

## АНАЛІЗ АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ КВАЗІКРИСТАЛА З ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,  
просп. Науки, 72, 49045, Дніпро, Україна; e-mail:alex.kl87@i.ua

Досліджено антиплоску зсувну деформацію (Mode III) лінійного гексагонального квазікристала з ізольованою тріщиною за умов дії віддалених рівномірних навантажень з урахуванням фононно-фазонного зв'язку та поверхневих ефектів у межах моделі поверхневої пружності Гуртина–Мердока. Береги тріщини змодельовано як пружні мембрани з власними поверхневими фононними, фазонними та зв'язуючими константами, що дозволяє адекватно описати розмірні ефекти на нано- та субмікронному масштабах.

На основі рівнянь теорії пружності квазікристалів з урахуванням фононного та фазонного полів побудовано математичну модель задачі. Граничні умови на берегах тріщини, модифіковані поверхневою енергією, приводять до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром типу Коші. Для їх розв'язання застосовано метод колокацій із використанням поліномів Чебишева, що забезпечує високу точність та добру збіжність чисельної процедури.

Проведений чисельний аналіз для одновимірної гексагонального квазікристала показав, що врахування поверхневої пружності істотно змінює характер напружено-деформованого стану поблизу вершини тріщини. На відміну від класичної механіки руйнування, де реалізується коренева сингулярність напружень, у запропонованій моделі напруження та деформації залишаються скінченними. Поверхнева пружність відіграє роль регуляризуючого механізму, який «згладжує» сингулярність та формує розмірну залежність розв'язку.

Показано, що зі збільшенням довжини тріщини зростають значення напружень у її вершині та в близькому околі, тоді як нормоване розкриття берегів змінюється несуттєво. Для малих тріщин поверхневі ефекти є домінуючими, а зі збільшенням розміру дефекту поведінка поступово наближається до класичної, проте повністю з нею не збігається.

Результати можуть бути використані для оцінювання міцності та тріщиностійкості квазікристалічних матеріалів із урахуванням нанорозмірних ефектів. Отримані результати є важливими для розвитку сучасної технічної механіки, зокрема механіки руйнування та механіки наноструктурованих матеріалів, оскільки вони розширюють класичні підходи з урахуванням поверхневих і розмірних ефектів та сприяють підвищенню достовірності прогнозування міцності елементів конструкцій.

**Ключові слова:** напруження, квазікристал, тріщина, антиплоска деформація, фононно-фазонний зв'язок, поверхнева пружність, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння.

The antiplane shear deformation (Mode III) of a linear hexagonal quasicrystal containing an isolated crack under remote uniform loading is investigated taking into account phonon–phason coupling and surface effects within the framework of the Gurtin–Murdoch surface elasticity model. The crack faces are modeled as elastic membranes possessing surface phonon, phason, and coupling constants of their own, which makes it possible to adequately describe size effects at the nano- and submicron scales.

Based on the equations of quasicrystal elasticity theory incorporating both phonon and phason fields, a mathematical model of the problem is developed. The boundary conditions on the crack faces, modified by surface energy, lead to a system of singular integro-differential equations with a Cauchy-type kernel. To solve this system, the collocation method with Chebyshev polynomials is applied, thus ensuring a high accuracy and good convergence of the numerical procedure.

The numerical analysis performed for a one-dimensional hexagonal quasicrystal shows that accounting for surface elasticity significantly alters the stress and strain field near the crack tip. In contrast to classical fracture mechanics, where a square-root stress singularity occurs, the proposed model predicts finite stresses and strains. Surface elasticity acts as a regularizing mechanism that “smooths” the singularity and introduces a size-dependent response.

It is shown that as the crack length increases, the stresses at the crack tip and in its vicinity increase, while the normalized crack opening displacement changes only slightly. For small cracks, surface effects are dominant, whereas with increasing defect size the behavior gradually approaches the classical solution, although it does not coincide with it completely.

The results can be used to assess the strength and fracture toughness of quasicrystalline materials taking into account nanoscale effects. The obtained results are important for the advancement of modern engineering mechanics, particularly fracture mechanics and the mechanics of nanostructured materials, as they extend classical approaches by incorporating surface and size-dependent effects and contribute to improving the reliability of strength predictions for structural components.

**Keywords:** stress, quasicrystal, crack, antiplane deformation, phonon–phason coupling, surface elasticity, singular integro-differential equations.

© О. М. Клєцков, В. В. Лобода, 2026

The article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attributions (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

ISSN 1561-9184 (Print) ISSN 2616-6380 (Online)

Технічна механіка. 2026. № 1.

**Вступ.** Поверхневі ефекти суттєво впливають на напружено-деформований стан тріщин nano- та субмікронних розмірів. Найвідоміша континуальна модель поверхневої пружності була запропонована в роботі [1]. На відміну від класичної моделі механіки руйнування на нанорівні реальні тріщини мають скінченний радіус закруглення, а поверхневі ефекти призводять до усунення сингулярності, роблячи поля напружень скінченними, що підтверджено в роботах [2, 3].

Модель [1] була узагальнена для криволінійних інтерфейсів між матеріалами в роботі [4], а просте геометричне пояснення моделі та уточнення її різних версій наведено в [5]. Ці підходи стали основою для аналізу нанорозмірних дефектів і тріщин, де поверхневі ефекти домінують [6]. Для тріщин типу III в однорідних матеріалах поверхнева пружність досліджувалася в [2], де показано повне усунення сингулярності та скінченні значення напружень біля вершини. У п'єзоелектричних матеріалах поверхнева п'єзоелектрика та діелектрика розширюють модель, враховуючи електричні поля на поверхні [3, 7 – 9]. Зокрема, у роботі [3] поверхневі ефекти враховані для гексагонального п'єзоелектрика з прямолінійною тріщиною.

Аналогічні підходи застосовуються до квазікристалів, де фононно-фазонна взаємодія відіграє роль, подібну до електромеханічної в п'єзоелектриках [10]. Зокрема, поверхневі ефекти для тріщин, що відходять від нанотворів у п'єзоелектричних квазікристалах, враховувались в роботах [11 – 13].

Незважаючи на важливість вивчення проблеми nano-тріщин в квазікристалах, це питання ще залишається недостатньо дослідженим. Для часткового усунення цього недоліку у даній роботі враховується вплив поверхневих ефектів на берегах тріщини типу III в квазікристалічних матеріалах, проводиться аналіз системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, а також пропонується чисельний алгоритм її розв'язання з урахуванням поверхневих фононних та фазонних полів.

**Основні рівняння.** Поверхневі напруження у квазікристалах пов'язані з поверхневою енергією  $\Gamma$ , що залежить від деформації:

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^s}, \quad H_{3\alpha}^s = -\frac{\partial \Gamma}{\partial w_{\alpha\beta}^s}, \quad (1)$$

де  $\sigma_{\alpha\beta}^s$  – поверхневий фононний тензор напружень,  $H_{3\alpha}^s$  – поверхневий фазонний тензор напружень,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s$  – поверхневий фононний тензор деформації,  $w_{\alpha\beta}^s$  – поверхневий фазонний тензор деформації.

У моделі поверхневої пружності Гуртина–Мердока вважається, що поверхнева енергія набуває такого вигляду [3]:

$$\Gamma = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\omega\rho}^s \varepsilon_{\alpha\beta}^s \varepsilon_{\omega\rho}^s - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta\omega\rho}^s w_{\alpha\beta}^s w_{\omega\rho}^s - R_{\alpha\beta\omega\rho} w_{\alpha\beta}^s \varepsilon_{\omega\rho}^s, \quad (2)$$

де  $C_{\alpha\beta\omega\rho}^s$  – поверхневий тензор пружності,  $R_{\alpha\beta\omega\rho}$  – поверхневий тензор фононно-фазонного зв'язку,  $K_{\alpha\beta\omega\rho}^s$  – поверхневий фазонний модуль.

Підставивши (1) до (2) маємо такий вираз для поверхневих напружень

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = C_{\alpha\beta\omega\rho}^s \mathcal{E}_{\omega\rho}^s + R_{\alpha\beta\omega\rho} w_{\omega\rho}^s, \quad H_{3\alpha}^s = K_{\alpha\beta\omega\rho}^s w_{\omega\rho}^s + R_{\alpha\beta\omega\rho} \mathcal{E}_{\omega\rho}^s. \quad (3)$$

Умови рівноваги на поверхні для квазікристала, можна виразити як:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^s e_\alpha + [\sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i] = 0, \quad (4a)$$

$$k_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^s = [\sigma_{ij} n_i n_j], \quad (4б)$$

$$[H_{3j} n_j] + H_{3\alpha,\alpha}^s = 0, \quad (4в)$$

де  $\mathbf{e}_i$  – базисні вектори;  $n_j$  – компоненти одиничної нормалі до поверхні;  $k_{\alpha\beta}$  – компоненти тензора кривизни «мембрани»;  $[f]$  – стрибок функції  $f$  при переході через поверхневий шар, кома перед нижнім індексом означає диференціювання по відповідній координаті.

Формули (4) описують умови рівноваги на поверхні у моделі поверхневої пружності Гуртина–Мердока. При цьому (4в) аналогічна відповідній формулі [3], де розглядалась антиплоска задача для тріщини у п'єзоелектричному матеріалі. Це пояснюється тим, що фазонне поле для квазікристала грає роль, подібну до електричного поля в п'єзоелектриках.

Згідно [10] для антиплоского випадку фазон-фононний зв'язок описується за допомогою таких рівнянь:

$$\sigma_{31} = c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + R_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \quad \sigma_{32} = c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + R_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \text{фононні напруження,}$$

$$H_{31} = R_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \quad H_{32} = R_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \text{фазонні напруження,} \quad (6)$$

де  $C_{44}$  – фононний зсувний модуль у гексагональних кристалах,  $R_3$  – коефіцієнт фонон-фазонного зв'язку,  $K_2$  – фазонний пружний модуль,

$w_{31} = \frac{\partial w_3}{\partial x_1}$ ,  $w_{32} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2}$  – фазонні деформації,  $w_3$  – фазонне переміщення.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0. \quad (7)$$

Розглянемо антиплоску деформацію квазікристала з квазіперіодичною віссю вздовж осі  $x_3$ , загальний розв'язок якої задається як:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \text{Im}[\mathbf{h}(z)] = \text{Im} \begin{bmatrix} h_1(z) \\ h_2(z) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де  $\mathbf{h}(z)$  – двовимірна аналітична вектор-функція комплексної змінної,  $z = x_1 + ix_2$ . На основі (5), (6) вирази для напружень можна записати так:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{32} + i\sigma_{31} \\ H_{32} + iH_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{Ch}'(z) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} h'_1(z) \\ h'_2(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В розгорнутому вигляді ці рівняння такі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{32} + i\sigma_{31} \\ H_{32} + iH_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_1(z) \\ h'_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44}h'_1(z) + R_3h'_2(z) \\ R_3h'_1(z) + K_2h'_2(z) \end{bmatrix}.$$

З рівнянь (9) отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{32} &= c_{44} \operatorname{Re} h'_1(z) + R_3 \operatorname{Re} h'_2(z), \\ H_{32} &= R_3 \operatorname{Re} h'_1(z) + K_2 \operatorname{Re} h'_2(z). \end{aligned} \quad (10)$$

**Тріщина з урахуванням поверхневої пружності.** Розглянемо антиплоску зсувну деформацію квазікристала, що містить тріщину  $-a \leq x_1 \leq a$ ,  $x_2 = 0$ , що піддається дії віддалених рівномірних антиплоских навантажень  $(\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty, H_{31}^\infty, H_{32}^\infty)$ . Поверхні тріщини вільні від зчеплення, тобто  $\sigma_{32} = H_{32} = 0$  на  $-a \leq x_1 \leq a$ ,  $x_2 = \pm 0$ . Нехай верхній та нижній береги тріщини позначені як сторони «+» та «-» тріщини відповідно.

Для когерентного інтерфейсу (стрибки деформацій нульові) умови на берегах:

$$\begin{aligned} H_{31,1}^s + (H_{32}^+) - (H_{32}^-) &= 0, \\ \sigma_{13,1}^s + (\sigma_{23}^+) - (\sigma_{23}^-) &= 0 \quad \text{на верхньому березі,} \\ H_{31,1}^s + (H_{32}^+) - (H_{32}^-) &= 0, \\ \sigma_{13,1}^s + (\sigma_{23}^+) - (\sigma_{23}^-) &= 0 \quad \text{на нижньому березі.} \end{aligned} \quad (11)$$

Приймаючи, що  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s = \varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $w_{31}^s = w_{31}$ , та застосовуючи (3) маємо

$$\begin{aligned} H_{13}^s &= R_3^s u_{3,1} + K_2^s w_{3,1}, \\ \sigma_{13}^s &= C_{44}^s u_{3,1} + R_3^s w_{3,1}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що поверхневі умови на верхньому та нижньому березі тріщини не залежать один від одного і застосовуючи (11), маємо такі вирази для поверхневих умов на берегах тріщини

$$\begin{aligned} H_{23}^+ &= -R_3^s u_{3,11} - K_2^s w_{3,11}, \\ \sigma_{23}^+ &= -C_{44}^s u_{3,11} + R_3^s w_{3,11} \quad \text{на верхньому березі,} \\ H_{23}^- &= R_3^s u_{3,11} + K_2^s w_{3,11}, \\ \sigma_{23}^- &= C_{44}^s u_{3,11} - R_3^s w_{3,11} \quad \text{на нижньому березі.} \end{aligned}$$

Вищезазначені граничні умови можна еквівалентно виразити в такій матричній формі:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{23}^+ \\ H_{23}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{23}^- \\ H_{23}^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{44}^s & R_3^s \\ R_3^s & K_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,11}^+ \\ w_{3,11}^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{3,11}^- \\ w_{3,11}^- \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{23}^+ \\ H_{23}^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{23}^- \\ H_{23}^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{44}^s & R_3^s \\ R_3^s & K_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,11}^+ \\ w_{3,11}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{3,11}^- \\ w_{3,11}^- \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Враховуючи розподіл гвинтових дислокацій з густиною  $b_1(x_1)$  та QC-дислокацій з густиною  $b_2(x_1)$  для  $-a \leq x_1 \leq a$ , а також віддалене навантаження  $(\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty, H_{31}^\infty, H_{32}^\infty)$ , вектор аналітичної функції  $\mathbf{h}(z)$  можна представити з урахуванням рівняння (7) як:

$$\mathbf{h}(z) = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \int_{-a}^a b_1(\xi) \ln(z - \xi) d\xi \\ \int_{-a}^a b_2(\xi) \ln(z - \xi) d\xi \end{bmatrix} + \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{32}^\infty + i\sigma_{31}^\infty \\ H_{32}^\infty + iH_{31}^\infty \end{bmatrix} z.$$

Тоді маючи на увазі, що  $z = x_1 + ix_2$ , отримаємо для верхнього та нижнього берегів тріщини:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_+(x_1) &= \begin{bmatrix} -\frac{i}{2}b_1(x_1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_1(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi \\ -\frac{i}{2}b_2(x_1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi \end{bmatrix} + \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{32}^\infty + i\sigma_{31}^\infty \\ H_{32}^\infty + iH_{31}^\infty \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}'_-(x_1) &= \begin{bmatrix} \frac{i}{2}b_1(x_1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_1(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi \\ \frac{i}{2}b_2(x_1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi \end{bmatrix} + \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{32}^\infty + i\sigma_{31}^\infty \\ H_{32}^\infty + iH_{31}^\infty \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

На основі (13) знайдемо стрибок аналітичної вектор-функції  $\mathbf{h}(z)$  при переході через тріщину:

$$\mathbf{h}'_+(x_1) - \mathbf{h}'_-(x_1) = \begin{bmatrix} -ib_1(x_1) \\ -ib_2(x_1) \end{bmatrix}.$$

Тоді враховуючи, що на основі (8):

$$\begin{bmatrix} u'_3 \\ w'_3 \end{bmatrix} = \text{Im}[\mathbf{h}'(z)],$$

$$\text{отримаємо } \text{Im}[\mathbf{h}'_+(x_1) - \mathbf{h}'_-(x_1)] = \begin{bmatrix} u'_{3+} - u'_{3-} \\ w'_{3+} - w'_{3-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1(x_1) \\ -b_2(x_1) \end{bmatrix}.$$

Звідки витікають такі вирази для різниці переміщень берегів тріщини:

$$u_3^+ - u_3^- = -\int_{-a}^{x_1} b_1(\xi) d\xi \quad \text{та} \quad w_3^+ - w_3^- = -\int_{-a}^{x_1} b_2(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Далі підставляючи вирази (13) в (10) і використовуючи (12), маємо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{C_{44} b_1(\xi) + R_3 b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + 2\sigma_{32}^\infty = C_{44}^s (u_{3,11}^+ - u_{3,11}^-) + R_3^s (w_{3,11}^+ - w_{3,11}^-),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{R_3 b_1(\xi) + K_2 b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + 2H_{32}^\infty = R_3^s (u_{3,11}^+ - u_{3,11}^-) + K_2^s (w_{3,11}^+ - w_{3,11}^-).$$

З урахуванням (14) отримуємо таку систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{C_{44} b_1(\xi) + R_3 b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi - 2\sigma_{32}^\infty = C_{44}^s b_1'(x_1) + R_3^s b_2'(x_1),$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{R_3 b_1(\xi) + K_2 b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi - 2H_{32}^\infty = R_3^s b_1'(x_1) + K_2^s b_2'(x_1).$$

Додаткові умови для цієї системи мають вигляд

$$\int_{-a}^a b_1(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-a}^a b_2(\xi) d\xi = 0.$$

Переходячи за допомогою заміни  $x = x_1/a$  до проміжку  $[-1; 1]$ , одержуємо:

$$\int_{-1}^1 \frac{C_{44} b_1(t) + R_3 b_2(t)}{t - x} dt + \pi \frac{C_{44}^s b_1'(x)}{a} + \pi \frac{R_3^s b_2'(x)}{a} = -2\pi\sigma_{32}^\infty,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{R_3 b_1(t) + K_2 b_2(t)}{t - x} dt + \pi \frac{R_3^s b_1'(x)}{a} + \pi \frac{K_2^s b_2'(x)}{a} = -2\pi H_{32}^\infty.$$

Застосуємо для приведення рівнянь до більш зручного вигляду такий оператор, що витікає із розв'язків характеристичного СІР з ядром типу Коші в різних класах функцій [14]:

$$T_{2nd}^{-1} \psi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \psi(t) dt - \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \psi(t)}{(t-x)} dt.$$

В результаті отримуємо

$$C_{44} b_1(x) + R_3 b_2(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 (C_{44} b_1(t) + R_3 b_2(t)) dt -$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (C_{44}^s b_1'(x)/a + R_3^s b_2'(x)/a + 2\sigma_{32}^\infty)}{t-x} dt, \quad (15)$$

$$R_3 b_1(x) + K_2 b_2(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 (R_3 b_1(t) + K_2 b_2(t)) dt -$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (R_3^s b_1'(x)/a + K_2^s b_2'(x)/a + 2H_{32}^\infty)}{t-x} dt.$$

Тоді, використовуючи умови однозначності переміщень берегів тріщини

$$\int_{-1}^1 b_1(t) = \int_{-1}^1 b_2(t) = 0 \quad (16)$$

і помноживши обидві частини (15) на  $\sqrt{1-x^2}$ , матимемо такі вирази:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} (C_{44} b_1(x) + R_3 b_2(x)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (C_{44}^s b_1'(x)/a + R_3^s b_2'(x)/a + 2\sigma_{32}^\infty)}{t-x} dt, \\ \sqrt{1-x^2} (R_3 b_1(x) + K_2 b_2(x)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (R_3^s b_1'(x)/a + K_2^s b_2'(x)/a + 2H_{32}^\infty)}{t-x} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Будемо розшуквати  $b_i(x)$  у вигляді:

$$b_i(x) = \sum_{m=0}^N c_{mi} T_m(x), \quad i=1,2 \quad (18)$$

де  $T_m(x)$  представляє собою поліном Чебишева  $m$ -го порядку першого роду.

Вибираючи точки колокації  $x_i = -\cos(\frac{i\pi}{N})$ ,  $i=1,2,\dots,N$  і враховуючи, що

$T_m(x_i) = (-1)^m \cos(\frac{mi\pi}{N})$ , систему (17) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^N \left[ (-1)^m \cos(\frac{mi\pi}{N}) \sqrt{1 - (\cos(\frac{i\pi}{N}))^2} [C_{44} c_{m1} + R_3 c_{m2}] \right] + \\ &+ \sum_{m=0}^N \left[ (-1)^m \frac{m}{a} \cos(\frac{mi\pi}{N}) (C_{44}^s c_{m1} + R_3^s c_{m2}) \right] = -2\sigma_{32}^\infty \cos(\frac{i\pi}{N}), \\ &\sum_{m=0}^N \left[ (-1)^m \cos(\frac{mi\pi}{N}) \sqrt{1 - (\cos(\frac{i\pi}{N}))^2} [R_3 c_{m1} + K_2 c_{m2}] \right] + \\ &+ \sum_{m=0}^N \left[ (-1)^m \frac{m}{a} \cos(\frac{mi\pi}{N}) (R_3^s c_{m1} + K_2^s c_{m2}) \right] = -2H_{32}^\infty \cos(\frac{i\pi}{N}). \end{aligned} \quad (19)$$

Із додаткових умов (16) отримуємо ще два рівняння

$$\sum_{m=0, m \neq 1}^N \left[ \frac{1+(-1)^m}{1-m^2} c_{m1} \right] = 0, \quad \sum_{m=0, m \neq 1}^N \left[ \frac{1+(-1)^m}{1-m^2} c_{m2} \right] = 0. \quad (20)$$

Співвідношення (19) і (20) складають систему  $2N$  лінійних алгебраїчних рівнянь з  $2N$  невідомими  $c_{m1}, c_{m2}$ . Її розв'язок знаходиться методом Гауса.

Розкриття тріщини будемо знаходити з рівнянь (14):

$$\Delta u_3 = u_3^+ - u_3^- \quad \text{та} \quad \Delta w_3 = w_3^+ - w_3^-. \quad (21)$$

Напруження на продовженні тріщини будемо розшукувати на основі (10). В результаті маємо

$$H_{32} = R_3 \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_1(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + K_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + H_{32}^\infty, \quad (22)$$

$$\sigma_{32} = C_{44} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_1(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + R_3 \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{b_2(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi + \sigma_{32}^\infty.$$

Функції  $b_1$  та  $b_2$  мають складну поведінку біля вершин тріщини. Враховуючи це, перший інтеграл із (22) задамо у вигляді:

$$I(x_1) = \int_{-a}^a \frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1} d\xi + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1} d\xi + \int_{a-\delta}^a \frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1} d\xi. \quad (23)$$

Припускаючи далі, що  $\delta \ll a$ , вважатимемо, що  $b_1(\xi) = b_1(-a + \delta/2)$  на  $[-a, -a + \delta]$  і  $b_1(\xi) = b_1(a - \delta/2)$  на  $[a - \delta, a]$ . Тоді, обчислюючи 1-й і 3-й інтеграли із (23) аналітично, одержуємо таку формулу

$$I(x_1) \approx \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1} d\xi + b_1\left(-a + \frac{\delta}{2}\right) \ln \left| \frac{a - \delta + x_1}{a + x_1} \right| +$$

$$+ b_1\left(a - \frac{\delta}{2}\right) \ln \left| \frac{a - x_1}{a - \delta - x_1} \right|. \quad (24)$$

Для обчислення першого інтеграла у формулі (23) при будь-якому  $\delta$  використовується формула Гауса. Аналогічним чином обчислюються і інші інтеграли у формулах (22).

**Чисельний аналіз.** Розглянемо одновимірний гексагональний квазікристал з такими матеріальними константами:

$$C_{44} = 50 \times 10^9 \text{ Н / м}^2, R_3 = 1,2 \times 10^9 \text{ Н / м}^2, K_2 = 0,3 \times 10^9 \text{ Н / м}^2.$$

Поверхневі константи виберемо такими [6]:

$$C_{44}^S = 62,5 \text{ Н/м}, R_3^S = 1,5 \text{ Н/м}, K_2^S = 1,5 \text{ Н/м}.$$

Віддалені фононні та фазонні навантаження приймемо рівними:  $\sigma_{yz}^\infty = 8 \text{ МПа}$ ,  $H_{yz}^\infty = 0$ .

В табл. 1 та на рис. 1 наведено залежність напруження у вершині та на продовженні тріщини від її розміру, який задавався в межах від 10 нм до 200 нм. Зокрема, в табл. 1 наведені значення напруження  $\sigma_{yz}(ax, 0)$  та  $H_{yz}(ax, 0)$  у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку. Аналіз показав, що при поступовому збільшенні кількості членів ( $N$ ) у розкладеннях (18) при сталому значенні  $n_{Gauss} = 30$  спостерігається стабілізація результатів по досягненню значення кількості членів  $N = 1000$ .

Подальше збільшення  $N$  показує, що результати вже практично не змінюються. Результати, наведені на наступних графіках, отримані при  $n_{Gauss} = 30$  і  $N = 1000$ .

Таблиця 1а – Значення напруження  $\delta_{yz} \cdot 10^9$ , Па у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

$a$ , нм	$N = 300$	$N = 500$	$N = 600$	$N = 700$	$N = 900$	$N = 1000$
10	1,09485	1,00831	1,08147	1,09159	1,05493	1,05155
20	1,18043	1,06936	1,03597	1,05143	1,11989	1,11462
100	1,12339	1,18900	1,19893	1,19798	1,15502	1,15922
200	1,12155	1,18588	1,20372	1,21534	1,22384	1,22223

Таблиця 1б – Значення напруження  $H_{yz} \cdot 10^7$ , Па у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

$a$ , нм	$N = 300$	$N = 500$	$N = 600$	$N = 700$	$N = 900$	$N = 1000$
10	2,66207	2,45452	2,63002	2,65431	2,47037	2,55729
20	2,92594	2,65968	2,57961	2,61669	2,78092	2,76826
100	3,26274	3,41934	3,44310	3,44083	3,34586	3,34801
200	3,85164	4,00436	4,04686	4,07460	4,09492	4,09107

З табл. 1 можна побачити, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність у вершинах нано-тріщини і дозволяє отримати скінченні значення напружень у цих вершинах.

Аналіз поведінки  $\sigma_{yz}(ax, 0)$  для  $x$  значно більших одиниці показує, що величини цього напруження на віддаленні від вершини тріщини збігаються до значення прикладеного віддаленого напруження. З рис. 2 видно, що напруження у вершині тріщини і в деякому okolí від її вершини зі збільшенням розміру тріщини зростає. На відміну від класичної моделі тріщини, напруження не прямують до нескінченності, а залишаються скінченними. Це є прямим наслідком урахування поверхневої пружності, яка «згладжує» сингулярність і відіграє роль додаткового механізму жорсткості на наномасштабі.

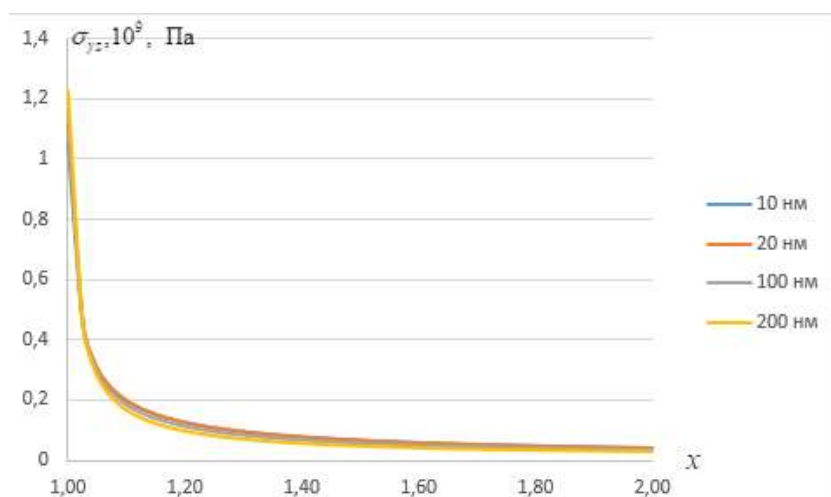


Рис. 1 – Розподіл напружень  $\sigma_{yz}(ax, 0)$  для різних значень довжини тріщини

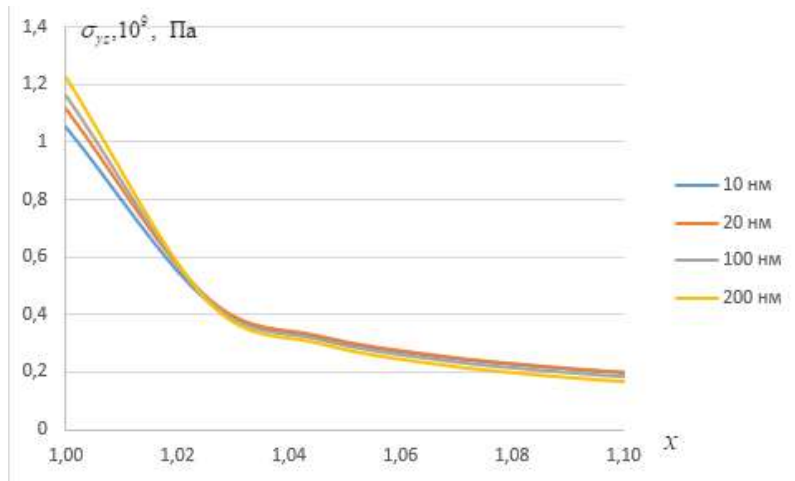


Рис. 2 – Розподіл напружень  $\sigma_{yz}(ax, 0)$  в околі вершини тріщини для різних значень її довжини

Рис. 3, побудований при тих же значеннях вхідних параметрів, що і рис. 1, показує, що зміна розмірів тріщини несуттєво впливає на її нормоване розкриття.

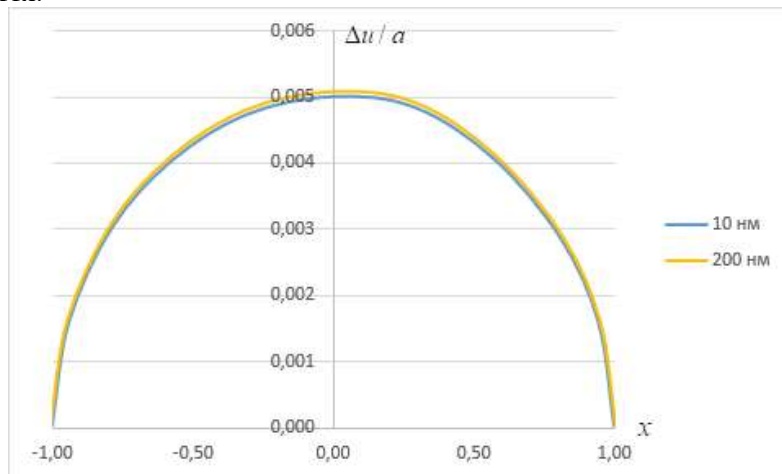


Рис. 3 – Залежність розкриття тріщини від зміни її розмірів

Із ростом довжини тріщини роль поверхневих ефектів зменшується, і поведінка розкриття поступово наближається до класичної, характерної для макроскопічної механіки руйнування.

**Висновки.** У роботі досліджено антиплоску зсувну деформацію лінійного квазікристала з ізольованою тріщиною за умов дії віддалених рівномірних антиплоских напружень з урахуванням фононно-фазонного зв'язку та поверхневих ефектів за моделлю Гуртина–Мердока. Врахування поверхневої пружності змінює сингулярну поведінку полів біля вершин тріщини: класична коренева сингулярність усувається, а напруження та деформації набувають скінченних значень.

Для нанорозмірних тріщин поверхневі ефекти стають домінуючими, вони суттєво впливають на розподіл напружень, деформацій і особливо на розкриття берегів тріщини, посилюючи розмірну залежність розв'язку.

Чисельний аналіз продемонстрував хорошу збіжність результатів і показав, що зі збільшенням довжини тріщини зростають значення напружень у вершині та в її близькому okolí. Виявлено також, що довжина тріщини на нано рівні несуттєво впливає на її нормоване розкриття, а поверхневі ефекти найбільш виражені саме для нано-тріщин.

Отримані результати підкреслюють необхідність врахування поверхневої пружності та фазонного поля при моделюванні механічної поведінки квазікристалів на нано- та субмікронному масштабах, особливо в задачах руйнування та оцінки тріщиностійкості.

Це дослідження частково фінансувалося Національним фондом досліджень України (грант за реєстраційним номером № 2025.07/0117).

1. Gurtin M. E., Murdoch A. A continuum theory of elastic material surfaces. Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V. 57. P. 291–323. <https://doi.org/10.1007/BF00261375>
2. Kim C. I., Schiavone P., Ru C. Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution. ASME J. Appl. Mech. 2010. V. 77. 021011. <https://doi.org/10.1115/1.3177000>
3. Wang X., Zhou K. A crack with surface effects in a piezoelectric material. Math. Mech. Solids. 2015. V. 20. P. 1131–1146.
4. Gurtin M. E., Weissmuller J., Larche F. A general theory of curved deformable interface in solids at equilibrium. Philos. Mag. A. 1998. V. 78. P. 1093–1109. <https://doi.org/10.1080/014186198253138>
5. Ru C. Q. Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions. Sci. China. 2010. V. 53. P. 536–544. <https://doi.org/10.1007/s11433-010-0144-8>
6. Chen T. Exact size-dependent connections between effective moduli of fibrous piezoelectric nanocomposites with interface effects. Acta Mechanica. 2008. V. 196 (3-4). P. 205–217. <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0477-1>
7. Huang G. Y., Yu S. W. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring. Phys. Stat. Solidi B. 2006. V. 243. P. R22–R24. <https://doi.org/10.1002/pssb.200541521>
8. Dai S., Gharbi M., Sharma P., Park H. S. Surface piezoelectricity: size effects in nanostructures and the emergence of piezoelectricity in non-piezoelectric materials. J. Appl. Phys. 2011. V. 110. 104305. <https://doi.org/10.1063/1.3660431>
9. Pan X., Yu S., Feng X. A continuum theory of surface piezoelectricity for nanodielectrics. Sci. China. 2011. V. 54. P. 564–573. <https://doi.org/10.1007/s11433-011-4275-3>
10. Fan T. Y. Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications. Beijing : Science Press, 2011. 363 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14643-5>
11. Zhao X. F., Ma Y. Y., Lu S. N. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular triangular nano-hole in one dimensional hexagonal quasicrystals. Science Technology and Engineering. 2023. V. 23 (7). P. 2727–2733.
12. Xin Y. Y., Xiao J. H. Fracture mechanics of an arbitrary position crack emanating from a nano-hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Acta Mechanica. 2023. V. 234 (4). P. 1409–1420. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03424-y>
13. Xin Y. Y., Xiao J. H. An analytic solution of an arbitrary location through-crack emanating from a nano-circular hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Mathematics and Mechanics of Solids. 2024. V. 29 (1). P. 71–82. <https://doi.org/10.1177/10812865231186341>
14. Chakrabarti A. Hamsapriye. Numerical solution of a singular integro-differential equation. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 79, No. 4. P. 233–241. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199904\)79:4<233::AID-ZAMM233>3.3.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<233::AID-ZAMM233>3.3.CO;2-Y)

Стаття надійшла до редакції 9.03.2026;  
прийнято до друку після рецензування 27.03.2026;  
дата публікації 31.03.2026.