБУ РОЗТАШУВАННЯ
ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА ПРОЦЕС ДЕФОРМУВАННЯ
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Науки, 72, 49045, Дніпро, Україна; e-mail: hart@ua.fm, alexander.shebanov@gmail.com*

Тонкостінні пластинчато-оболонкові елементи конструкцій знаходять широку сферу застосування у багатьох галузях техніки і народного господарства, зокрема в аерокосмічній, нафтогазовій промисловості, енергетиці, машинобудуванні, будівництві тощо. Цілісність і однорідність конструкцій може порушуватися через наявність неоднорідностей. Такі конструкції часто мають різноманітні технологічні дефекти або конструктивні неоднорідності: отвори, вирізи, виточки, включення, мікротріщини та інші подібні утворення, які є локальними концентраторами напружень. У реальних умовах експлуатації підвищена концентрація напружень у зонах локальних концентраторів значно впливає на міцність і довговічність конструктивних елементів, що робить задачу пошуку шляхів зменшення концентрації напружень однією з ключових проблем механіки деформованого твердого тіла. При проектуванні сучасної техніки пріоритетом стає оптимізація матеріаломісткості та підвищення ресурсу деталей із використанням новітніх матеріалів і технологій, що визначає їх конкурентоспроможність у різних галузях промисловості.

У цьому дослідженні здійснено комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних оболонок із наскрізним малим круговим отвором і симетрично розташованими навколо нього декількома еліптичними включеннями з іншого матеріалу. Для визначеності прийнято, що включення є однорідними та розташовані у площині оболонки. Проаналізовано вплив геометричних характеристик і механічних властивостей включень, їх кількості та способу розташування на параметри напружено-деформованого стану оболонок в околі отворів за дії одновісного рівномірного навантаження розтягу, прикладеного до торців оболонок. Одержано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Виконано порівняльний аналіз отриманих числових результатів розрахунків із результатами для оболонок без включень та відомими аналогічними результатами для пластин. Дослідження показали, що використання «жорстких» еліптичних включень сприяє зниженню концентрації напружень на $\sim (10 - 36) \%$ в залежності від їх кількості та способу розташування. У випадку двох діагональних включень спостерігається механічний ефект зсуву локації зони концентрації напружень, що узгоджується з відповідними результатами для аналогічної задачі для пластини.

Ключові слова: тонкостінна циліндрична оболонка, круговий отвір, еліптичні включення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання.

Thin-walled plate-shell structural elements find wide application in many sectors of engineering and the national economy, particularly in the aerospace and the oil and gas industry, power engineering, mechanical engineering, construction, etc. The integrity and homogeneity of structures can be compromised by the presence of inhomogeneities. Such structures often have various manufacturing defects or design inhomogeneities: holes, cutouts, recesses, inclusions, microcracks, and other similar formations, which act as local stress concentrators. Under real-world operating conditions, an increased stress concentration in the zones of local stress concentrators significantly affects the strength and durability of structural elements, thus making a search for ways to reduce stress concentration a key issue in solid mechanics. When designing up-to-date equipment, optimizing material consumption and extending the service life of components using novel materials and technologies is a priority, which determines their competitiveness in various industries.

This study involves a computer simulation and a finite element analysis of the stress and strain fields of thin-walled cylindrical shells with a small circular through hole and several elliptical inclusions of a different material symmetrically arranged around it. For definiteness, it is assumed that the inclusions are homogeneous and located in the plane of the shell. This paper analyzes the effect of the geometry, the mechanical properties, the number, and the arrangement of the inclusions on the stress and strain fields of the shells in the vicinity of the holes under the action of a uniaxial uniform tensile load applied to the shell ends. The distributions of the stress and strain intensities in the zones of local stress concentration are obtained. The obtained numerical results are compared with the results for shells without inclusions and with known similar results for plates. It is shown that

the use of "stiff" elliptical inclusions contributes to stress concentration reduction by $\sim (10 - 36)$ % depending on their number and arrangement. In the case of two diagonal inclusions, the stress concentration zone shifts, which is in agreement with the results for a similar problem for a plate.

Keywords: *thin-walled cylindrical shell, circular hole, elliptical inclusions, stress and strain fields, stress concentration factor, finite element method, computer simulation.*

Вступ. Тонкостінні пластинчато-оболонкові елементи конструкцій широко використовуються в різних галузях сучасної техніки – машино- та ракетобудуванні, авіації, енергетиці, нафтогазовій промисловості, будівництві тощо. Наявність конструктивних або технологічних неоднорідностей (отворів, включень, тріщин тощо) призводить до локальної концентрації напружень, що знижує міцність і довговічність конструкції у цілому. Урахування впливу локальних концентраторів напружень на напружено-деформований стан (НДС) тонкостінних конструкцій і знаходження способів зменшення концентрації напружень навколо різноманітних отворів є важливим завданням механіки деформівного твердого тіла.

Проблема визначення НДС оболонкових елементів конструкцій, зокрема циліндричних оболонок, послаблених отворами, є актуальною при проектуванні сучасної техніки у різних галузях промисловості, що проводиться з оптимізацією матеріаломісткості та підвищення ресурсу конструктивних елементів із використанням новітніх матеріалів і технологій. Цій тематиці присвячено багато наукових досліджень із застосуванням аналітичного підходу [6, 8, 9, 21, 24, 28, 31, 33], експериментальних [12, 14, 27, 30, 32, 35] та числових [4, 7, 17–20, 25, 26, 29] методів.

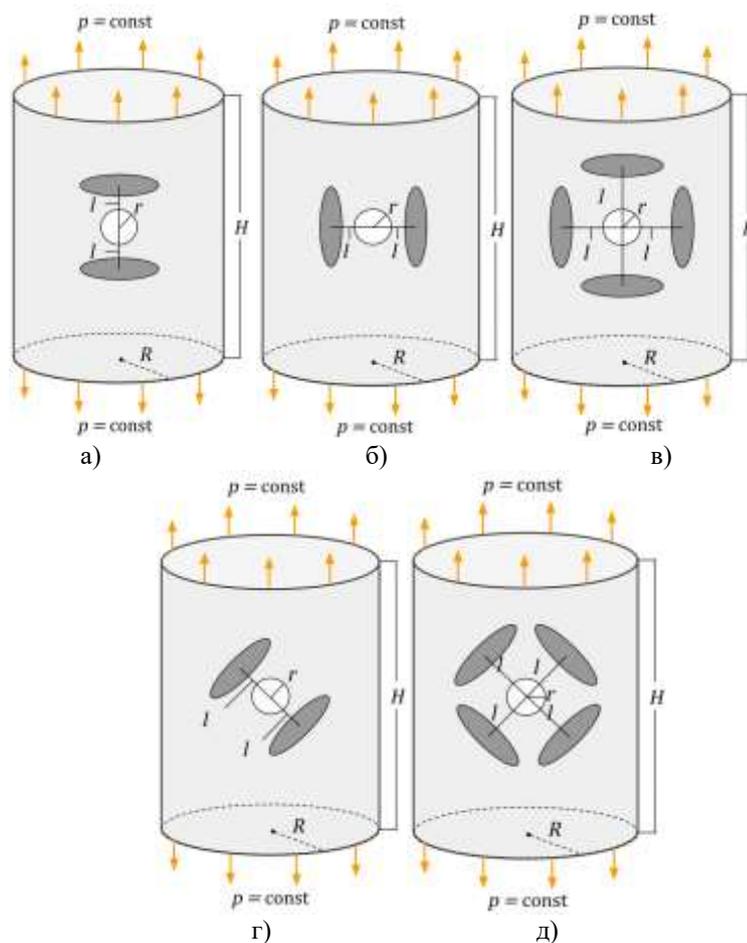
Як правило, аналітичні розв'язки можна отримати лише для дуже вузького класу задач (для ідеалізованих умов, за значних спрощень), зазвичай вони є громіздкими і не зовсім зручними при практичному застосуванні, і мають більш теоретичну спрямованість. У свою чергу, експериментальні методи дають змогу дослідити реальні конструкції з усіма технологічними особливостями, дають фактичні значення фізичних величин без гіпотез моделювання, але зазвичай проведення натурних експериментів є трудомістким і високовартісним, потребує спеціального обладнання та досвіду. Крім того, можливі похибки вимірювання через неточності приладів або зовнішні впливи, а також недоліком слід вважати обмежену кількість точок вимірювання для отримання повної картини розподілу полів напружень. Тому зазвичай для складних задач механіки деформівного твердого тіла (зі складною геометрією, наявністю отворів, ребер, складного навантаження, необхідністю урахування нелінійності, анізотропії, контактної взаємодії тощо) використовують числові методи, які є більш універсальними та ефективними для розв'язання широкого класу задач [1, 3, 5, 13, 16]. До найбільш ефективних відносять сіткові методи: метод скінченних елементів (МСЕ) [36], метод скінченних різниць, варіаційно-сітковий метод локальних варіацій тощо, та їх проєкційно-ітераційні схеми реалізації [2, 15], які дають змогу суттєво скоротити час числових розрахунків.

Варто відзначити, що на рівень концентрації напружень істотно впливають фізико-механічні властивості матеріалу. У процесі деформування можливе виникнення фазових перетворень, зокрема формування мартенситних структур (включень), характерних для певних матеріалів під дією механічного навантаження або різких змін температури [11]. Застосування попередньої обробки матеріалів, наприклад методів дискретного зміцнення [23], а також використання композитів дає змогу суттєво змінювати механічні характеристики досліджуваної системи [10].

Таким чином, дослідження НДС тіл із включеннями та оцінка їхнього впливу на концентрацію напружень має важливе наукове та практичне значення.

У цій роботі здійснено комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз НДС тонкостінних циліндричних оболонок, ослаблених малим наскрізним круговим отвором і симетрично розташованими навколо нього декількома (двома та чотирма) еліптичними включеннями з іншого матеріалу. Проаналізовано вплив механічних і геометричних характеристик включень, їх кількості та способу розташування на параметри НДС оболонок в околі отворів за дії одновісного рівномірного навантаження розтягу, прикладеного до торців оболонок. Здійснено порівняльний аналіз одержаних числових результатів розрахунків із результатами для оболонок без включень [6] та розв'язками аналогічних задач для пластин [3].

Постановка задачі. Досліджуємо НДС тонкостінних пружних однорідних циліндричних оболонок товщини h , радіусу R , довжини H . Оболонки містять малий наскрізний отвір радіусу r , навколо якого симетрично розташовані два (або чотири) однакові еліптичні включення з більшою піввіссю a та меншою b . Включення розміщені на відстані l між їхніми центрами і центром отвору (рис. 1). Оболонки знаходяться під дією одновісного рівномірного навантаження розтягу $p = \text{const}$, що не призводить до появи пластичних деформацій.



а) вертикальне розташування двох включень; б) горизонтальне розташування двох включень; в) симетричне розташування чотирьох включень відносно осей Ox і Oy ; г) діагональне розташування двох включень; д) діагональне розташування чотирьох включень

Рис. 1 – Схема навантаження оболонки з круговим отвором та еліптичними включеннями:

Вважається, що включення знаходяться у площині оболонки (мають однакову з оболонкою товщину), на межі між складовими матеріалів оболонки (матрицею і включеннями) задано умови ідеального механічного контакту.

Матеріал включень має відмінні від матеріалу оболонки властивості. Моделювання здійснюється у припущенні, що на границі між матрицею і включеннями існує деякий перехідний шар, у межах якого механічні властивості матеріалів матриці і включення усереднені.

Розглянуто п'ять конфігурацій розташування включень відносно отвору: 1) два включення з вертикальним розташуванням (рис. 1, а)), 2) два включення з горизонтальним розташуванням (рис. 1, б)), 3) чотири включення з симетричним розташуванням відносно координатних осей Ox і Oy (рис. 1, в)); 4) діагональне розташування двох включень (рис. 1, г)); 5) діагональне розташування чотирьох включень (рис. 1, д)).

Вивчається вплив кожної конфігурації розташування включень відносно отвору, відстані між отвором та включеннями та їх механічних властивостей на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) оболонки за заданих граничних умов.

Основною метою дослідження є знаходження раціональних параметрів включень (їх кількості, способу розташування і властивостей матеріалу) з точки зору зменшення величини ККН та здійснення порівняльного аналізу з розв'язками аналогічних задач для пластин [3].

Математична модель задачі та метод розв'язування. У варіаційній постановці вихідна задача для тонкостінної структурно неоднорідної циліндричної оболонки при застосуванні геометрично лінійної теорії тонких оболонок на основі моделі Кірхгофа–Лява [6] призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії системи на множині кінематично можливих переміщень у просторі $W_2^1(\Omega)$ [22, 34]:

$$I[u, v, w] = \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \frac{E_j h}{(1-\nu_j^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 + 2\nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + \frac{1-\nu_j}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \frac{E_j h^3}{12(1-\nu_j^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right)^2 + 2\nu_j \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right) + 2(1-\nu_j) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy,$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ – проекції вектора переміщень на осі Ox , Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; R – радіус оболонки; E_j , ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки Ω_1 (матриці) ($j=1$) і включення Ω_j ($j=2, n+1$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Omega_j$ – область визначення змінних x та y ; γ – границя області Ω , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y), p_z(x, y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x, y) = p_z(x, y) = 0$, $p_y(x, y) = p = \text{const}$.

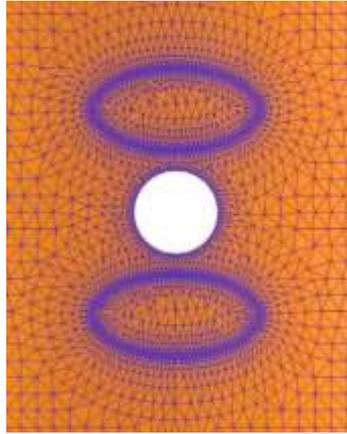


Рис. 2 – Адаптивна сітка в околі отвору та на межі включень

Сформульована варіаційна задача розв’язана із застосуванням МСЕ [36]. Дискретизацію області виконано шляхом побудови скінченноелементної сітки, утвореної трикутними шестивузловими лагранжевими елементами другого степеня. Кожен елемент має по три степеня вільності у вузлових точках (переміщення u, v, w), при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовані квадратичним поліномом.

Навколо отвору, а також на межі розділу матеріалів включень і матриці застосовано спеціально підібрану адаптивну скінченноелементну сітку з коефіцієнтом подрібнення 10 (рис. 2). Зазначимо, що збіжність числового розв’язку, отриманого при застосуванні МСЕ на основі ви-

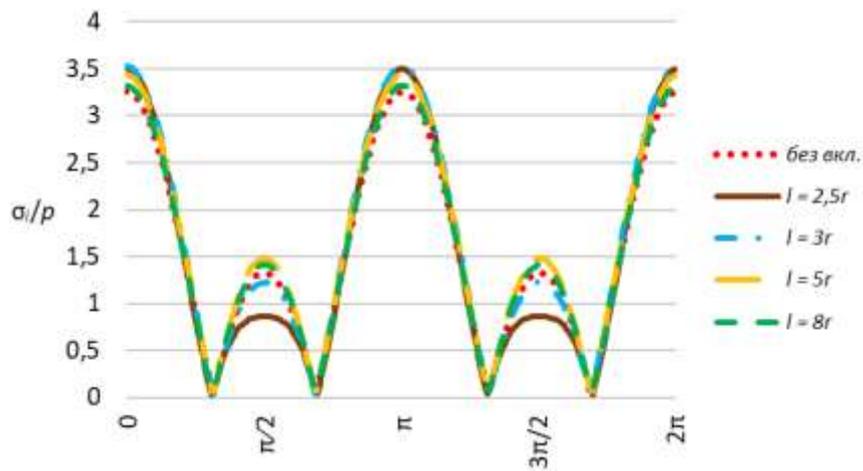
користання плоских трикутних елементів для тонкостінної оболонки, досягається завдяки поступовому ущільненню розбиття (згущенню сітки), оскільки зі зменшенням розмірів елементів підвищується точність апроксимації поверхні оболонки геометрією багатогранника, який її відтворює. Отже, завдяки згущенню скінченноелементної сітки забезпечується задовільна точність відтворення геометрії конструкції та отримання її параметрів НДС.

Числовий аналіз. Розрахунки здійснено на ПК HP Laptop 15s, AMD Ryzen 5 5500U with Radeon Graphics, з тактовою частотою 2,1 GHz, оперативною пам’яттю 8 GB, розрядність системи – x64. Середня кількість скінченних елементів – 57164, кількість вузлів – 115054.

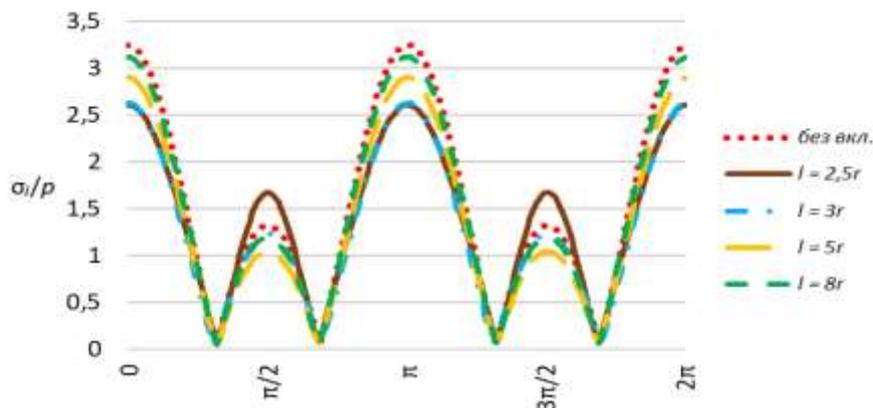
Дослідження проведено для циліндричної оболонки з такими параметрами: радіус оболонки $R = 0,3$ м, її довжина $H = 0,8$ м, товщина $h = 0,005$ м, радіус кругового отвору $r = 0,02$ м, півосі еліптичних включень $a = 0,04$ м, $b = 0,02$ м [4]. Для визначеності розглянуто сполучення двох матеріалів: алюміній ($E_1 = 70$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $\sigma_{0,2} = 415$ МПа, $\sigma_B = 470$ МПа), легована сталь ($E_2 = 210$ ГПа, $\nu_2 = 0,33$, $\sigma_{0,2} = 620$ МПа, $\sigma_B = 720$ МПа). Навантаження розтягу $p = 10$ МПа. Вибір матеріалів носить умовний характер.

Для зручності аналізу введено коефіцієнт відносної жорсткості k , $k = E_{вкл} / E_{об}$, де $E_{вкл}$ – модуль пружності включення, $E_{об}$ – модуль пружності оболонки. У дослідженні розглянуто випадки «жорстких» ($k > 1$) та «м’яких» ($k < 1$) включень. Розрахунки виконано для оболонки з двома та чотирма однаковими однорідними включеннями, симетрично розташованими на різній відстані l від центру кругового отвору до геометричного центру еліптичного включення ($l = 8r; 5r; 3r; 2,5r$). Для всіх досліджуваних варіантів розташування включень (рис. 1) знайдено поля інтенсивностей напружень і деформацій, а також визначено величину ККН.

На рис. 3, а) і рис. 3, б) подано розподіл відносної інтенсивності напружень σ_i / p уздовж розгортки контуру отвору для конфігурації з вертикальним розташуванням еліптичних включень (див. рис. 1, а)) за різних значень відстані l ($l = 8r; 5r; 3r; 2,5r$) для випадків $k > 1$ та $k < 1$ відповідно.



а)



б)

Рис. 3 – Розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору в оболонці для випадку двох вертикально розташованих включень (рис. 1, а): а) при $k > 1$; б) при $k < 1$

У табл. 1 наведено результати порівняльного аналізу одержаних числових даних розрахунків ККН для оболонки з двома вертикально розташованими включеннями у разі $k > 1$ та $k < 1$.

Таблиця 1

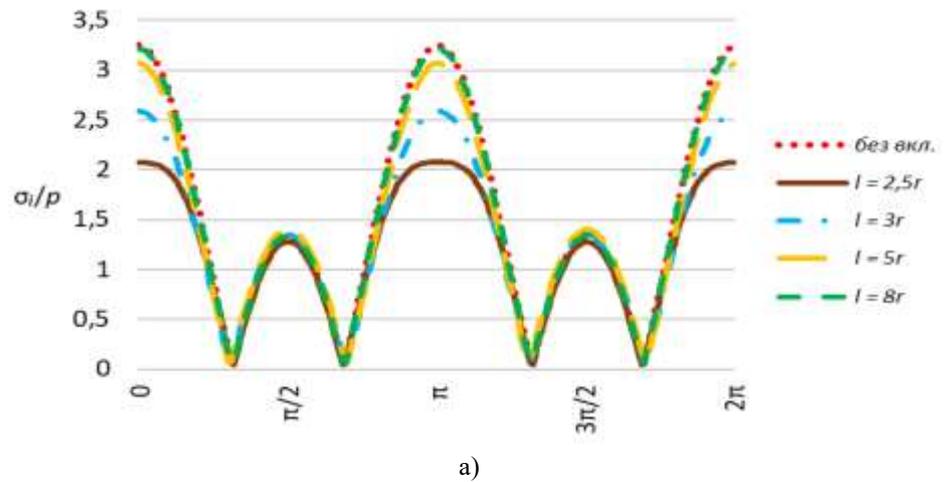
Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з двома вертикально розташованими «жорсткими» та «м'якими» включеннями

Задача / Відстань, l	$k > 1$		$k < 1$	
	ККН	δ , %	ККН	δ , %
$8r$	3,32	+2,0	3,13	-3,9
$5r$	3,44	+5,6	2,91	-10,7
$3r$	3,53	+8,5	2,63	-19,0
$2,5r$	3,50	+7,7	2,61	-19,6

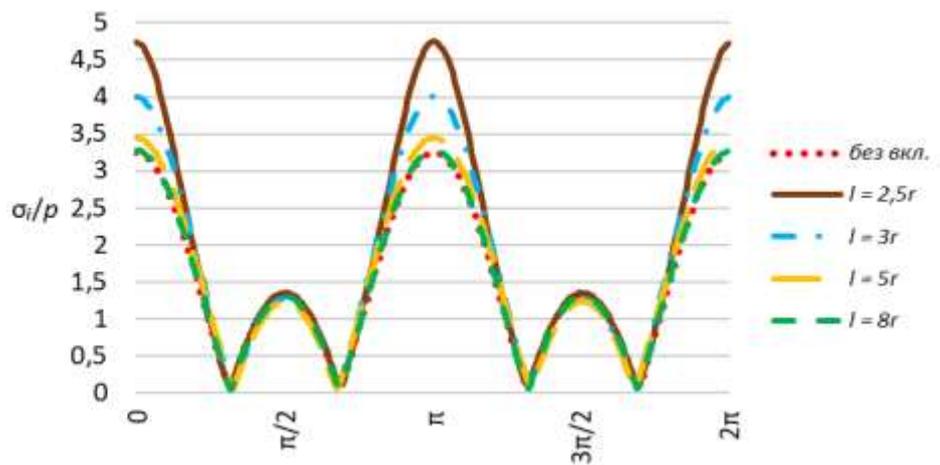
Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включень (ККН=3,25 [6]).

Аналіз табл. 1 показує, що скорочення відстані між круговим отвором та двома вертикально розташованими еліптичними вклученнями зумовлює зростання величини ККН приблизно на 8 % у зонах локальної концентрації напружень для випадку «жорстких» вклучень. У разі «м'яких» вклучень спостерігається протилежний ефект – величина ККН зменшується на ~ 20 %. Тобто найкращий результат тут спостерігається у разі двох «м'яких» вклучень при $l = 2,5r$.

На рис. 4, а) і рис. 4, б) наведено розподіл σ_i / p вздовж розгортки контуру отвору для випадку двох горизонтально розташованих еліптичних вклучень (рис. 1, б)) для різних значень відстані l ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) при $k > 1$ та $k < 1$ відповідно. Для «жорстких» вклучень при їх наближенні до отвору спостерігається зменшення ККН (рис. 4, а)), що дає змогу знизити максимальні значення інтенсивності напружень у небезпечних зонах приблизно на 36 % порівняно з оболонкою без вклучень. Натомість для «м'яких» вклучень спостерігається протилежний ефект – ККН поблизу отвору зростає на ~ 45 %.



а)



б)

Рис. 4 – Розподіл σ_i / p вздовж розгортки контуру отвору в оболонці для випадку двох горизонтально розташованих вклучень (рис. 1, б)): а) при $k > 1$; б) при $k < 1$

Отримані числові значення ККН для випадку, зображеному на рис. 1, б), а також відхилення від ККН для оболонки без включень подано у табл. 2.

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з двома горизонтально розташованими «жорсткими» та «м'якими» включеннями

Задача / Відстань, l	$k > 1$		$k < 1$	
	ККН	δ , %	ККН	δ , %
$8r$	3,22	-1,1	3,28	+0,8
$5r$	3,07	-5,5	3,45	+6,1
$3r$	2,59	-20,4	4,01	+23,2
$2,5r$	2,08	-36,1	4,74	+45,8

Найкращій результат тут спостерігається у разі двох «жорстких» включень при $l=2,5r$.

На рис. 5, а) і рис. 5, б) наведено розподіл σ_i / p вздовж розгортки контуру отвору для випадку чотирьох еліптичних включень, розташованих симетрично відносно осей Ox і Oy (рис. 1, в)) для різних значень відстані l ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) при $k > 1$ та $k < 1$ відповідно. Тут, аналогічно випадку використання горизонтальних включень, «жорсткі» включення також виявилися ефективними з точки зору зниження ККН, адже їх наявність надала змогу зменшити величину ККН на $\sim 31\%$ при найкоротшій із розглянутих відстаней (при $l=2,5r$). Використання «м'яких» включень з цієї точки зору виявилось менш ефективним (див. табл. 3).

Таблиця 3

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з чотирма симетрично розташованими відносно осей Ox та Oy «жорсткими» та «м'якими» включеннями

Задача / Відстань, l	$k > 1$		$k < 1$	
	ККН	δ , %	ККН	δ , %
$8r$	3,29	+1	3,15	-3,3
$5r$	3,25	+0,1	3,09	-5,1
$3r$	2,82	-13,4	3,30	+1,4
$2,5r$	2,24	-31	3,96	+21,7

Аналіз табл. 3 показує, що у разі застосування чотирьох симетрично розташованих відносно осей Ox та Oy включень перевагу слід віддавати «жорстким» включенням і розміщувати їх поблизу отвору.

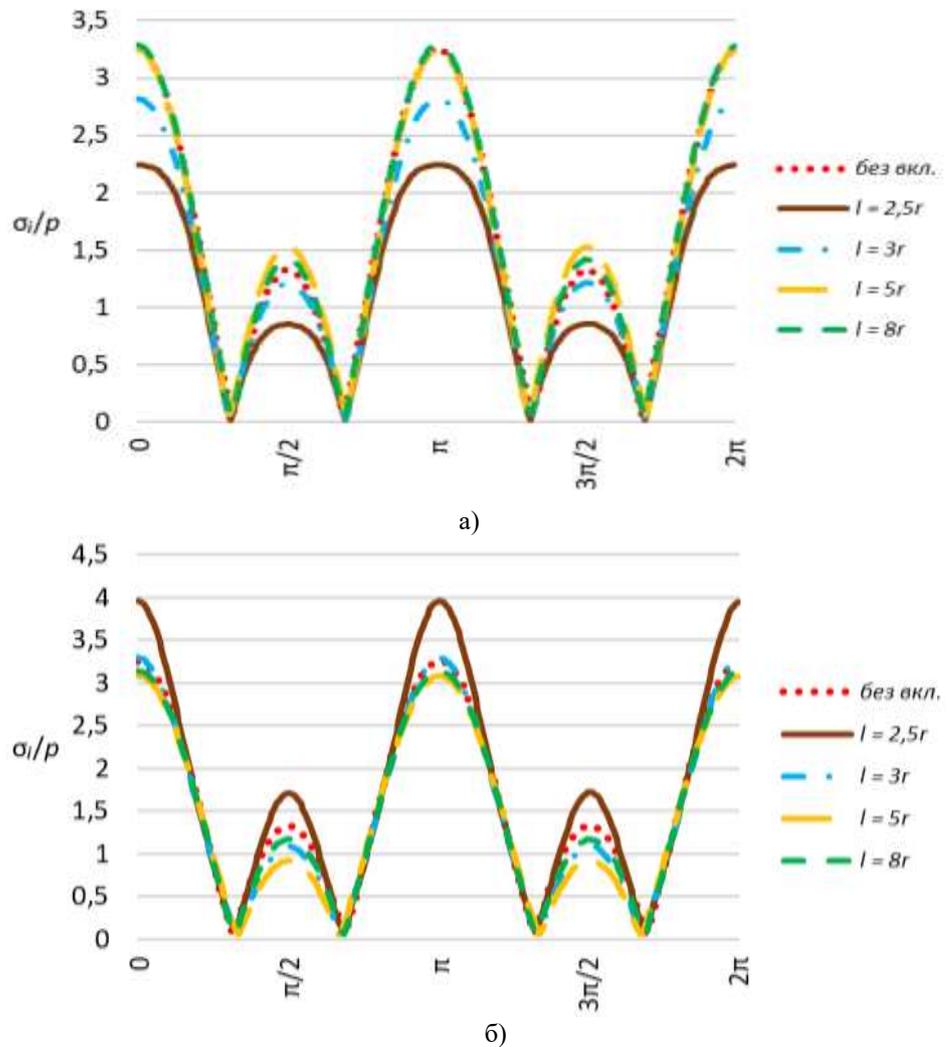
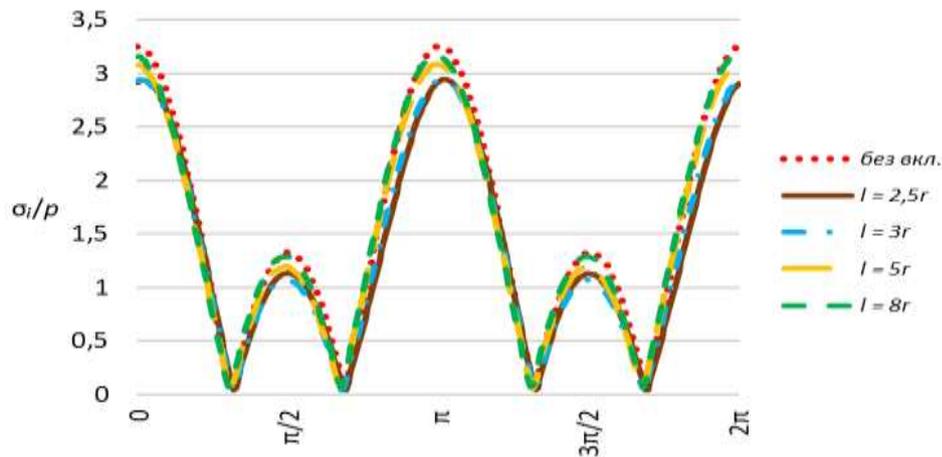


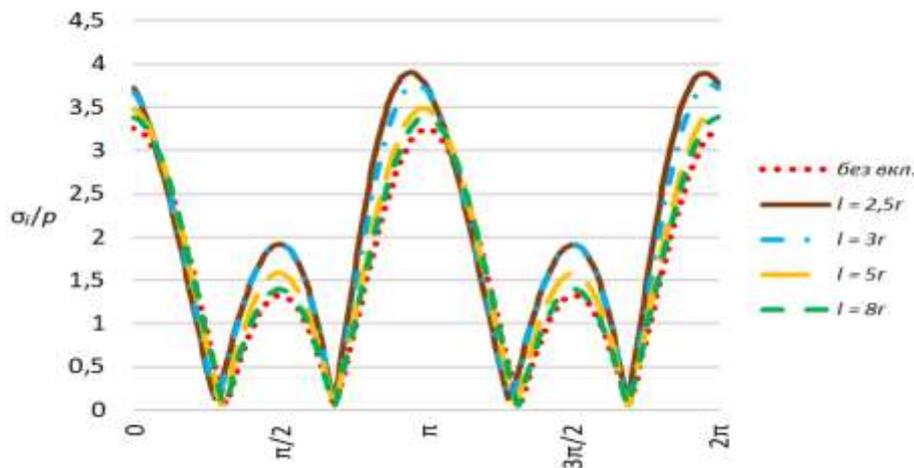
Рис. 5 – Розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору в оболонці для випадку чотирьох включень, симетрично розташованих відносно осей Ox та Oy (рис. 1, в):
а) при $k > 1$; б) при $k < 1$

На рис. 6, а) і рис. 6, б) подано розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору для випадку двох діагональних еліптичних включень (розташованих під кутом 45° відносно осей Ox та Oy , рис. 1, г)) для різних значень відстані l ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) при $k > 1$ та $k < 1$ відповідно. Отримані числові значення ККН для цього випадку і відхилення від ККН для оболонки без включень наведено у табл. 4.

З табл. 4 випливає, що при використанні «жорстких» включень величина ККН зменшується на $\sim 10\%$ при наближенні їх до отвору. Крім того, спостерігаємо механічний ефект: зі зближенням з отвором відбувається зміна локації зон концентрації напружень у напрямку, протилежному розташуванню включень (за годинниковою стрілкою). Для «м'яких» включень – навпаки, має місце зростання ККН на $\sim 14\%$ порівняно з результатами для оболонки без включень. Тут також спостерігаємо «ефект зсуву», при цьому зони концентрації напружень зміщуються у протилежному напрямку (проти годинникової стрілки). Отримані дані узгоджуються як якісно, так і кількісно з результатами розв'язання аналогічної задачі для пластини [3].



а)



б)

Рис. 6 – Розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору в оболонці для випадку двох діагональних включень (рис. 1, г): а) при $k > 1$; б) при $k < 1$

Таблиця 4

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з двома діагонально розташованими «жорсткими» та «м'якими» включеннями

Задача	$k > 1$		$k < 1$	
	ККН	$\delta, \%$	ККН	$\delta, \%$
Відстань, l				
$8r$	3,16	-2,8	3,38	+3,9
$5r$	3,08	-5,4	3,47	+6,8
$3r$	2,94	-9,7	3,68	+13
$2,5r$	2,92	-10,3	3,72	+14,4

Найкращий результат тут спостерігається у разі двох «жорстких» включень при $l=2,5r$.

На рис. 7, а) і рис. 7, б) наведено розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору для випадку чотирьох діагональних еліптичних включень (роз-

ташованих під кутом 45° відносно осей Ox та Oy , рис. 1, д)) для різних значень відстані l ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) при $k > 1$ та $k < 1$ відповідно. Отримані числові значення ККН для цього випадку і відхилення від ККН для оболонки без включень наведено у табл. 5.

Тут, як і в більшості попередніх розглянутих варіантах, при використанні жорстких включень величина ККН зменшується при наближенні включень до отвору, максимальний ефект (зменшення ККН на $\sim 10\%$) досягається при цьому для $l = 2,5r$. Використання «м'яких» включень, навпаки, призводить до погіршення ситуації: відбувається зростання величини ККН на $\sim 25\%$.

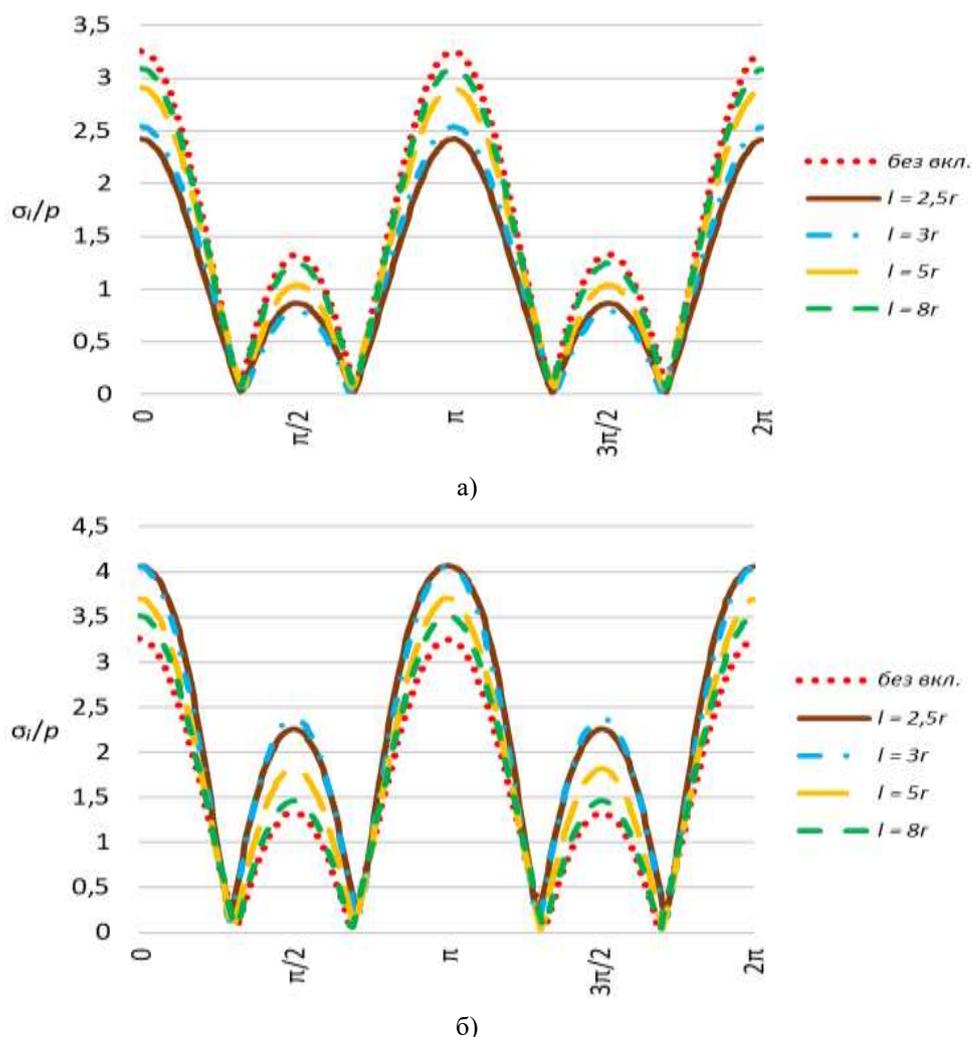


Рис. 7 – Розподіл σ_i / ρ вздовж розгортки контуру отвору в оболонці для випадку чотирьох діагональних включень (рис. 1, д): а) при $k > 1$; б) при $k < 1$

Результати порівняльного аналізу отриманих числових даних розрахунків ККН для циліндричної оболонки і пластини [3] для усіх вищерозглянутих випадків розташування включень (рис. 1, а) – рис. 1, д)), наведено у табл. 6 (Δ – відхилення ККН оболонки від ККН відповідної пластини).

Таблиця 5

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з чотирма діагонально розташованими «жорсткими» та «м'якими» включеннями

Задача Відстань, l	$k > 1$		$k < 1$	
	ККН	δ , %	ККН	δ , %
$8r$	3,09	-4,9	3,52	+8,1
$5r$	2,91	-10,6	3,70	+13,8
$3r$	2,54	-21,8	4,06	+24,8
$2,5r$	2,43	-25,4	4,06	+24,9

Найкращий результат тут спостерігається у разі чотирьох «жорстких» включень при $l=2,5r$.

Із табл. 6 видно, що із усіх розглянутих випадків кривизна оболонки порівняно з результатами для пластини найбільше впливає на величину ККН при використанні чотирьох діагональних «м'яких» включень (відхилення від референтного значення сягає $\sim 37\%$). Для усіх інших випадків відхилення ККН є незначним (до $\sim 14\%$). Слід звернути увагу на те, що при використанні «жорстких» включень відхилення ККН оболонки від ККН відповідної пластини є меншим, аніж при використанні «м'яких» включень з аналогічною конфігурацією їхнього розташування.

Таким чином, за результатами проведених обчислювальних експериментів та порівняльного аналізу числових розв'язків вихідної задачі з відповідними розв'язками для оболонки без включень [6] встановлено:

- Для конфігурації з *вертикальним розташуванням* двох еліптичних включень (рис. 1, а) маємо: при $k > 1$ величина ККН зростає на $\sim (2 - 8)\%$ зі зменшення відстані l між отвором та включеннями; при $k < 1$ навпаки, ККН зменшується на $\sim (4 - 20)\%$ зі зменшенням цієї відстані. Максимальний ефект, а саме зменшення ККН на $\sim 20\%$, спостерігається при найменшій відстані з розглянутих випадків $l=2,5r$.
- Для конфігурації з *горизонтальним розташуванням* двох еліптичних включень (рис. 1, б) маємо: при $k > 1$ величина ККН зменшується на $\sim (1 - 36)\%$ зі зменшенням відстані l . Найбільший ефект, тобто зменшення ККН на $\sim 36\%$, досягається за найменшою із розглянутих відстаней ($l=2,5r$). Для випадку $k < 1$ спостерігається протилежна тенденція – величина ККН зростає на $\sim (1 - 46)\%$ при зменшенні відстані l .
- Для конфігурації з *симетричним розташуванням* чотирьох еліптичних включень відносно осей Ox та Oy (рис. 1, в) маємо: при $k > 1$ зменшення ККН досягає $\sim 31\%$ за умови розташування включень на відстані $l=2,5r$; при $k < 1$ найкращим виявляється варіант із відстанню $l=5r$, де ККН зменшується на $\sim 5\%$.
- Для конфігурації з *діагональним розташуванням* двох включень (рис. 1, г) : при $k > 1$ зменшення ККН сягає $\sim 10\%$ при найменшій із розглянутих відстаней ($l=2,5r$); при $k < 1$ аналогічно попереднім випадкам величина ККН зростає на $\sim (4 - 14)\%$ при зменшенні відстані l .
- Для конфігурації з *діагональним розташуванням* чотирьох включень (рис. 1, д) : при $k > 1$ величина ККН зменшується на $\sim (5 - 25)\%$ зі зменшенням відстані l , досягаючи $\sim 25\%$ при $l=2,5r$; при $k < 1$ величина ККН зростає на $\sim (8 - 25)\%$ при наближенні до отвору.

Таблиця 6

Порівняння коефіцієнтів концентрації напружень оболонки і пластини з отвором

Відстань, l		Задача		$8r$	$5r$	$3r$	$2,5r$
Два вертикальні включення	$k > 1$	ККН	пластина	3,09	3,19	3,27	3,29
			оболонка	3,32	3,44	3,53	3,50
		$\Delta, \%$	+7,4	+7,8	+7,9	+6,4	
	$k < 1$	ККН	пластина	2,89	2,71	2,51	2,46
			оболонка	3,13	2,91	2,63	2,61
		$\Delta, \%$	+8,3	+7,8	+4,8	+6,1	
Два горизонтальні включення	$k > 1$	ККН	пластина	2,98	2,92	2,48	2,01
			оболонка	3,22	3,07	2,59	2,08
		$\Delta, \%$	+8,05	+5,14	+4,44	+3,48	
	$k < 1$	ККН	пластина	3,07	3,13	3,61	4,22
			оболонка	3,28	3,45	4,01	4,74
		$\Delta, \%$	+6,84	+10,22	+11,08	+12,32	
Чотири включення, розташовані вздовж осей Ox і Oy	$k > 1$	ККН	пластина	3,06	3,09	2,71	2,21
			оболонка	3,29	3,25	2,82	2,24
		$\Delta, \%$	+7,52	+5,18	+4,06	+1,36	
	$k < 1$	ККН	пластина	2,91	2,76	2,97	3,48
			оболонка	3,15	3,09	3,30	3,96
		$\Delta, \%$	+8,25	+11,96	+11,11	+13,79	
Два діагональні включення	$k > 1$	ККН	пластина	2,92	2,86	2,79	2,81
			оболонка	3,16	3,08	2,94	2,92
		$\Delta, \%$	+8,21	+7,69	+5,37	+3,91	
	$k < 1$	ККН	пластина	3,16	3,25	3,34	3,34
			оболонка	3,38	3,47	3,68	3,72
		$\Delta, \%$	+6,96	+6,76	+10,17	+11,37	
Чотири діагональні включення	$k > 1$	ККН	пластина	3,06	3,09	2,71	2,21
			оболонка	3,09	2,91	2,54	2,43
		$\Delta, \%$	+0,98	-5,82	-6,27	+9,95	
	$k < 1$	ККН	пластина	2,91	2,76	2,97	3,48
			оболонка	3,52	3,70	4,06	4,07
		$\Delta, \%$	+20,96	+34,05	+36,70	+16,95	

Висновки. Результати проведеного числового аналізу комп'ютерного моделювання показують, що на величину ККН в оболонці з отвором істотний вплив мають механічні характеристики включень, їх кількість, форма, взаємне розташування та відстань між ними й отвором. Серед проаналізованих

схем розташування еліптичних включень навколо отвору найбільш ефективним щодо зменшення величини ККН виявилось їх горизонтальне розташування (рис. 1, б)) у випадку застосування «жорстких» включень ($k > 1$), що забезпечило зменшення величини ККН приблизно на 36 % порівняно з оболонкою без включень. Для «м'яких» включень раціональним виявилось їх вертикальне розташування (рис. 1, а)), що забезпечило зменшення ККН на ~ 20 %. Отримані результати добре узгоджуються з даними аналогічних досліджень для пластин [3].

Порівняльний аналіз одержаних числових розв'язків для оболонок і пластин показує, що залежність величини ККН від кількості, конфігурації, розташування та механічних властивостей включень якісно збігається. Кількісні відмінності у значеннях ККН зумовлені впливом кривизни оболонки, який найбільш відчутний у випадку чотирьох діагональних «м'яких» включень.

Окрім того, у ході досліджень виявлено *механічний ефект*: при зближенні з отвором двох «жорстких» діагональних включень відбувається зміна локації зон концентрації напружень у напрямку, протилежному розташуванню включень (за годинниковою стрілкою). При використанні «м'яких» включень також спостерігається механічний «ефект зсуву», але зміна локації зон концентрації напружень відбувається в протилежному напрямку (проти годинникової стрілки). Цей механічний ефект якісно узгоджується із аналогічним явищем, що спостерігається для відповідної пластини [3].

Перспективним напрямом подальших досліджень є визначення раціональних параметрів включень – їх форми, розмірів, кількості, механічних характеристик та схеми розташування – з урахуванням впливу на зменшення величини ККН. Такий підхід має важливе практичне значення для удосконалення процесів проектування й оптимізації оболонкових елементів сучасних інженерних конструкцій, забезпечуючи підвищення їхньої міцності, довговічності та експлуатаційної ефективності.

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчёта оболочек и тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1969. 402 с.
2. Балаишова С. Д., Тавадзе Э. Л. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями. Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. Днепропетровск: ДГУ, 1996. С. 128–134.
3. Гарт Е. Л., Рибалко Я. В. Взаемовлияние кругового отверстия и оточующих його эллиптических включений при пружному деформуванні прямокутної пластини. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2019. Вип. 30. С. 5–18.
4. Гарт Е. Л., Шебанов О. Д. Влияние параметров симметрично размещённых эллиптических включений на концентрацию напряжений вокруг кругового отверстия в цилиндрической оболочке. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2024. Вип. 38. С. 36–50.
5. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А. Моделирование процесса деформирования пластины с упругими протяжёнными включениями на основе метода конечных элементов. Технічна механіка. 2014. № 2. С. 12–23.
6. Гузь А. Н., Чернышенко И. С. и др. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К.: Наукова думка, 1980. 636 с.
7. Крайко А. Н. Численные методы расчета оболочек. М.: Машиностроение, 1986. 368 с.
8. Підстригач Я. С. Вибрані праці. К.: Наук. думка, 1995. 460 с.
9. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
10. Штерн М. Б., Рудь В. Д. Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ на основі порошків металів і кераміки при деформуванні та спіканні / Під ред. В. В. Скорохода. Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-т, 2010. 232 с.
11. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore: Springer, 2018. 503 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-8935-0>
12. Bull J. W. Stress around large circular holes in uniform circular cylinders. J. Strain Anal. Eng. Des. 1982. Vol. 17, No. 1. P. 9–12. <https://doi.org/10.1243/03093247V171009>
13. Gudramovich V. S., Gart E. L., Strunin K. A. Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions. Materials Science. 2017. Vol. 52, No. 6. P. 768–774. <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z>

14. *Haque A., Ahmed L., Ramasetty A.* Stress concentrations and notch sensitivity in woven ceramic matrix composites containing a circular hole – an experimental, analytical, and finite element study. *J. Amer. Ceramic Soc.* 2005. Vol. 88, No. 8. P. 2195–2201. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2005.00404.x>
15. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional. *J. Appl. Math. Mech.* 2016. Vol. 80, No. 2. P. 156–163. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.06.005>
16. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles.* Kyiv: KNUBA, 2022. Issue 108. P. 77–86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
17. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Terokhin B. I.* Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion. *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials: Collected work.* Cham: Springer, 2024. Vol. 204, Chapter 18. P. 249–264. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_18
18. *Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Yu. F., Hart E. L.* Development of the normative framework methodology for justifying the residual resource of starting buildings' constructions of space launch vehicles. *Strength of Materials.* 2019. Vol. 51, No. 3. P. 333–340. <https://doi.org/10.1007/s11223-019-00079-4>
19. *Kamalarajah R., Bull J. W., Chizari M.* An investigation on circular cut-outs multilayer thin walled pipes. *IAENG Transactions on Engineering Sciences.* 2018. P. 1–13. https://doi.org/10.1142/9789813230774_0001
20. *Kumar R. V., Ramamurthy G., Rao K., Lakshminarayana H.* An improved finite element model to study stress concentration around an elliptical cutout in pressure vessel: Validation: Part-I. *J. Aerospace Sciences and Technologies.* 2007. Vol. 59, No. 3. P. 196–207. <https://doi.org/10.61653/joast.v59i3.2007.711>
21. *Lekkerkerker J. G.* Stress concentration around circular holes in cylindrical shells. *AIAA J.* 1964. Vol. 10. P. 1466–1472.
22. *Lurie A. I.* *Theory of Elasticity. Foundations of Engineering Mechanics.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. 1050 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>
23. *Lyashenko B.A., Soroka E., Rutkovskii A. V., Lipinskaya N. V.* Determination of discrete-structure parameters of coatings with allowance for residual stresses. *Strength of Materials.* 2002. Vol. 34, No. 4. P. 402–406. <https://doi.org/10.1023/A:1020344724002>
24. *Murthy M. V. V., Rao K. P., Rao A. K.* On the stress problem of large elliptical cutouts and cracks in circular cylindrical shells. *Int. J. Solids Struct.* 1974. Vol. 10, No. 11. P. 1243–1269. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90071-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90071-7)
25. *Nguyen D. H., Wang H.* Multi-scale analyses of three dimensional woven composite 3d shell with a cut out circle. *Appl. Compos. Mater.* 2019. Vol. 26. P. 339–356. <https://doi.org/10.1007/s10443-018-9695-z>
26. *Oterkus E., Madenci E., Nemeth M. P.* Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout. *J. Mech. Mater. Struct.* 2007. Vol. 2, No. 4. P. 695–727. <https://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.695>
27. *Pierce D. N., Chou S. I.* Stresses around elliptic holes in circular cylindrical shells. *Exp. Mech.* 1973. Vol. 13. P. 487–492. <https://doi.org/10.1007/BF02322735>
28. *Pilkey W. D., Pilkey D. F., Bi Z.* *Peterson's Stress Concentration Factors.* Wiley, 2020. 640 p. <https://doi.org/10.1002/9781119532552>
29. *Russo A, Sellitto A, Saputo S, Acanfora V, Riccio A.* A numerical-analytical approach for the preliminary design of thin-walled cylindrical shell structures with elliptical cut-outs. *Aerospace.* 2019. Vol. 6, No. 5. P. 1–15. <https://doi.org/10.3390/aerospace6050052>
30. *Shariati M., Rokhi M.M.* Buckling of steel cylindrical shells with an elliptical cutout. *Steel Struct.* 2010. Vol. 10. No. 2. P. 193–205. <https://doi.org/10.1007/BF03215830>
31. *Sharma D. S.* Stress distribution around polygonal holes. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2012. Vol. 65, No. 1. P. 115–124. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.09.009>
32. *Tennyson R. C.* The effects of unreinforced circular cutouts on the buckling of circular cylindrical shells under axial compression. *J. Eng. Ind.* 1968. Vol. 90, No. 4. P. 541–546. <https://doi.org/10.1115/1.3604686>
33. *Van Tooren M. J. L., Van Stijn I. P. M., Beukers A.* Curvature effects on the stress distribution in sandwich cylinders with a circular cut-out. *Compos. Part A: Applied Science and Manufacturing.* 2002. Vol. 33, No. 11. P. 1557–1572. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(02\)00116-1](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(02)00116-1)
34. *Washizu K.* *Variational Methods in Elasticity and Plasticity.* Oxford, New York: Pergamon Press, 1975. 420 p.
35. *Yazici M., Ozcan R., Ulku S., Okur I.* Buckling of composite plates with U-shaped cutouts. *J. Compos. Mater.* 2003. Vol. 37, No. 24. P. 2179–2195. <https://doi.org/10.1177/002199803038109>
36. *Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.* *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* New York: Elsevier, 2005. 632 p.

Отримано 22.10.2025,
в остаточному варіанті 21.11.2025