

О. Є. КУЧЕРЕНКО, <https://orcid.org/0009-0008-6534-8178>В. А. БЛАЖКО, <https://orcid.org/0009-0007-3570-1631>

МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ОБОЛОНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ ВИБУХОВИХ ВПЛИВАХ

*Інститут технічної механіки Національної академії наук України і
Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, м. Дніпро, 49005, Україна; e-mail: ak_sci@proton.me*

У статті розглядається задача модального аналізу горизонтального сталевго резервуара об'ємом 50 м³ на бетонних сідлових опорах. Конструкція резервуару є оболонкою циліндричної форми довжиною 8.15 м і радіусом 1.4 м, товщина стінки складає 5 мм. Геометричну модель резервуару подано у тривимірному вигляді. Для моделювання горизонтальної оболонки застосовуються оболонкові елементи з вісьмома вузлами (SHELL281). Для побудови сідлових опор використовуються тривимірні двадцятивузлові скінченні елементи другого порядку (SOLID186). Горизонтальна оболонка підкріплюється ребрами жорсткості та діафрагмою. Нижню частину ложементів зафіксовано. Між оболонкою та опорами моделюється контактна взаємодія. У зоні контакту з ложементами використовується покращена сітка. Для моделювання ребер жорсткості використовуються нелінійні балочні елементи з трьома вузлами, які базуються на теорії балки Тимошенка. Розрахунок форм і частот власних коливань проводиться з використанням методу скінченних елементів. Із граничних умов при розрахунку власних частот додатково введено умову нерозриву контакту. Із розрахунків модальних коефіцієнтів участі впливає важливість першої форми при дослідженні динамічних впливів на конструкцію в напрямку осі Y. Ця ж форма є крутильною відносно вертикальної осі Z, що свідчить про можливість виникнення резонансних явищ при сейсмічних впливах. При аналізі конструкції з енергетичної точки зору в стрижневих елементах конструкції виявлено зони надлишкової концентрації питомої енергії деформації: такі елементи потребують певного посилення для уникнення резонансних збуджень. Зазначено, що при аналізі навантажень вибухової природи пошкодження конструкції залежать від того, як швидко вона реагує на дію вибухової хвилі. Невеликі, жорсткі конструкції реагують набагато швидше, ніж великі. Якщо тривалість дії вибухової хвилі перевищує власний період коливань конструкції, то критичним фактором є саме надлишковий тиск; якщо тривалість дії вибухової хвилі мала у порівнянні з власним періодом коливань, то важливішим є імпульс. Динамічний аналіз впливу від заряду тринітрололулу масою 100 кг на горизонтальну оболонкову конструкцію з урахуванням першої власної частоти показав, що на відстані менше ніж 52.6 м цей вплив можна вважати короткотривалим, а дію навантаження можна замінити дією миттєвого імпульсу. На більшій відстані необхідно враховувати і дію імпульсу, і надлишковий тиск.

Ключові слова: оболонка, власна частота, скінченний елемент, питома енергія, імпульс, вибуховий вплив.

This article addresses the problem of modal analysis of a horizontal steel tank with a capacity of 50 m³ on concrete saddle supports. The structure is modeled as a cylindrical shell of length 8.15 m, radius 1.4 m, and wall thickness 5 mm. The geometric model of the tank is presented in a three-dimensional form. To model the horizontal shell, eight-node shell finite elements (SHELL281) are employed. The saddle supports are modeled using three-dimensional twenty-node second-order finite elements (SOLID186). The horizontal shell is reinforced with stiffening beams and a diaphragm. The bottom surfaces of the supports are fixed. Contact interaction between the shell and supports is modeled as well. We use a refined mesh in the contact zones. To model the stiffening beams, nonlinear three-node beam elements based on Timoshenko's beam theory are utilized. The natural frequencies and mode shapes are computed using the finite-element method. The boundary conditions considered in the modal analysis include the assumption of no contact loss. The calculated modal participation factors show that the first mode plays a dominant role in evaluating dynamic behavior of the structure in the Y-axis direction. This mode is also a torsional one about the vertical Z-axis, thus indicating the possibility of resonance effects under seismic loading. From an energy standpoint, beam elements of the diaphragm exhibit an excessive concentration of specific strain energy; such elements require some reinforcement to prevent resonance-induced excitations. Under blast loading, the extent of structural damage depends on the response rate of the structure to the blast wave. Small, stiff structures respond significantly faster than large ones. When the duration of the blast wave exceeds the natural vibration period of the structure, the critical factor is the overpressure. Conversely, if the blast wave duration is short compared to the natural period, the impulse becomes the dominant factor. A dynamic analysis of the impact of a 100 kg TNT charge on the horizontal shell structure with account for the first natural frequency showed that at distances less than 52.6 m, the blast loading can be considered short and substituted with an instantaneous impulse. At larger distances, however, both the impulse action and the overpressure must be taken into account.

Keywords: shell, natural frequency, finite element, specific strain energy density, impulse, blast loading.

© О. С. Кучеренко, В. А. Блажко, 2026

The article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attributions (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

ISSN 1561-9184 (Print) ISSN 2616-6380 (Online)

Технічна механіка. 2026. № 1.

Вступ. Тонкостінні оболонки – один із ключових класів інженерних конструкцій, що широко застосовуються в енергетичній, авіакосмічній та військовій техніці завдяки їхнім механічним характеристикам і експлуатаційним властивостям. Конструктивні елементи у вигляді криволінійних поверхонь – сферичних, циліндричних або ж більш складних – масово використовуються у сучасних багатофункціональних технічних системах. Проте через свою чутливість до певних програм навантажень оболонки виявляють складні поведінкові особливості, що вимагає відповідного аналізу, зокрема в контексті дослідження їхніх динамічних характеристик, визначення яких є важливим для оцінки стійкості конструкції, уникнення резонансних процесів, проєктування систем адаптивного демпфування тощо [1, 2]. При застосуванні новітніх матеріалів (наприклад, з функціонально-градієнтними властивостями) динамічне моделювання [3, 4] дозволяє оцінити вплив просторово-змінних параметрів на механічні властивості конструкції.

Одним із аспектів динамічного аналізу оболонкових конструкцій є визначення спектра власних частот – характеристичних величин, які відображають коливальні режими системи за відсутності зовнішніх збурень. Ці частоти визначаються геометричними та фізичними параметрами системи – розподілом маси, граничними умовами, а також механічними характеристиками матеріалу. У контексті теорії коливань підкріплених тонкостінних оболонок модальний аналіз зазвичай пов’язується із розв’язанням відповідних диференціальних рівнянь, які описують вільні або вимушені коливання механічної системи. Для їхнього аналітичного визначення застосовується диференціальне рівняння коливань ребра жорсткості з приєднаною до нього оболонкою:

$$DL_1 w(\varphi, t) = L_2 [p(\varphi, t) - m\dot{w}(\varphi, t)] + \tau(\varphi) - m\ddot{w}(\varphi, t), \quad (1)$$

де $D=EI/R^4$ – згинальна жорсткість ребра жорсткості; $w(\varphi, t)$ – згинальні переміщення ребра жорсткості; v – тангенціальне переміщення точки серединної лінії ребра з координатою φ ; m – погонна маса; p – радіальне навантаження; τ – тангенціальне навантаження; t – час; L_1, L_2 – диференціальні оператори,

причому $L_1 = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right)^2$, $L_2 = \frac{d}{d\varphi}$. Рівняння одержано з диферен-

ціального рівняння вигину з урахуванням інерційних навантажень.

Загальний розв’язок (1) для коливань ребра жорсткості для конструкції на пружній основі у випадку симетричного спірання та симетричних форм коливань щодо вертикальної осі ребра жорсткості має такий вигляд:

$$w(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n} \cos B_n t + A_{2n} \sin B_n t) \cos n\varphi, \quad (2)$$

де B_n – власна частота коливань для n -ої гармоніки, а постійні A_{1n}, A_{2n} визначаються з початкових умов. Якщо задати початкові умови у вигляді

$$\begin{aligned} w(\varphi, t) \Big|_{t=0} &= f_1(\varphi) \\ \dot{w}(\varphi, t) \Big|_{t=0} &= f_2(\varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

то отримаємо

$$A_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi$$

$$A_{1n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$

$$A_{2n} = \frac{1}{\pi B_n} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$
(4)

Для приблизного обчислення власних частот застосовують метод Релея [5], в основі якого лежить принцип збереження енергії: енергія системи, що коливається вільно, залишається постійною, якщо у системі відсутні дисипативні сили. Зауважимо, що метод Релея дає дещо завищені частоти коливань, тому часто застосовують формулу Донкерлі, яка надає більш коректні значення. Також застосовується метод Релея–Рітца [6], який базується на варіаційному принципі Гамільтона–Остроградського. Однак для багатовимірних задач зі складною геометрією при врахуванні реальних умов експлуатації і комбінацій навантажень застосовуються здебільшого числові методи, зокрема метод скінченних елементів [7, 8]. Останній при виконанні модального аналізу базується на такому співвідношенні:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\},$$
(5)

де M – матриця мас, K – матриця жорсткості, u – вектор переміщень.

1. Постановка задачі. У статті розглядається скінченно-елементна модель горизонтального сталевго резервуара місткістю 50 м^3 , який спирається на дві сідлові опори. Чисельно розв’язується задача визначення спектра власних частот конструкції. Також розв’язується споріднена задача про визначення питомої енергії деформації її елементів, що дає змогу запропонувати посилення певних частин конструкції. Аналізується поведінка конструкції при ударному впливі.

Задача розглядається у тривимірній постановці. Для моделювання оболонки застосовуються оболонкові елементи з вісьмома вузлами (SHELL281), які базуються на теорії Міндліна–Рейснера для розрахунку тонких і помірно товстих пластин та оболонок. Для побудови сідлових опор використовуються тривимірні двадцятивузлові скінченні елементи другого порядку (SOLID186). Зона контакту “оболонка–ложемент” моделюється із застосуванням контактних елементів з вісьмома вузлами (CONTA174 та TARGE170) (рис. 1).

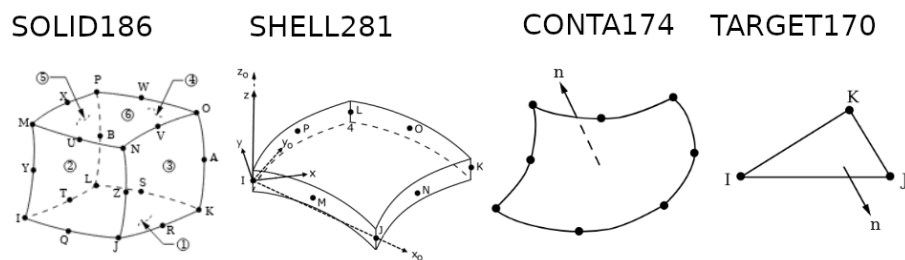


Рис. 1 – Геометрія скінченних елементів

2. Скінченно-елементна модель оболонкової конструкції. В даному випадку геометрична модель оболонки [9] має циліндричну стінку, дніща та спирається на дві сідлові опори (рис. 2), кожна з яких завширшки $a_1 = 0.45$ м. Опори виготовлені з бетону густиною 2300 кг/м^3 , модуль Юнга якого дорівнює $3 \cdot 10^{10}$ Па. Відстань від опори до краю резервуара $l_1 = 1.46$ м. Довжина циліндричної частини оболонки дорівнює $l = 8.15$ м, а радіус $R = 1.40$ м. Товщина стінки становить $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м. Використовується конструкційна сталь з модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, границею плинності $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$.

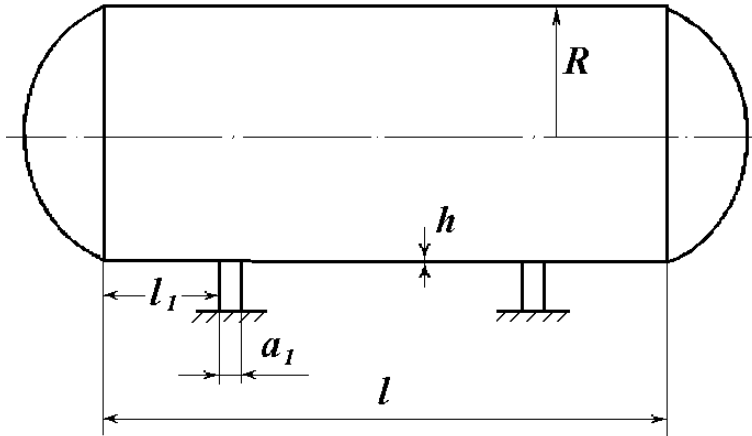


Рис. 2 – Геометрична схема горизонтальної оболонкової конструкції

Горизонтальна оболонка підкріплюється такими конструктивними елементами:

1) ребра жорсткості у вигляді нерівнобічного кутника $90 \text{ мм} \times 56 \text{ мм} \times 6 \text{ мм}$ з площею перерізу 8.54 см^2 , моментами інерції $I_x = 70.58 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $I_y = 21.22 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ та моментами опору $W_x = 11.66 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $W_y = 4.91 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;

2) діафрагма у вигляді нерівнобічного кутника $100 \text{ мм} \times 63 \text{ мм} \times 6 \text{ мм}$ з площею перерізу 9.58 см^2 , моментами інерції $I_x = 98.29 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $I_y = 30.58 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ та моментами опору $W_x = 14.52 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $W_y = 5.27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Нижня частина бетонних опор зафіксована. Між горизонтальною оболонкою та опорами моделюється контакт з коефіцієнтом тертя сталь–бетон 0.55 [10].

На рис. 3 наведено скінченно-елементну модель конструкції. У правій частині рисунка окремо зображено ребра жорсткості, діафрагма і опори. У зоні контакту з ложементами використовується покращена сітка розбиття. Для моделювання ребер жорсткості використовуються нелінійні балочні елементи з трьома вузлами, які базуються на теорії балки Тимошенка [11].

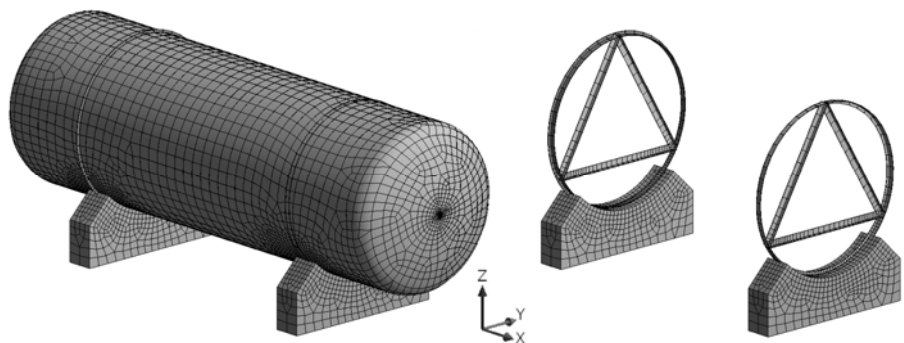


Рис. 3 – Тривимірна скінченно-елементна модель конструкції

3. Результати моделювання. Розрахунок форм і частот власних коливань проводиться з використанням методу скінченних елементів. Із граничних умов при розрахунку власних частот введено обмеження на переміщення нижньої частини сідлових опор і умову нерозриву контакту. На рис. 4 наведено деякі форми власних частот.

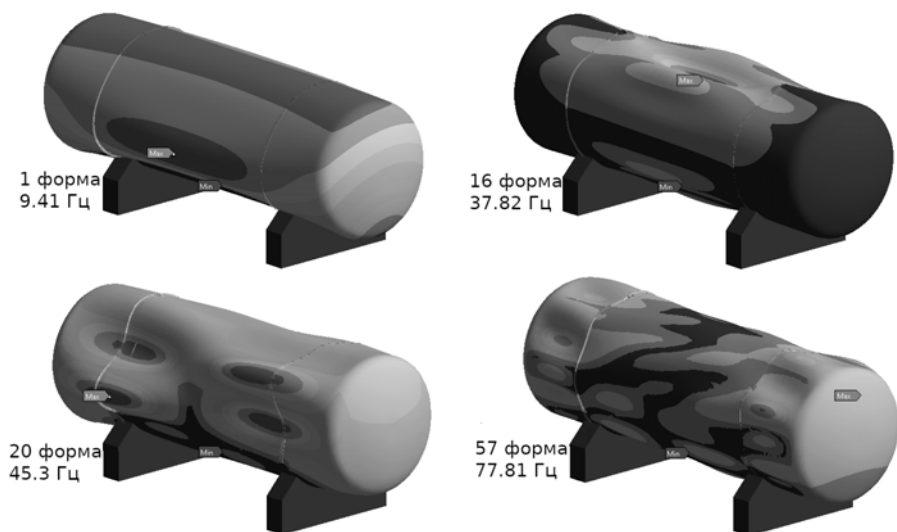


Рис. 4 – Форми коливань і власні частоти оболонкової конструкції

У таблиці 1 наведено власні частоти з найбільшими модальними коефіцієнтами участі (participation factors). З неї впливає важливість першої форми при дослідженні динамічних впливів на конструкцію в напрямку осі Y. Перша форма є зокрема і крутильною відносно вертикальної осі Z, що свідчить про можливість виникнення резонансних явищ при сейсмічних впливах [12].

Таблиця 1 – Модальні коефіцієнти участі

Форма	Частота, Гц	X	Y	Z	Rot X	Rot Y	Rot Z
1	9.41	0.145	-45.416	0.010	47.239	-0.027	-61.028
16	37.82	-0.279	0.018	-21.735	0	29.338	0
20	45.30	-22.463	-0.014	-0.240	-0.102	-109.38	0.939
57	77.81	0.177	-0.024	0.181	-1.089	-0.921	-58.437

4. Питома енергія деформації. На рис. 5 наведено розподіли питомої енергії деформації по стрижневих елементах конструкції.

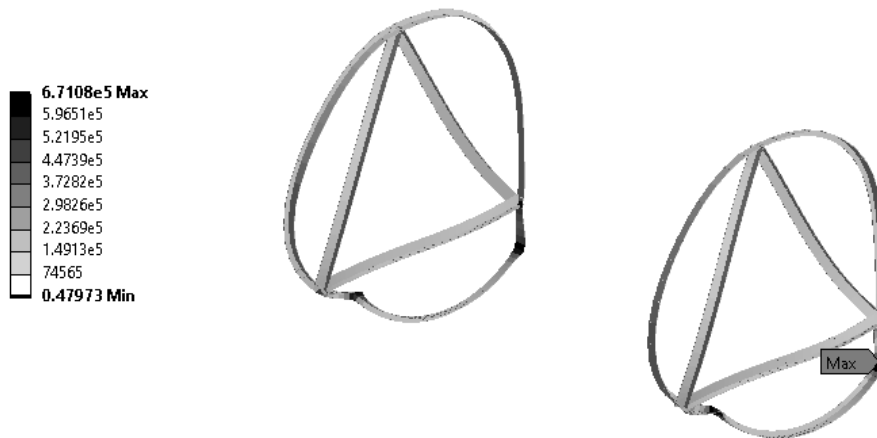


Рис. 5 – Розподіл питомої енергії деформації по елементах конструкції

Зазначена величина не повинна перевищувати значення

$$U_r = \frac{\sigma_y^2}{2E}, \quad (6)$$

де σ_y – границя плинності, E – модуль Юнга. Для конструкції, що розглядається, $U_r = 156250$ Дж/м³. Отже, в кільцевих ребрах жорсткості конструкції є зони надлишкової концентрації питомої енергії деформації, і такі елементи потребують певного посилення.

5. Імпульсний вплив від вибухової хвилі. При аналізі навантажень вибухової природи загалом виділяють два фактори – надлишковий (амплітудний) тиск і імпульс. Перший вражаючий фактор визначає умовно статичний максимальний тиск, що спричиняє деформацію і руйнування елементів конструкції. Другий фактор пов'язаний з впливом вибухової хвилі на об'єкти, руйнування яких залежить також від часу, впродовж якого діє навантаження, і показує, як довго і з якою силою діє вибухова хвиля. Пошкодження конструкції залежить від того, як швидко вона реагує на дію вибухової хвилі. Невеликі, жорсткі конструкції реагують набагато швидше, ніж великі [13]. Якщо тривалість дії вибухової хвилі перевищує власний період коливань конструкції, то критичним фактором є саме надлишковий тиск. Якщо ж тривалість дії вибухової хвилі мала у порівнянні з власним періодом коливань, то важливішим є імпульс (рис. 6).

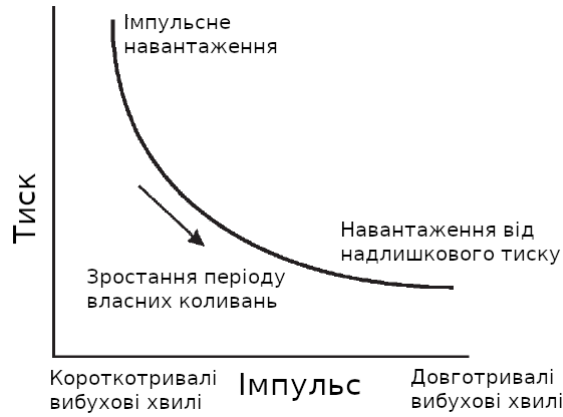


Рис. 6 – Діаграма тиск–імпульс для вибухової хвилі

Така емпірична формула визначає час дії навантаження (в секундах) від вибухової хвилі [14]:

$$t_1 = 0.0017 \cdot r^{\frac{1}{2}} \cdot W^{\frac{1}{6}}, \quad (7)$$

де r – відстань від центра вибуху до об'єкта у метрах, W – маса заряду тринітротолуолу у кілограмах. При аналізі динаміки споруд [15] використовується таке правило:

- 1) при тривалих впливах, якщо $t_1 / T > 1$, де T – період власних коливань конструкції, за навантаження приймають надлишковий тиск;
- 2) при короткотривалих впливах, якщо $t_1 / T < 0.25$, дію навантаження можна замінити дією миттєвого імпульсу [16].
- 3) в інших випадках враховують обидва фактора.

Розглянемо вплив заряду тринітротолуолу масою 100 кг на горизонтальну оболонкову конструкцію з урахуванням першої власної частоти у напрямку осі X та обчислимо період власних коливань:

$$T = 1 / 9.41 = 0.106 \text{ с.} \quad (8)$$

На рис. 7 наведено залежність t_1/T від відстані до епіцентру вибуху з урахуванням (7). Отже, на відстані менше ніж 52.6 м, можна вважати, що вплив є короткотривалим, і дію навантаження можна замінити дією миттєвого імпульсу. На більшій відстані необхідно враховувати і дію імпульсу, і надлишковий тиск.

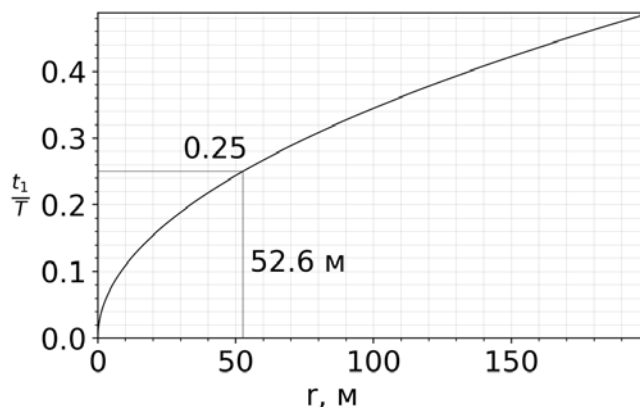


Рис. 7 – Залежність t_1/T від відстані до епіцентру вибуху

Висновки.

1. Результати модального аналізу горизонтального сталевго резервуара об'ємом 50 м³ вказують на важливість першої форми власних коливань при дослідженні динамічних впливів на конструкцію в напрямку осі Y і навколо осі Z.
2. В стрижневих елементах конструкції (ребра жорсткості) виявлено зони надлишкової концентрації питомої енергії деформації. Такі стрижні потребують посилення.
3. При аналізі вибухового впливу від заряду масою 100 кг на конструкцію у напрямку осі X можна вважати, що на відстані менше ніж 52.6 м вплив є короткотривалим, і вибухове навантаження можна замінити дією миттєвого імпульсу.

1. Dong X., Lian J., Wang H., Yu T., Zhao Y. Structural vibration monitoring and operational modal analysis of offshore wind turbine structure. *Ocean Engineering*. 2018. Vol. 150. P. 280–297. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.12.052>
2. Balageas D., Fritzen C.-P., Güemes A. *Structural Health Monitoring*. John Wiley & Sons. 2010. 496 p.
3. Jana K., Pal S., Haldar S. Modal analysis of power law functionally graded material plates with rectangular cutouts. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2023. V. 52(5). P. 2411–2439. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2180033>
4. Ramu I., Mohanty S.C. Modal Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Finite Element Method. *Procedia Materials Science*. 2014. V. 6. P. 460–467. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.059>
5. Inaudi J.A. Rayleigh Quotient Algorithm for Modal Analysis of Structural Models. *Mecánica Computacional*. 2016. V. 34. P. 1459–1477.
6. Si X.H., Lu W.X., Chu F.L. Modal analysis of circular plates with radial side cracks and in contact with water on one side based on the Rayleigh–Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. V. 331(1). P. 231–251. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.026>
7. Chapelle D., Bathe K. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Heidelberg: Springer-Verlag. 2011. 410 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-16408-8>
8. Krivenko O.P., Vorona Yu.V., Kozak A.A. Finite element analysis of nonlinear deformation, stability and vibrations of elastic thin-walled structures. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2021. Iss. 107. P. 20–34. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.20-34>
9. Кучеренко О. С., Блажек В. А. Верифікація скінченно-елементної моделі контакту горизонтальної оболонкової структури з ложементом. *Технічна механіка*. 2025. №2. С. 6371. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1985\)111:3\(505\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:3(505))
10. Rabbat B. G., Russell H. G. Friction Coefficient of Steel on Concrete or Grout. *Journal of Structural Engineering*. 1985. V. 111. Iss. 3. P. 505–515.
11. Hauck B., Szekrenyes A. Enhanced beam and plate finite elements with shear stress continuity for compressible sandwich structures. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2024. V. 29(7). P. 1325–1363. <https://doi.org/10.1177/10812865231221992>
12. Birbraer A. N. *Seismic analysis of structures*. St. Petersburg: Nauka. 1998. 255 p.
13. Crowl D. A. *Understanding explosions*. New-York: American Institute of Chemical Engineers. 2003. 214 p. <https://doi.org/10.1002/9780470925287>
14. Кобієв В. Г. Особливості деформування та визначення специфіки впливу зовнішніх факторів на оболонкові системи при імпульсних діях великої потужності. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2006. № 78. P. 82–89.
15. Clough R. W., Penzien J. *Dynamics of structures*. New-York: McGraw-Hill Book Company. 1975. 320 p.
16. Вороб'єв Ю. С., Колодяжний А. В., Севрюков В. И., Янютин Е. Г. *Скоростное деформирование элементов конструкций*. Киев: Наук. думка. 1989. 192 с.

Стаття надійшла до редакції 11.02.2026;
прийнято до друку після рецензування 16.03.2026;
дата публікації 31.03.2026.