УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2026.01.045

Е. Л. ГАРТ [1], https://orcid.org/0000-0002-6075-2269
Б. І. ТЕРЬОХІН [2], https://orcid.org/0000-0003-2381-8190

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИН З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ЗА РІЗНИХ ТИПІВ НАВАНТАЖЕННЯ

[1] Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Науки, 72, 49045, Дніпро, Україна; e-mail: hart@ua.fm;
[2] Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: bogdan.teryokhin@gmail.com

Тонкостінні пластинчато-оболонкові елементи конструкцій широко використовуються в різних галузях техніки та народного господарства, зокрема в ракетно-космічній сфері, нафтогазовій промисловості, енергетиці, машинобудуванні, будівництві та інших напрямках. Наявність отворів в таких конструкціях призводить до різкого збільшення локальних напружень, що за певних умов може стати причиною руйнівних процесів. Особливо якщо експлуатація відбувається в екстремальних умовах, що зазвичай має місце в різноманітних галузях техніки. Зниження концентрації напружень біля отворів в тонкостінних конструкціях є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла. Одним із способів зниження концентрації напружень є застосування сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) з певними механічними властивостями. Градієнт механічних властивостей дозволяє впливати на напружено-деформований стан елементів конструкцій та може сприяти зниженню концентрації напружень в околі локальних концентраторів. Така особливість ФГМ дає змогу суттєво підвищити міцність та надійність конструкції в цілому.

У роботі проведено комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких прямокутних пластин із ФГМ за різних типів навантаження. Досліджено вплив закону зміни модуля пружності ФГМ-пластини на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану пластин в околі отвору. Отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Розглянуто випадки зміни модуля пружності за горизонтальним та вертикальним напрямом для кожного з розглянутих типів навантаження. Знайдено параметри неоднорідності ФГМ-пластини, які дозволяють зменшити коефіцієнт концентрації напружень до ~ 19 %. При цьому також спостерігається пропорційне зменшення інтенсивності деформацій в околі отвору. Закон зміни модуля пружності ФГМ-пластини суттєво впливає не тільки на величину концентрації параметрів напружено-деформованого стану пластини, а й на характер розподілу напружень за її площиною. Результати проведеної серії обчислювальних експериментів показують, що застосування ФГМ в пластинах є доцільним, оскільки дає змогу знизити інтенсивності як напружень, так і деформацій навколо отвору за різних типів навантаження.

Ключові слова: *тонка пружна пластина, круговий отвір, функціонально-градієнтний матеріал, напружено-деформований стан, одновісний розтяг, двовісний розтяг, чистий поперечний зсув, коефіцієнт концентрації напружень, комп'ютерне моделювання, скінченноелементний аналіз.*

Thin-walled plate-shell structural elements are widely used in various sectors of engineering and the national economy, particularly in the aerospace, oil and gas, and power industries, mechanical engineering, construction, etc. The presence of holes in structures of this type leads to a sharp increase in local stresses, which under certain conditions may lead to destructive processes. This is especially true if they are used under extreme conditions, which is common in various sectors of engineering. Reducing stress concentration near holes in thin-walled structures is a pressing problem in solid mechanics. One way to do this is to use advanced functionally graded materials (FGMs) with specific mechanical properties. A gradient in mechanical properties allows one to control the stress and strain field of structural elements and may contribute to stress reduction near local stress concentrators. This FGM feature significantly increases the strength and reliability of structures as a whole.

This paper presents the results of a computer simulation and finite-element analysis of the stress and strain field of thin rectangular FGM plates under various types of loading. The effect of the FGM plate elastic modulus variation law on stress and strain concentration in the vicinity of a hole is investigated. The stress and strain intensity distribution in local stress concentration zones is obtained. Cases of elastic modulus variation in a horizontal and a vertical direction for each of the loading types under consideration are studied. FGM plate heterogeneity parameters are found such that the stress concentration factor can be reduced down to ~19 %. At

© Е. Л. Гарт, Б. І. Терьохін, 2026

The article is an open access article distributed underthe terms and conditions of the Creative Commons Attributions (CC BY) license (https/creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

the same time, a proportional decrease in the strain intensity in the vicinity of the hole is also observed. The FGM plate elastic modulus variation law has a significant effect not only on the magnitude of the stress and strain concentration parameters, but also on the pattern of the stress distribution over the plate. The results of the series of computational experiments show that the use of FGMs in plates is advisable because it allows one to reduce both the stress and the strain intensity around a hole under various types of loading.

Keywords: *thin elastic plate, circular hole, functionally graded material, stress and strain field, uniaxial tension, biaxial tension, pure transverse shear, stress concentration factor, computer simulation , finite-element analysis.*

Вступ. Концентрація напружень біля отворів в тонкостінних конструкціях суттєво впливає на їхню міцність та зазвичай є причиною руйнування. Одним із способів зниження локальної концентрації напружень є застосування неоднорідних матеріалів. Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – це відносно новий вид неоднорідного композиту, для якого характерна поступова зміна мікроструктури та фізико-механічних властивостей [1, 2]. Градієнт властивостей дає змогу впливати на напружено-деформований стан (НДС) елементів конструкцій та знижувати концентрацію напружень біля локальних концентраторів. Тому ФГМ мають перевагу порівняно як з однорідними, так і композитними матеріалами [3, 4]. Отже, ФГМ знаходять широку сферу використання в різних галузях техніки і промисловості, а саме: аерокосмічна промисловість, машинобудування, медична імплантація, енергетика, військовий сектор тощо.

Станом на сьогодні опубліковано значну кількість робіт, присвячених дослідженню НДС тонкостінних конструкцій з отворами [5 – 26], у тому числі виготовлених із ФГМ, із застосуванням аналітичних, числових та експериментальних методів. Зокрема, у роботі [17] за допомогою аналітичного підходу досліджено розподіл напружень у ФГМ-пластині з круговим отвором. В [18] отримано аналітичний розв’язок задачі про плоский напружений стан однорідної пластини з круговим отвором, підсиленим ФГМ-кільцем, за дії одновісного розтягу, а також проаналізовано вплив параметрів ФГМ-кільця на коефіцієнт концентрації напружень (ККН) при степеневому законі зміни властивостей матеріалу. У дослідженні [19] розглянуто вільні коливання ФГМ-пластини з прямокутними вирізами різних геометричних характеристик і схем розташування.

У роботі [20] за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) визначено ККН біля кругового отвору неоднорідної ФГМ-пластини при одновісному розтягу, у [21] – в околі кругового вирізу за умов двовісного розтягу та зсуву, а в [22] – поблизу еліптичного отвору за одно- та двовісного розтягувального навантаження. Показано, що раціональний вибір параметрів неоднорідності, які описуються степеневими та експоненціальними законами зміни властивостей ФГМ, забезпечує зменшення величини ККН. У [23] із використанням розширеного МСЕ виконано числовий аналіз концентрації напружень поблизу центрального еліптичного ФГМ-включення. У роботі [24] на основі МСЕ здійснено оптимізацію розподілу модуля пружності з метою мінімізації концентрації напружень у ФГМ-пластинах з круговим отвором, навантажених одновісним розтягом. Експериментальні результати дослідження напруженого стану ФГМ-пластин з круговим отвором, виготовлених із фотополімерних смол методом багатоматеріального 3D-друку, наведено в [25]. У роботі [26] представлено експериментальний і числовий аналіз фазового складу та механічних властивостей ФГМ на основі нержавіючої сталі 304L і сплаву Ni-20Cr.

Слід зазначити, що використання неоднорідних матеріалів значно ускладнює побудову математичної моделі задачі та процес отримання її розв’язку.

Тому переважна кількість сучасних досліджень НДС конструкцій із ФГМ базуються на числових методах механіки, зокрема МСЕ [27].

У цій роботі, як продовження попередніх досліджень авторів [8 – 12], за допомогою МСЕ проведено комп'ютерне моделювання та числовий аналіз НДС пружних тонких пластин із ФГМ з малим круговим отвором за дії різних типів навантаження (одновісний розтяг, двовісний розтяг, чистий поперечний зсув). Метою роботи є дослідження впливу закону зміни модуля пружності ФГМ-пластини на її НДС та знаходження такого закону, який би надав змогу зменшити величину ККН біля отвору.

Постановка задачі. Дослідження НДС проведено для тонких пружних прямокутних пластин із ФГМ розмірами $a \times b$, товщини h, з центрально розташованим круговим отвором радіусу R (рис. 1). На бокові грані пластин діє рівномірне розтягувальне навантаження $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$ що не призводить до появи пластичних деформацій. Розглянуто три варіанти граничних умов: 1) $p_1 = p,\ p_2 = 0$; 2) $p_1 = p_2 = p$; 3) $p_1 = p,\ p_2 = -p$, де $p = \text{const}$.

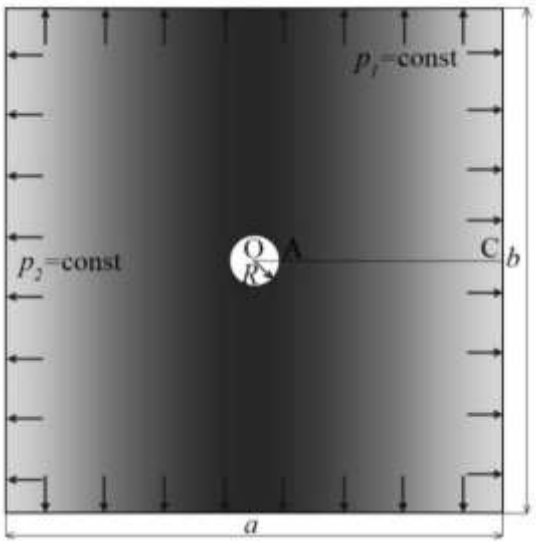


Рис. 1 – Геометрія та схема навантаження пластини

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-пластини $E(x)$ за лінійною залежністю. Графічну ілюстрацію законів зміни модуля пружності пластини подано на рис. 2. Тут і далі на рисунках по осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l \le 1$ в напрямку осі Ox від центра отвору (точка O, рис. 1) до краю пластини (точка C, рис. 1): $l = 2x / a,\ 0 \le x \le a/2$.

Лініями 1–4 позначено різні закони зміни модуля пружності $E(x)$ ФГМ-пластини (рис. 2): у випадку першого (лінія 1) та другого (лінія 2) законів модуль пружності пластини збільшується в 2 рази від середини пластини (x=0) або краю отвору (x=R) відповідно, а у двох інших законах (лінії 3, 4) модуль пружності, навпаки, зменшується.

Дослідимо вплив запропонованих законів неоднорідності ФГМ-пластин на величину ККН в околі отвору.

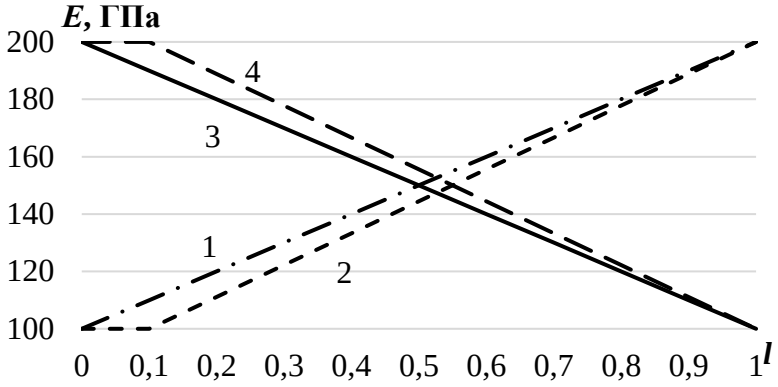


Рис. 2 – Закони зміни модуля пружності ФГМ-пластин (лінії 1–4)

Математична модель задачі та метод її розв'язування. У варіаційній постановці вихідна задача визначення НДС структурно неоднорідної тонкої пластини [28, 29] призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [30]:

$$F = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{E(x,y)h}{(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dxdy - \int_{\gamma} \left(p_1 u + p_2 v\right)\, dxdy,$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox, Oy відповідно; h – товщина пластини; $E(x,y)$, ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; Ω – область визначення змінних x та y; γ – границя області Ω, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y) = (p_1(x,y),\, p_2(x,y))^T$.

Для розв'язання поставленої варіаційної задачі застосовано МСЕ з використанням ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня з двома степенями вільності в кожному з вузлів (два лінійні переміщення u, v відповідно за напрямками осей *Ox*, *Oy*). При цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовано квадратичним поліномом:

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2,$$
$$v(x,y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2,$$

де a_i, b_i $(i = 1,2,...,6)$ – невідомі коефіцієнти, що визначаються із умови збігу значення скалярних величин u, v в кожному i-му вузлі з відповідними вузловими значеннями функцій переміщень u_i, v_i.

В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10.

Числовий аналіз. Розрахунки проведені на ПК з процесором Intel Core i7-10700F з тактовою частотою 2,9-4,8 GHz, оперативною пам'яттю

32 GB, відеокартою nVidia GeForce RTX 2060 SUPER, розрядність системи x64. Середня кількість скінченних елементів – 2126, кількість вузлів – 4408.

Числові результати отримані для квадратних пластин з такими геометричним параметрами: $a = b = 0{,}2$ м, $R = a/20$, $h = 0{,}005$ м, навантаження розтягу $p = 10$ МПа. Механічні властивості неоднорідного матеріалу задано закономірностями згідно рис. 2.

З метою проведення порівняльного аналізу був здійснений розрахунок для однорідної пластини з круговим отвором для трьох варіантів граничних умов. Отримані результати (див. табл. 1) добре узгоджуються з аналітичними розв'язками [6, 7]: відхилення менше ніж 1 %.

Таблиця 1

Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в однорідній пластині для задач 1 – 3

Задача	ККН	δ, %	$\varepsilon_i^{max} \cdot 10^4$
1	3,01	0,3	2,28
2	2,01	0,5	1,53
3	4,02	0,5	3,04

Тут δ – відхилення ККН, отриманого за допомогою МСЕ для однорідних пластин в разі граничних умов 1 – 3, від відповідних аналітичних результатів [6, 7]. Номери задач 1 – 3 відповідають граничним умовам 1 – 3.

Наведемо результати розрахунків для ФГМ-пластин з круговим отвором. Розглянуто чотири закони зміни модуля пружності $E(x)$ (рис. 2) у напрямку осі *Ox* від центра пластини (або краю отвору) до краю пластини, а також чотири аналогічні варіанти, у яких модуль пружності $E(y)$ змінюється у вертикальному напрямку (вздовж осі *Oy*). Для зручності введено подвійну нумерацію пластин: перша цифра вказує, від якої координати залежить модуль пружності (*x* або *y*), а друга – номер закону зміни модуля пружності (рис. 2). Результати обчислювальних експериментів для задач 1 – 3 зведено у табл. 2 – 4.

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в ФГМ-пластині 1 – 4 з круговим отвором для задачі 1

Вид пластини	ККН	δ_1, %	$\varepsilon_i^{max} \cdot 10^4$	Δ_1, %
ФГМ-пластина 1.1	2,49	-17,3	1,72	-24,6
ФГМ-пластина 1.2	2,44	-18,9	1,85	-18,9
ФГМ-пластина 1.3	3,44	+14,3	1,38	-39,5
ФГМ-пластина 1.4	3,45	+14,6	1,31	-42,5
ФГМ-пластина 2.1	2,88	-4,3	2,18	-4,4
ФГМ-пластина 2.2	2,93	-2,7	2,22	-2,6
ФГМ-пластина 2.3	3,07	+2,0	1,17	-48,7
ФГМ-пластина 2.4	3,03	+0,7	1,15	-49,6

Тут δ_1, Δ_1 – відхилення ККН та максимальних значень інтенсивності деформацій в ФГМ-пластині з круговим отвором для граничної умови (1) від відповідного значення для однорідної пластини.

З даних табл. 2 випливає, що за зміни модуля пружності пластини відповідно до законів 1 і 2 (рис. 2) спостерігається зменшення ККН біля отвору, причому для ФГМ-пластин 2.1 та 2.2 це зменшення є незначним і становить

близько (3 – 4) %. За реалізації законів 3 і 4, навпаки, значення ККН зростає. Водночас для всіх розглянутих законів характерним є зниження максимальної інтенсивності деформацій у межах приблизно (3–50) %. Найефективнішим варіантом з погляду зменшення ККН (приблизно на 19 %) є ФГМ-пластина 1.2, у якій модуль пружності монотонно зростає вздовж координати *x* від краю отвору до зовнішнього краю пластини.

Таблиця 3

Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в ФГМ-пластині 1 – 4 з круговим отвором для задачі 2

Вид пластини	ККН	δ_2, %	$\varepsilon_i^{max} \cdot 10^4$	Δ_2, %
ФГМ-пластина 1.1	1,87	-7,0	1,42	-7,2
ФГМ-пластина 1.2	1,86	-7,5	1,41	-7,8
ФГМ-пластина 1.3	2,31	14,9	0,92	-39,9
ФГМ-пластина 1.4	2,30	14,4	0,87	-43,1

Тут δ_2, Δ_2 – відхилення ККН та максимальних значень інтенсивності деформацій в ФГМ-пластині з круговим отвором для граничної умови (2) від відповідного значення для однорідної пластини.

Для граничної умови (2), з огляду на симетрію задачі, результати числових розрахунків не залежать від напрямку варіювання модуля пружності – вздовж координат *x* або *y*. У цьому випадку, так само як і для граничної умови (1), при реалізації законів зміни модуля пружності ФГМ-пластин 1 і 2 спостерігається зменшення величини ККН, тоді як для законів 3 і 4 має місце його зростання. Найменше значення ККН отримано для ФГМ-пластини 1.2.

Таблиця 4

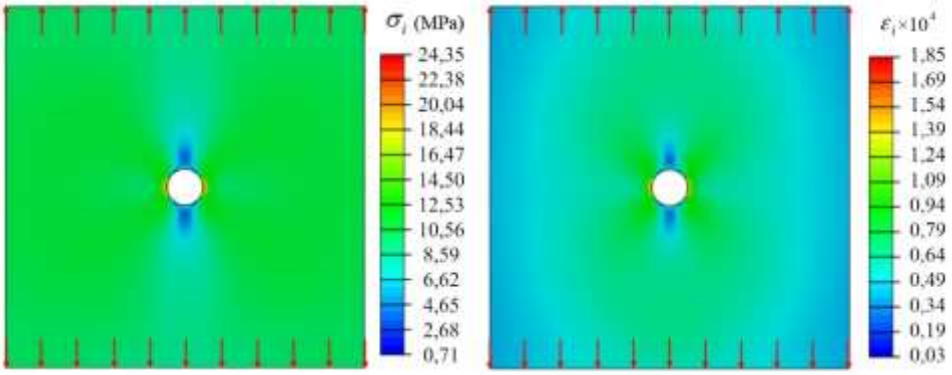
Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в ФГМ-пластині 1 – 4 з круговим отвором для задачі 3

Вид пластини	ККН	δ_3, %	$\varepsilon_i^{max} \cdot 10^4$	Δ_3, %
ФГМ-пластина 1.1	3,89	-3,2	2,95	-3,0
ФГМ-пластина 1.2	4,00	-0,5	3,03	-0,3
ФГМ-пластина 1.3	4,58	13,9	1,83	-39,8
ФГМ-пластина 1.4	4,59	14,2	1,74	-42,8

Тут δ_3, Δ_3 – відхилення ККН та максимальних значень інтенсивності деформацій в ФГМ-пластині з круговим отвором для граничної умови (3) від відповідного значення для однорідної пластини.

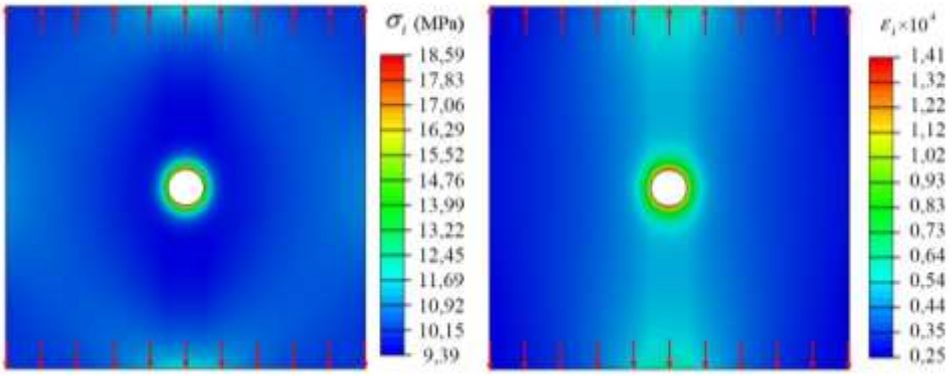
Для граничної умови (3), аналогічно до умови (2), встановлено, що результати розрахунків є інваріантними щодо напрямку зміни модуля пружності – вздовж координати *x* або *y*. У цьому випадку найменше значення ККН отримано для ФГМ-пластини 1.1. Водночас зменшення ККН за цієї граничної умови є незначним і становить близько 3 % порівняно з однорідною пластиною, тоді як для ФГМ-пластин 1.3 та 1.4, навпаки, спостерігається зростання ККН приблизно на 14 %. Таким чином, за граничної умови (3), що відповідає чистому зсуву, використання ФГМ із законами розподілу, наведеними на рис. 2, не забезпечує очікуваного ефекту.

Як ілюстрацію, на рис. 3 – рис. 5 подано розподіли інтенсивності напружень і деформацій в ФГМ-пластинах з круговим отвором для граничних умов 1–3.



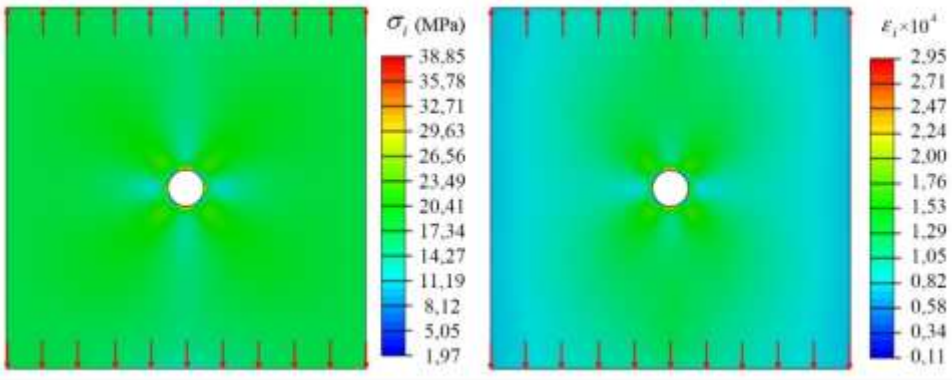
а) б)

Рис. 3 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в ФГМ-пластині 1.2 для задачі 1



а) б)

Рис. 4 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в ФГМ-пластині 1.2 для задачі 2



а) б)

Рис. 5 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в ФГМ-пластині 1.1 для задачі 3

Аналіз рис. 3 – рис. 5 показує, що збільшення модуля пружності пластини в 2 рази за лінійною залежністю (від краю отвору вздовж координати x) сприяє зменшенню величини ККН на $\sim (3-19)$ %. Натомість у разі зменшення модуля пружності у тому ж напрямку величина ККН зростає на $\sim (1-15)$ %. Для граничної умови (1) зміна модуля пружності вздовж

координати y не суттєво впливає на величину ККН біля отвору. Отже у даному випадку бажаного ефекту від застосування ФГМ не спостерігається.

Висновки. На основі проведеної серії обчислювальних експериментів із застосуванням МСЕ здійснено комп'ютерне моделювання та аналіз впливу закону неоднорідності матеріалу ФГМ-пластин за різних типів навантаження (одновісний розтяг, двовісний розтяг, чистий поперечний зсув) на концентрацію напружень біля кругового отвору.

Виявлено суттєвий вплив запропонованих законів зміни модуля пружності функціонально-градієнтного матеріалу на НДС ФГМ-пластин з круговим отвором. Для розглянутих видів навантаження визначено такі закони варіювання модуля пружності ФГМ, за яких спостерігається значне зменшення концентрації напружень і відповідних деформацій біля отвору.

Отже, застосування ФГМ у пластинах з отворами за різних граничних умов є доцільним, оскільки такі матеріали дають змогу знизити концентрацію напружень за рахунок їх перерозподілу. Однак, кожний варіант граничних умов потрібно досліджувати окремо і знаходити параметри неоднорідності матеріалу, які будуть раціональними для кожного конкретного випадку.

Отримані результати в перспективі можуть бути використані для пошуку раціональних механічних параметрів пластин із заданими функціональними властивостями матеріалу з метою підвищення міцності тонкостінних елементів конструкцій з отворами.

1. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. Trans. ASME. Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60, No. 5. P. 195–216. https://doi.org/10.1115/1.2777164
2. *Kawasaki A., Watanabe R.* Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. Ceramics International. 1997. V. 23, No. 1. P. 73–83. https://doi.org/10.1016/0272-8842(95)00143-3
3. *Vasiliev V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures. 4th ed. Amsterdam, Elsevier, 2018. 864 p. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-102209-2.00002-5
4. *Helal W. M. K., Shi D. Y.* Analysis of functionally graded rectangular plate by ANSYS. Key Engineering Materials. 2013. V. 572. P. 505–508. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.572.505
5. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. К., Наук. думка, 1995. 460 с.
6. *Pilkey W. D., Pilkey D. F., Bi Z.* Peterson's Stress Concentration Factors. 4th ed. Hoboken, Wiley, 2020. 640 p. https://doi.org/10.1002/9781119532552
7. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
8. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Terokhin B. I.* Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion. Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials: Collected work. Springer Cham, 2024. V. 204. Chapter 18. P. 249–264. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_18
9. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Effect of functionally graded inclusion on stress conservation near a circular hole in thin plates for different boundary conditions. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2025. V. 33, No. 1. P. 110–127. https://doi.org/10.15421/142506
10. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Finite-element analysis of stress concentration in thin plates and cylindrical shells with a circular hole surrounded by an inclusion of functionally graded material. Journal of Mathematical Sciences. 2025. V. 291, No. 5. P. 703–715. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07846-6
11. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Methods for reducing stress concentration around holes in thin plates and cylindrical shells with annular radially inhomogeneous inclusions. International Applied Mechanics. 2025. V. 61, No. 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10778-025-01359-0
12. *Гарт Е. Л., Гудрамович В. С., Терьохін Б. І.* Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень в тонких пластинах та циліндричних оболонках з круговим отвором. Технічна механіка. 2022. № 4. С. 67–78. https://doi.org/10.15407/itm2022.04.067
13. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А.* Моделирование процесса деформирования пластины с упругими протяжёнными включениями на основе метода конечных элементов. Технічна механіка. 2014. № 2. С. 12–23.
14. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. Strength of Materials and Theory of Structures. Kyiv, KNUBA, 2022. Iss. 108. P. 77–86. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86
15. *Haque A., Ahmed L., Ramasetty A.* Stress concentrations and notch sensitivity in woven ceramic matrix composites containing a circular hole. J. Amer. Ceramic Soc. 2005. V. 88, No. 8. P. 2195–2201. https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2005.00404.x
16. *Sharma D. S.* Stress distribution around polygonal holes. Intern. J. Mechanical Sciences. 2012. V. 65, No. 1. P. 115–124. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.09.009

17. *Yang Q. Q., Gao C. F., Chen W. T.* Stress concentration in a finite functionally graded material plate. Sci. China Phys. Mech. Astron. 2012. V. 55. P. 1263–1271. https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x
18. *Sburlati R.* Stress concentration factor due to a functionally graded ring around a hole in an isotropic plate. Int. J. Solids Struct. 2013. V. 50, No. 22–23. P. 3649–3658. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.007
19. *Jana K., Pal S., Haldar S.* Modal analysis of power law functionally graded material plates with rectangular cutouts. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2024. V. 52, No. 5. P. 2411–2439. https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2180033
20. *Kubair D. V., Bhanu-Chandar B.* Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. Intern. J. Mech. Sci. 2008. V. 50, No. 4. P. 732–742. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009
21. *Mohammadi M., Dryden J. R., Jiang L.* Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. Intern. J. Solids Struct. 2011. V. 48, No. 3–4. P. 483–491. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013
22. *Enab T. A.* Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings. Ain Shams Eng. Journal. 2014. V. 5, No. 3. P. 839–850. https://doi.org/10.1016/j.asej.2014.03.002
23. *Rani P., Verma D., Ghangas G.* Stress concentration analysis of functionally graded material coated elliptical inclusion under uniaxial tension. Materials Today: Proceedings. 2023. V. 78. Pt. 3. P. 351–358. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.09.602
24. *Abdalla H. M. A., De Bona F., Casagrande D.* Optimization of functionally graded materials to make stress concentration vanish in a plate with circular hole. Composites. Part C. 2024. V. 15. Art. 100512. https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2024.100512
25. *Yang Q., Cao H., Tang Y., Li Y., Chen X.* Experimental investigation of stress distributions in 3D printed graded plates with a circular hole. Materials. 2021. V. 14, No. 24. P. 1–13. https://doi.org/10.3390/ma14247845
26. *Bobbio L. D., Bocklund B., Liu Z.-K., Beese A. M.* Tensile behavior of stainless steel 304L to Ni–20Cr functionally graded material. Materialia. 2021. V. 18. Art. 101151. https://doi.org/10.1016/j.mtla.2021.101151
27. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Fox D. D.* The finite element method for solid and structural mechanics. 7th ed. New York, Elsevier, 2014. 624 p.
28. *Timoshenko S. P., Gere J. M.* Mechanics of Materials. New York: Van Nostrand Reinhold Company. 1972. 552 p.
29. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. 1050 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2
30. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2nd ed. Oxford, Pergamon Press, 1975. 412 p.

Стаття надійшла до редакції 12.02.2026;
прийнято до друку після рецензування 23.03.2026;
дата публікації31.03.2026.