

С. В. ТАРАСОВ, <https://orcid.org/0000-0002-9254-1503>
О. Н. МОЛОТКОВ, <https://orcid.org/0000-0002-8498-1269>

КЕРУВАННЯ ОБЕРТАННЯМ РОТОРА ДАР'Є СУМІСНИМИ ЗМІНАМИ ЙОГО КОНФІГУРАЦІЇ І ГАЛЬМІВНОГО МОМЕНТУ ГЕНЕРАТОРА

*Інститут транспортних систем і технологій
Національної академії наук України,
вул. Писаржевського, 5, Дніпро, 49005, Україна; e-mail: olegmolotkov57@gmail.com*

В останні десятиліття галузь "зеленої" енергетики стрімко розвивається. Зростання інтересу до вироблення "зеленої" енергії привело до різкого зростання кількості працюючих систем, серед яких значне місце займають вертикально-осьові вітроенергетичні установки (ВЕУ). Поряд із рядом переваг найбільш складними питаннями при використанні вертикально-осьових ВЕУ є забезпечення їх самостійного запуску та підвищення ефективності. Через обертання турбіни навколо вертикальної осі аеродинаміка турбіни більш складна, ніж у порівнянної горизонтально-осьової вітрової турбіни, і знання та розуміння цих турбін залишаються далекими від завершення. Запровадження будь-яких підходів до покращення властивостей ВЕУ в цілому потребує поглибленого вивчення та узгодження роботи її елементів для забезпечення сумісності роботи окремих складових. В роботі, що пропонується, розглядається система керування обертанням ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ, яка складається з трьох контурів керування – двох контурів змін довжини лопатей і траверс і контуру керування гальмівним моментом генератора на постійних магнітах. Використання генератора для керування обертанням ротора ВЕУ є традиційним засобом забезпечення малих відхилень швидкості обертання навколо точки максимальної потужності для поточної швидкості вітрового потоку. Застосування з цією метою синхронних генераторів на постійних магнітах, які мають ряд корисних властивостей, є достатньо новим напрямом будови систем керування. В роботі розглядаються особливості динаміки та управління швидкістю обертання ротора вертикально-осьових вітроустановок як об'єкта управління, що стабілізується одночасною зміною конфігурації ротора ВЕУ та гальмівного моменту генератора на постійних магнітах. Одночасне використання трьох каналів стабілізації сприяє більшій адаптації ротора турбіни до змін швидкості вітру, а значить суттєво зменшує навантаження на системи передачі енергії та вимоги до систем розсіяння надлишкової енергії, таких як систем екстреного гальмування, дозволяє знизити витрати енергії на протидію значним змінам швидкості вітру. Використання принципу адаптації для пришвидшення гальмування турбіни в аварійних ситуаціях представляється вельми корисним. В зв'язку із цим продовження попередніх робіт авторів, спрямоване на узагальнення та розповсюдження підходу до управління обертами ротора вертикально-осьових ВЕУ одночасною зміною конфігурації ротора і гальмівного моменту генератора на постійних магнітах стає задачею актуальною, такою що має значний практичний інтерес. Метою статті є синтез та аналіз ефективності алгоритмів стабілізації швидкості обертів ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ, керованих сумісною зміною конфігурації ротора і гальмівного моменту генератора на постійних магнітах. Методами вирішення задачі є методи класичної теорії автоматичного управління і математичного моделювання. Новизна отриманих результатів полягає в урахуванні керуючих впливів від змін конфігурації ротора та гальмівного моменту генератора на постійних магнітах, визначенні умов стійкості системи стабілізації, а також в розповсюдженні раніше розробленої методики перерозподілу навантаження на канали стабілізації для забезпечення умов їх працездатності. Запропоновані та проаналізовані алгоритми стабілізації та підхід до забезпечення умов працездатності можуть бути використані при проєктуванні перспективних вертикально-осьових ВЕУ різної потужності.

Ключові слова: вітроенергетичні установки, ротор Дар'є, стабілізація обертання, стійкість, працездатність, математичне моделювання.

In recent decades, the "green" power industry has been developing rapidly. The growing interest in generating "green" power has led to a sharp increase in the number of operating systems, among which vertical-axis wind turbines (WT) occupy a significant place. Along with a number of advantages, the most difficult issues when using vertical-axis WTs are ensuring their self-starting and increasing efficiency. Due to the rotation of the turbine about a vertical axis, the aerodynamics of the turbine is more complex than that of a comparable horizontal-axis wind turbine, and knowledge and understanding of these turbines remain far from complete. The introduction of any approaches to improving the properties of a WT as a whole requires an in-depth study and coordination of the operation of its elements to ensure the compatibility of the operation of individual components. The proposed work considers a system to control the rotation of the Darrieus rotor of vertical-axis wind turbines, which consists of three control loops: two loops for changing the length of the blades and traverses and a loop for controlling the braking torque of the permanent magnet generator. The use of a generator to control the rotation of the rotor of a wind turbine is a traditional means of ensuring small deviations in the rotation speed about the point of maximum power for the current wind flow speed. The use of permanent magnet synchronous generators for this purpose,

© С. В. Тарасов, О. Н. Молотков, 2026

The article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attributions (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

ISSN 1561-9184 (Print) ISSN2616 (Online)

Технічна механіка. 2026. № 1.

which have a number of useful properties, is quite a new line in the design of control systems. The work considers the features of the dynamics and control of the rotor rotation speed of vertical-axis wind turbines as a control object, which is stabilized by a simultaneous change in the configuration of the wind turbine rotor and the braking torque of the permanent magnet generator. The simultaneous use of the three stabilization channels contributes to a greater adaptation of the turbine rotor to changes in wind speed, thus significantly reducing the load on the power transmission systems and the requirements for excess power dissipation systems, such as emergency braking systems, and allowing one to reduce power consumption to counteract significant changes in wind speed. The use of the adaptation principle to speed up turbine braking in emergencies seems to be very useful. In this regard, a continuation of the authors' previous work aimed at generalizing and extending the approach to controlling the rotor speed of vertical-axis wind turbines by simultaneously changing the rotor configuration and the braking torque of the permanent magnet generator becomes an important task of significant practical interest. The goal of this article is to synthesize algorithms for stabilizing the speed of the Darier rotor of vertical-axis wind turbines controlled by a simultaneous change in the rotor configuration and the braking torque of the permanent magnet generator and analyze their effectiveness. The methods of solving the problem are methods of the classical theory of automatic control and mathematical simulation. The novelty of the obtained results lies in accounting for control actions produced by changes in the rotor configuration and the braking torque of the permanent magnet generator, determining the stability conditions of the stabilization system, and extending the authors' method of redistributing the load on the stabilization channels to ensure their operability. The proposed and analyzed stabilization algorithms and the approach to operability assurance may be used in the design of advanced vertical-axis wind turbines of various capacities.

Keywords: wind power plants, Darier rotor, rotation stabilization, stability, operability, mathematical simulation.

Вступ. В останні десятиліття галузь "зеленої" енергетики стрімко розвивається. Зростання інтересу до вироблення "зеленої" енергії привело до різкого зростання кількості працюючих систем, серед яких все більше місце займають вітрові електростанції. Сучасні вітроенергетичні установки (ВЕУ) – це складні системи, які складаються із значної кількості різноманітних елементів і можуть бути двох типів: вертикально- або горизонтально-осьовими із властивими для них перевагами та недоліками. Вертикальна осьова турбіна із Н-ротором Дар'є є одним із найперспективніших перетворювачів енергії вітру для місць, де спостерігаються швидкі зміни напрямку вітру, наприклад, у забудованому середовищі. У порівнянні з горизонтально-осьовими більшість моделей вертикально-осьових ВЕУ мають такі переваги:

- продуктивність не залежить від напрямку вітру, тому не потрібні спеціальні механізми для відстеження напрямку вітру;
- мають можливість генерувати енергію з косих вітрових потоків;
- мають меншу кількість компонентів та низький рівень шуму;
- лопаті можуть бути виготовлені методом серійної екструзії, оскільки вони часто бувають нескрученими і мають постійну хорду;
- мають можливість роботи ближче до землі з генератором, зазвичай встановленим на опорі, що спрощує та здешевлює обслуговування.

Поряд із цим найбільш складними питаннями при використанні вертикально-осьових ВЕУ є забезпечення їх самостійного запуску та підвищення ефективності. Через обертання турбіни навколо вертикальної осі аеродинаміка турбіни більш складна, ніж у порівнянної горизонтально-осьової вітрової турбіни, і знання та розуміння цих турбін залишаються далекими від завершення [1]. Значною мірою в зв'язку із цим конструкція окремих елементів постійно вдосконалюється з метою досягнення кращих властивостей як самих елементів, так і всієї системи в цілому. На сьогоднішній день вдосконалення відбувається за декількома напрямками, серед яких:

- вдосконалення аеродинаміки лопатей, а саме розробка, дослідження та використання нових аеродинамічних профілів, наприклад, j-подібних [2] або інших [3, 4], які надають ВЕУ властивість самостійного старту;

- оптимізація кута атаки та його зміни в залежності від положення лопаті на площині обертання [1, 5 – 7];
- вдосконалення системи керування обертанням ротора ВЕУ з використанням розсувних лопатей і траверс – ротора змінної конфігурації [8];
- використання нових принципів управління і систем на їх основі, наприклад, систем із нечіткою логікою [7];
- вдосконалення трансмісії та опори ротора, що забезпечують передачу енергії від ротора до генератора [9];
- вдосконалення сервоприводів керування кутом атаки лопатей або змін довжини лопатей і траверс ротора [10] і т. ін.

Запровадження будь-яких з перелічених підходів змінює властивості ВЕУ в цілому, що потребує поглибленого вивчення та узгодження роботи її елементів для забезпечення сумісності роботи окремих складових.

В роботі, що пропонується, розглядається система керування обертанням ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ, яка складається з трьох контурів керування – двох контурів змін довжини лопатей і траверс і контуру керування гальмівним моментом генератора на постійних магнітах. Ефективність способу стабілізації швидкості обертання ротора вітроустановок шляхом зміни площі, що омітається, показана в роботі [10]. Узагальнення та розповсюдження підходу на випадок вертикально-осьових ВЕУ проведено в роботі [8], де розроблена загальна модель динаміки ротора Дар'є ВЕУ змінної конфігурації. Особливості динаміки та управління швидкістю обертання ротора вертикально-осьових вітроустановок як об'єкта управління, що стабілізується одночасною зміною довжини лопатей і траверс – зміною конфігурації ротора ВЕУ розглянута в роботі [11]. В ній введена спрощена система стабілізації обертання ротора Дар'є, запропоновані алгоритми та методика перерозподілу навантаження на канали стабілізації, доведені їх стійкість та можливість керування піковими та кінцевими значеннями довжини лопатей і траверс, що дозволяє зменшити зміни моменту інерції ротора при змінах довжини траверс.

Використання генератора для керування обертанням ротора ВЕУ є традиційним засобом забезпечення малих відхилень швидкості обертання навколо точки максимальної потужності для поточної швидкості вітрового потоку [12]. Застосування синхронного генератора на постійних магнітах з цією метою є достатньо новим напрямом будови систем керування [13] і робот в цьому напрямку, на жаль, не так багато. Але дослідниками відмічається ряд корисних властивостей синхронних генераторів із постійними магнітами, які роблять їх достатньо перспективними для подальшого використання [13, 14]. Синхронні генератори з постійними магнітами мають просту електричну схему, не споживають енергії на збудження і мають підвищений к.к.д., відрізняються високою надійністю роботи, менш чутливі до дії реакції якоря, чим звичайні машини. Їх недоліки пов'язані з невисокими регульовальними властивостями через те, що робочий потік постійних магнітів не можна змінювати в широких межах, а для компенсації значних змін швидкості вітру необхідно витрачати значну додаткову енергію [12].

В роботі розглядаються особливості динаміки та управління швидкістю обертання ротора вертикально-осьових вітроустановок як об'єкта управління, що стабілізується одночасною зміною конфігурації ротора ВЕУ та гальмівного моменту генератора на постійних магнітах. Одночасне використання трьох

каналів стабілізації сприяє більшій адаптації ротора турбіни до змін швидкості вітру, а значить суттєво зменшує навантаження на системи передачі енергії та вимоги до систем розсіяння надлишкової енергії, таких як систем екстреного гальмування, дозволяє знизити витрати енергії на протидію значним змінам швидкості вітру. Використання принципу адаптації для пришвидшення гальмування турбіни в аварійних ситуаціях представляється вельми корисним. В зв'язку із цим продовження робіт [8, 11], спрямоване на узагальнення та розповсюдження підходу до управління обертами ротора вертикально-осьових ВЕУ одночасною зміною довжини лопатей, траверс і гальмівного моменту генератора на постійних магнітах стає задачею актуальною, такою що має значний практичний інтерес.

Метою статті є синтез та аналіз ефективності алгоритмів стабілізації швидкості обертів ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ, керованих сумісною зміною довжини лопатей, траверс і гальмівного моменту генератора на постійних магнітах. Методами вирішення задачі є методи класичної теорії автоматичного управління і математичного моделювання. Новизна отриманих результатів полягає в урахуванні керуючих впливів від змін конфігурації ротора та гальмівного моменту генератора на постійних магнітах, визначенні умов стійкості системи стабілізації, а також в розповсюдженні методики перерозподілу навантаження на канали стабілізації [11] для забезпечення умов їх працездатності. Запропоновані та проаналізовані алгоритми стабілізації та підхід до забезпечення умов працездатності можуть бути використані при проектуванні перспективних вертикально-осьових ВЕУ різної потужності.

Постановка задачі. Розглядається задача стабілізації швидкості обертів ротора вертикально-осьової ВЕУ із ротором Дар'є навколо оптимального значення швидкості ω_o , що відповідає максимуму потужності для відповідної швидкості вітру V_o [10 – 12]. Відносно ротора ВЕУ вважається, що він має три лопаті, жорстко пов'язані траверсами з опорно-підшипниковим вузлом, який передає крутильний момент на генератор через трансмісію. Деформації лопатей та траверс не беруться до уваги. Ефективність передачі енергії від ротора до генератора, а також ефективність роботи генератора відображаються відповідними к.к.д., що складають сукупний к.к.д. η трансмісії і генератора. Окрім цього вважається, що відхилення параметрів руху ротора від оптимальних значень незначні і динаміка роботи систем стабілізації обертів ротора, який керується сумісними змінами довжини лопатей і траверс, описується системою рівнянь [11]

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H + k_{2r}\Delta R + k_3\Delta N_c - \Delta\omega)/T, \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= (k_{2h}K_2\Delta H + ((K_1T - K_2)\Delta\omega + k_1K_2\Delta V)\gamma_1)/T, \\ \frac{d\Delta R}{dt} &= (k_{2r}K_2\Delta R + ((K_1T - K_2)\Delta\omega + k_1K_2\Delta V)\gamma_2)/T, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Delta\omega$ – відхилення швидкості обертів ротора ω від сталого значення ω_o ; ΔH , ΔR , ΔN_c – зміни довжини лопатей, траверс та потужності генератора

відповідно; T , k_1 , k_{2h} , k_{2r} , k_3 – коефіцієнти лінеаризації, обчислені за конструктивними параметрами ротора ВЕУ та умовам його роботи за співвідношеннями [15, 16]

$$T = \frac{2J\omega_o^2}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1-\eta)},$$

$$k_1 = \frac{3\omega_o}{V_o (1-\eta)},$$

$$k_{2h} = \frac{2R_o \omega_o}{S_o (1-\eta)}, \quad k_{2r} = \frac{2H_o \omega_o}{S_o (1-\eta)}, \quad k_3 = -\frac{2\omega_o}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1-\eta)};$$

K_1 , K_2 – коефіцієнти зворотних зв'язків в каналах стабілізації змінами довжини лопатей і траверс; γ_1 , γ_2 – вагові коефіцієнти перерозподілу навантаження на канали змін довжини лопатей і траверс, які задовольняють умовам [11]

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1].$$

Індексом "о" у співвідношеннях (2) позначені величини параметрів, які встановились.

Припускається, що зміни довжини лопатей та траверс в кожному з каналів стабілізації відбуваються синхронно, а момент інерції ротора системи J та всі інші параметри моделі T , R_o , H_o , S_o , C_p , ρ_o , η в процесі роботи контуру управління вважаються незмінними.

Зміни потужності генератора на постійних магнітах ΔN_z , керованого змінами резистивного супротиву навантаження, обчислюються із співвідношень [13, 14]

$$\Delta N_z = e \omega_o \Delta i_q, \quad \frac{d\Delta i_q}{dt} = d \Delta \omega + c \Delta i_q, \quad (3)$$

де Δi_q – зміна керуючого струму генератора; c , d і e – коефіцієнти лінеаризації контуру керування генератора на постійних магнітах [14]

$$c = \left. \frac{\partial i_q}{\partial R_c} \right|_{\lambda=\lambda_o}, \quad d = \left. \frac{\partial i_q}{\partial \omega} \right|_{\lambda=\lambda_o}, \quad e = \left. \frac{\partial M_z}{\partial i_q} \right|_{\lambda=\lambda_o} = \frac{3}{2} n_p \lambda_o,$$

n_p – кількість полюсів, λ_o – коефіцієнт швидкохідності ВЕУ, який відповідає максимуму потужності для швидкості вітру V_o .

Задача полягає в виборі та аналізі ефективності алгоритмів формування зворотного зв'язку, що забезпечують стійкість замкнутої системи ротор-регулятор, працездатність кожного каналу стабілізації, відсутність статичної помилки регулювання та задовільні значення показників якості регулювання.

Випадок працюючих каналів змін довжини лопатей і гальмівного моменту генератора. Розглянемо випадок, коли обертання ротора керується

змінами лише довжини лопатей ΔH і гальмівного моменту генератора на постійних магнітах, тобто потужності генератора ΔN_g . Тоді

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \Delta R = 0$$

і система (1), (3) перетворюється на

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H + k_3e\omega_o\Delta i_q - \Delta\omega)/T, \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= (k_{2h}K_2\Delta H + ((K_1T - K_2)\Delta\omega + k_1K_2\Delta V))/T, \\ \frac{d\Delta i_q}{dt} &= d\Delta\omega + c\Delta i_q. \end{aligned} \quad (4)$$

Пропорційно-інтегральний алгоритм стабілізації. У цьому випадку $K_2 = 0$ і система рівнянь (4) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H + k_3e\omega_o\Delta i_q - \Delta\omega)/T, \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= K_1 \cdot \Delta\omega, \\ \frac{d\Delta i_q}{dt} &= d\Delta\omega + c\Delta i_q, \end{aligned} \quad (5)$$

її характеристичне рівняння –

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{1}{T} - c, \quad a_2 = -\frac{c + k_3de\omega_o + k_{2h}K_1}{T}, \quad a_3 = \frac{c k_{2h}K_1}{T}. \quad (7)$$

Враховуючи, що коефіцієнти T , K_1 , k_{2h} , e – додатні, а c , d і k_3 – від'ємні, необхідні умови стійкості системи (5) за критерієм Стодоли [17] будуть

$$K_1 < 0 \quad \text{і} \quad K_1 < \frac{c + k_3de\omega_o}{k_{2h}},$$

а необхідні і достатні умови стійкості за критерієм Вишнеградського [17] –

$$A > 0, \quad B > 0, \quad AB > 1, \quad (8)$$

де $A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3}}$, $B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2}}$ – параметри Вишнеградського.

Перетворивши третю умову (8) у вигляді нерівності відносно нуля і підставляючи в нерівності (8) коефіцієнти (7)

$$(cT - 1)(dek_3\omega_o + c) - K_1k_{2h} > 0,$$

переконаємося, що будь-який від'ємний коефіцієнт зворотного зв'язку K_1 забезпечує виконання необхідних і достатніх умов стійкості.

Прирівнюючи праві частини рівнянь (5) нулю і розв'язуючи утворену систему лінійних рівнянь відносно $\Delta\omega$, ΔH і Δi_q , отримуємо кінцеві значення, що встановлюються в системі (5)

$$\Delta\omega = \Delta i_q = 0, \quad \Delta H = -\frac{k_1}{k_{2h}} \Delta V = -\frac{3H_o}{V_0} \Delta V. \quad (9)$$

Якщо обертання ротора керується тільки генератором, кінцеві значення $\Delta\omega$ і Δi_q є

$$\Delta\omega = \frac{ck_1}{c + dek_3\omega_o} \Delta V, \quad \Delta i_q = -\frac{dk_1}{c + dek_3\omega_o} \Delta V. \quad (10)$$

Порівнявши співвідношення (9) з (10), можна зробити такі висновки:

– система стабілізації з керуванням тільки генератором має статичну помилку за змінними $\Delta\omega$ і Δi_q ;

– в системі з керуванням змінами довжини лопатей і гальмівного моменту генератора статична помилка за змінними $\Delta\omega$ і Δi_q відсутня;

– зовнішній збурюючий вплив ΔV повністю компенсується зміною довжини лопатей;

– після завершення перехідних процесів за змінною Δi_q витрати енергії в системі з керуванням змінами довжини лопатей і гальмівного моменту генератора на протидію зовнішньому збуренню відсутні, ротор змінив свою конфігурацію і протидіяти зовнішньому збуренню немає потреби.

Таким чином можна зробити загальний висновок, що поєднання керування обертанням ротора ВЕУ змінами гальмівного моменту генератора із керуванням змінами довжини лопатей надає суттєвих переваг утвореній системі стабілізації – система отримує можливість адаптувати свою конфігурацію до змін умов роботи.

Пропорційно-інтегральний алгоритм стабілізації з корекцією за прискоренням. У цьому випадку система має вигляд (4), характеристичний поліном (6) із коефіцієнтами

$$a_1 = -\frac{cT + k_{2h}K_2 - 1}{T},$$

$$a_2 = \frac{k_{2h}(cK_2 - K_1) - k_3de\omega_o - c}{T},$$

$$a_3 = \frac{c k_{2h}K_1}{T} + \frac{k_3k_{2h}deK_2\omega_o}{T^2}.$$

Необхідні умови стійкості за критерієм Стодоли задовольняються при виконанні умов

$$K_1 < \frac{1}{cT} k_3deK_2\omega_o, \quad K_1 < \frac{1}{k_{2h}} (k_3de\omega_o + c) - cK_2, \quad K_2 < 0,$$

а необхідні і достатні умови стійкості за критерієм Вишнеградського

$$A > 0, \quad B > 0,$$

$$(k_{2h}K_2 - 1)(k_{2h}K_1 - c^2T) - k_3de\omega_o + c(k_3deT\omega_o - (k_{2h}K_2 - 1)^2) > 0$$

за умов

$$K_1 < 0, \quad K_2 < 0, \quad c(k_3 deT\omega_o - (k_{2h}K_2 - 1)^2) - k_3 de\omega_o > 0.$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (4) нулю і розв'язуючи утворену систему лінійних рівнянь відносно $\Delta\omega$, ΔH і Δi_q , отримуємо кінцеві значення, що встановлюються в системі (4), які співпадають із значеннями (9). Таким чином пропорційно-інтегральний алгоритм стабілізації з корекцією за прискорення забезпечує відсутність статичної помилки в системі.

Випадок працюючих каналів змін довжини лопатей, траверс і гальмівного моменту генератора. Як було показано в попередніх роботах [8, 15], головний недолік пропорційно-інтегрального алгоритму стабілізації – неможливість роздільного керування ступенем стійкості і коливальністю замкнутої системи. Тому далі будемо аналізувати лише *пропорційно-інтегральний алгоритм з корекцією за прискоренням*.

У цьому випадку система стабілізації описується системою рівнянь (1), (3), має характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

з коефіцієнтами

$$a_1 = -\frac{cT + (k_{2h} + k_{2r})K_2 - 1}{T},$$

$$a_2 = \frac{1}{T^2} [k_{2h}(k_{2r}K_2^2 - \gamma_1 K_1 T + K_2(cT - \gamma_2)) + k_{2r}(K_2(cT - \gamma_1) - \gamma_2 K_1 T) - T(k_3 de\omega_o + c)],$$

$$a_3 = \frac{1}{T^2} [c(k_{2h}(K_2\gamma_2 - k_{2r}K_2^2 + \gamma_1 K_1 T) + k_{2r}(K_2\gamma_1 + \gamma_2 K_1 T)) + K_2(k_{2h}k_{2r}K_1 + k_3 de\omega_o(k_{2h} + k_{2r}))],$$

$$a_4 = -\frac{1}{T^3} k_{2h}k_{2r}K_2(cK_1 T + k_3 deK_2\omega_o).$$

Визначимо умови сталості системи стабілізації із сумісними змінами конфігурації ротора і гальмівного моменту генератора. Критерій Стодоли виконуються за умов

$$K_1 < 0, \quad K_2 < 0, \quad k_3 de\omega_o + c < 0. \quad (11)$$

Третя нерівність для більшості практичних систем, як правило, виконується в зв'язку із тим, що добуток $k_3 de\omega_o \ll |c|$, наприклад [14].

Необхідна та достатня умова стійкості для системи (1), (3) згідно критерія Л'єнара–Шипара [18, 19, с. 639] потребує виконання нерівностей

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0, \quad (12)$$

де Δ_1 , Δ_3 – визначники Гурвіца першого та третього порядку. Перша нерівність виконана, а другу потрібно перевіряти обчисленням.

Прирівнюючи праві частини рівнянь (1), (3) нулю і розв'язуючи утворену систему лінійних рівнянь відносно $\Delta\omega$, ΔH , ΔR і Δi_q , отримуємо кінцеві значення, що встановлюються в системі

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \frac{c(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2}{c((\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)K_1T) - k_3deK_2\omega_o} k_1\Delta V, \\ \Delta H &= \frac{k_3deK_2\omega_o + cK_1T}{c((\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)K_1T) - k_3deK_2\omega_o} \gamma_1 \frac{k_1}{k_{2h}} \Delta V, \\ \Delta R &= \frac{k_3deK_2\omega_o + cK_1T}{c((\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)K_1T) - k_3deK_2\omega_o} \gamma_2 \frac{k_1}{k_{2r}} \Delta V, \\ \Delta i_q &= \frac{d(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2}{c((1 - \gamma_1 - \gamma_2)K_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)K_1T) + k_3deK_2\omega_o} k_1\Delta V.\end{aligned}$$

Прирівнявши $\Delta\omega$ та Δi_q нулю, знаходимо множину пар значень γ_1 , γ_2 , які забезпечують рівність нулю $\Delta\omega$ та Δi_q

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

і відсутність статичної помилки системи. Обмеження γ_1 , $\gamma_2 \in [0,1]$ є природним, оскільки забезпечує весь діапазон перерозподілу – від працюючого каналу змін довжини траверс через всі проміжні стани до працюючого каналу змін довжини лопатей, а від'ємні значення γ_1 , γ_2 неприпустимі. Останнє фактично є обґрунтуванням вибору вагових коефіцієнтів в методиці перерозподілу навантаження на канали стабілізації, запропонованої в [11].

Кінцеві значення $\Delta\omega$, ΔH , ΔR та Δi_q при цьому будуть

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta H = -\frac{\gamma_1 k_1}{k_{2h}} \Delta V, \quad \Delta R = -\frac{\gamma_2 k_1}{k_{2r}} \Delta V, \quad \Delta i_q = 0,$$

або після підстановки коефіцієнтів (2)

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta H = -\gamma_1 \frac{3H_o}{V_o} \Delta V, \quad \Delta R = -\gamma_2 \frac{3R_o}{V_o} \Delta V, \quad \Delta i_q = 0.$$

Стійкість нестационарної системи стабілізації швидкості обертів ротора. Проведений аналіз виконано в припущенні, що параметри системи незмінні, тобто система стаціонарна. Насправді, навіть при малих відхиленнях ΔR момент інерції ротора J і параметри, які залежать від J , ΔH і ΔR , змінюються за часом, тобто система нестационарна. Проведемо дослідження стійкості системи (1), (3) з урахуванням залежності коефіцієнтів лінеаризації (2) від часу.

Перетворимо систему (1), (3) у векторно-матричну форму

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta H \\ \Delta R \\ \Delta i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & \frac{k_{2h}}{T} & \frac{k_{2r}}{T} & \frac{k_3 e \omega_o}{T} \\ \frac{K_1 T - K_2}{T} \gamma_1 & \frac{k_{2h} K_2}{T} & 0 & 0 \\ \frac{K_1 T - K_2}{T} \gamma_2 & 0 & \frac{k_{2r} K_2}{T} & 0 \\ d & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta H \\ \Delta R \\ \Delta i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ \frac{k_1 K_2}{T} \gamma_1 \\ \frac{k_1 K_2}{T} \gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta V \quad (13)$$

та обчислимо кінцеві значення $\Delta\omega$, ΔH , ΔR та Δi_q , які в ній встановлюються,

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta H = -\frac{3\gamma_1 H_o}{V_o + 3\Delta V} \Delta V, \quad \Delta R = -\frac{3\gamma_2 R_o}{V_o + 3\Delta V} \Delta V, \quad \Delta i_q = 0. \quad (14)$$

Співвідношення для розрахунку кінцевих значень $\Delta\omega$, ΔH і ΔR (9), (14) співпадають із відповідними співвідношеннями, отриманими в роботах [15, 16].

Представимо систему (13) у вигляді

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (A_o + \Delta(t))\vec{x} + B \cdot \Delta V,$$

де \vec{x} – вектор станів системи із компонентами

$$\vec{x} = [\Delta\omega \quad \Delta H \quad \Delta R \quad \Delta i_q]^T;$$

A_o – постійна матриця

$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_o} & \frac{k_{2ho}}{T_o} & \frac{k_{2ro}}{T_o} & \frac{k_{3o} e \omega_o}{T_o} \\ \frac{K_1 T - K_2}{T_o} \gamma_1 & \frac{k_{2ho} K_2}{T_o} & 0 & 0 \\ \frac{K_1 T - K_2}{T_o} \gamma_2 & 0 & \frac{k_{2ro} K_2}{T_o} & 0 \\ d & 0 & 0 & c \end{bmatrix};$$

$\Delta(t)$ – матриця відхилень матриці

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T(t)} & \frac{k_{2h}(t)}{T(t)} & \frac{k_{2r}(t)}{T(t)} & \frac{k_3(t) e \omega_o}{T(t)} \\ \frac{K_1 T - K_2}{T(t)} \gamma_1 & \frac{k_{2h} K_2}{T(t)} & 0 & 0 \\ \frac{K_1 T - K_2}{T(t)} \gamma_2 & 0 & \frac{k_{2r}(t) K_2}{T(t)} & 0 \\ d & 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

$$T(t) = \frac{2J(t)\omega_o^2}{C_p \rho_o S(t) V_o^3 (1-\eta)}, \quad J(t) = m_o \cdot [R_o + \Delta R(t)]^2,$$

$$k_{2r}(t) = \frac{\omega_o}{[R_o + \Delta R(t)](1-\eta)}, \quad k_{2h}(t) = \frac{\omega_o}{[H_o + \Delta H(t)](1-\eta)}, \quad (15)$$

$$k_3(t) = -\frac{2\omega_o}{C_p \rho_o S(t) V_o^3 (1-\eta)}, \quad |\Delta H(t)| < H_o, \quad |\Delta R(t)| < R_o, \quad \text{для } t \geq t_o$$

$$\text{від } A_o; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} & \frac{k_1 K_2}{T} \gamma_1 & \frac{k_1 K_2}{T} \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Будемо вважати, що матриця $\Delta(t)$ задовольняє умові

$$\|\Delta(t)\| < c_1 \quad \text{для } t \geq t_o, \quad (16)$$

де c_1 – константа, що залежить від A_o ,

$$\|\Delta(t)\| = \sum_i \sum_j |\Delta_{ij}(t)| \quad \text{– матрична норма.}$$

Матриця $A(t)$ – майже постійна коефіцієнтна матриця [20, стор. 244]. Тоді у зв'язку із тим, що за умов (11), (12) матриця A_o стійка, система (1), (3) задовольняє умовам теореми 8.6 роботи [20, стор. 244, 245], тобто система (1), (3) зі змінними в часі коефіцієнтами лінеаризації також стійка.

Для підтвердження вищенаведеного залишається довести виконання умови (16). Доведемо це поелементним розглядом доданків $\|\Delta(t)\|$.

Кожен доданок $\|\Delta(t)\|$ має вигляд

$$|\Delta_{ij}(t) - \Delta_{ij}(t_o)| = \left| \frac{b_{ij}(t)}{T(t)} - \frac{b_{ij}(t_o)}{T(t_o)} \right|,$$

де всі чисельники – обмежені функції для $t \geq t_o$, що залежать від константи або обмежених функцій $\Delta H(t)$, $\Delta R(t)$, і немає жодного знаменника, який дорівнює нулю при $t \geq t_o$. Тобто всі доданки – обмежені, сума доданків також обмежена і умова (16) гарантовано виконується. Обмеженість $\Delta H(t)$ і $\Delta R(t)$ є слідством того, що вони – неперервні функції, які мають нульове початкове значення і обмежені визначені кінцеві значення (14).

Співвідношення (14) доводять, що зміна числових значень параметрів γ_1 , γ_2 змінює кінцеві значення ΔH та ΔR , що встановлюються, дозволяє керувати розподілом навантаження на канали стабілізації, забезпечити будь-яке мінімальне кінцеве значення ΔR , тобто забезпечити працездатність обох каналів.

Залежності кінцевих значень ΔH та ΔR , що встановлюються, розраховувались для значень параметрів γ_1 , γ_2 з таблиці 1 роботи [11] при $V_o = 13 \text{ м/с}$ і $\Delta V = 1 \text{ м/с}$. Порівняння розрахованих кінцевих значень ΔH та ΔR із відповідними кінцевими значеннями стаціонарної системи роботи

[11], дозволяє відмітити помітне зниження найбільших відносних переміщень лопатей і траверс, а саме, з 23,08 % до 18,75 %.

Моделювання процесів стабілізації швидкості обертів ротора. Проведемо моделювання процесів стабілізації в замкнутій системі з використанням запропонованих алгоритмів формування зворотних зв'язків. При виконанні розрахунків приймалося, що ВЕУ з *H*-ротором Дар'є має конструктивні параметри та умови роботи близькі до ВЕУ-0420, наведені в таблиці 1 роботи [15]. Коефіцієнти лінеаризації генератора склали

$$c = -28,285 \text{ с}^{-1}, \quad d = -40,85 \text{ А}, \quad e = 48,42 \text{ і} \times \text{і} \times \text{А}^{-1}.$$

Довгострокові зміни швидкості вітру моделювались одиничною ступеневою функцією $\Delta V(t) = 1(t)$. Числові значення коефіцієнтів (2) моделі (1), (3) наведені в таблиці 2 роботи [11], коефіцієнт $k_3 = -7,2374 \cdot 10^{-5} (\text{н} \cdot \text{м})^{-1}$.

Рис. 1 – 3 відображають залежність якості регулювання від вибору алгоритму стабілізації обертання ВЕУ: алгоритм 1 – стабілізація тільки генератором; алгоритм 2 – стабілізація сумісними змінами довжини лопатей і моменту спротиву генератора за *пропорційно-інтегральним алгоритмом* (5); алгоритм 3 – стабілізація сумісними змінами конфігурації ротора та моменту спротиву генератора за *пропорційно-інтегральним алгоритмом з корекцією за прискоренням* (13). Система стабілізації вважалась нестационарною із змінними за часом коефіцієнтами (15), коефіцієнт γ_1 в алгоритмі 3 вважався рівним 1/5.

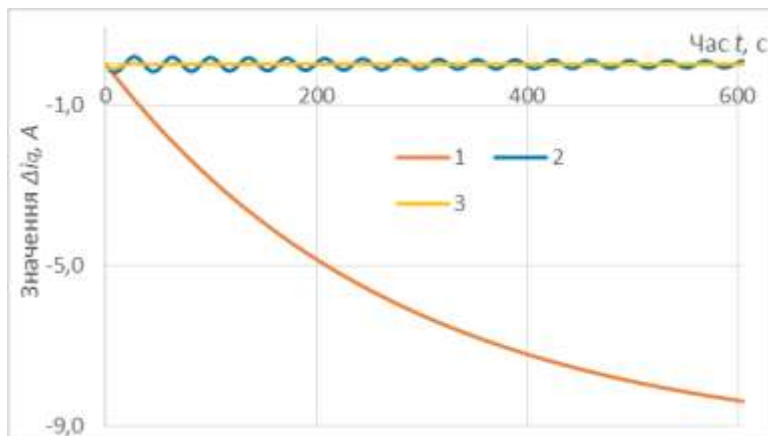


Рис. 1 – Залежності Δi_q від часу t із відповідними алгоритмами 1–3. Коефіцієнт K_1 в алгоритмі 2 дорівнював -6 м

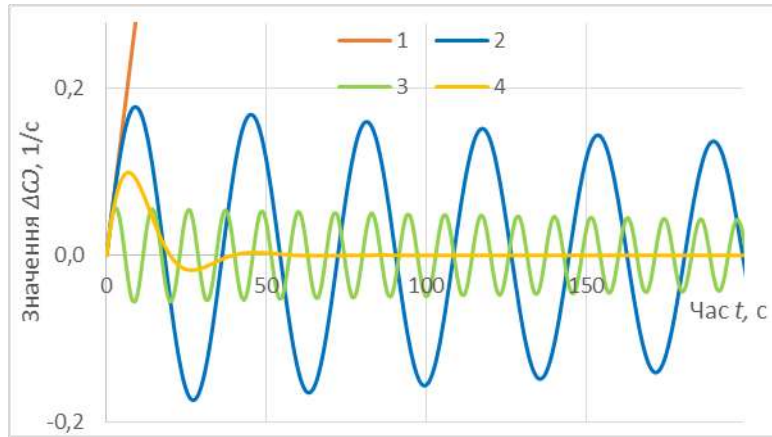


Рис. 2 – Залежності $\Delta\omega$ від часу t із алгоритмами 1–3: залежність 1 – алгоритм 1; залежності 2 і 3 – алгоритм 2 із коефіцієнтами K_1 -6 м і -60 м відповідно; 4 – алгоритм 3

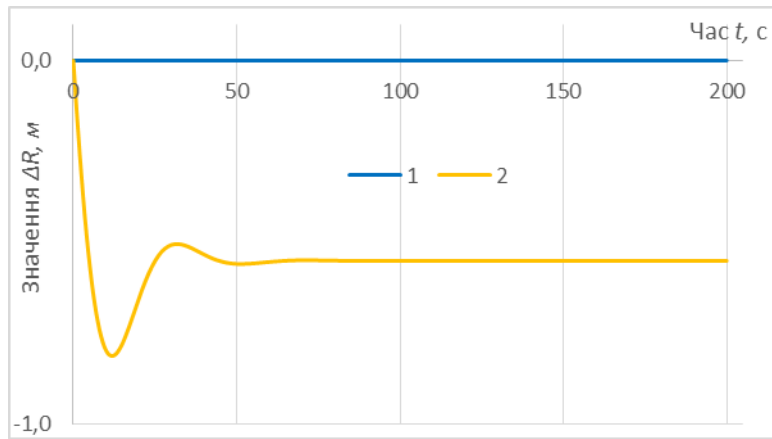


Рис. 3 – Залежності ΔR від часу t : 1 – алгоритм 1; 2 – алгоритм 3

Аналіз наведених на рис. 1 – рис. 3 залежностей дозволяє зробити такі висновки:

- алгоритм стабілізації обертання ротора ВЕУ із використанням генератора на постійних магнітах найбільш простий в реалізації, але має найгірші показники якості регулювання – малу ступінь стійкості і відповідно велику довжину перехідних процесів, не забезпечує відсутності статичної помилки регулювання за змінними $\Delta\omega$ і Δi_q ;

- *пропорційно-інтегральний алгоритм стабілізації* із сумісними змінами довжини лопатей і моменту спротиву генератора на постійних магнітах забезпечує відсутність статичної помилки регулювання за змінними $\Delta\omega$ і Δi_q , має проміжну серед трьох алгоритмів ступінь стійкості і довжину перехідних процесів, має значну коливальність і дуже малий декремент загасання; зростання коефіцієнту зворотного зв'язку K_1 забезпечує зменшення перерегулювання але збільшує коливальність системи, що несприятливо позначається на динамічних властивостях системи;

- *пропорційно-інтегральний алгоритм з корекцією за прискоренням* із сумісними змінами конфігурації ротора і моменту спротиву генератора на

постійних магнітах забезпечує відсутність статичної помилки регулювання за змінними $\Delta\omega$ і Δi_q , має найкращі серед трьох алгоритмів ступінь стійкості, довжину перехідних процесів, незначні коливальність і перерегулювання, дозволяє роздільно керувати ступенем стійкості і коливальністю;

– всі алгоритми стабілізації забезпечують стійкість замкнутої системи, а пропорційно-інтегральний і алгоритм з корекцією за прискоренням мають додаткову перевагу – наявність нульового кінцевого значення не тільки для змін швидкості обертів ротора, а і для змін керуючого струму генератора на постійних магнітах. Це дозволяє суттєво скоротити енерговитрати на керування.

Керування навантаженням на канали стабілізації. На рис. 4 – рис. 7 наведено графіки залежності від часу відхилень $\Delta\omega$, Δi_q , ΔH і ΔR при сумісній роботі каналів змін довжини лопатей, траверс і моменту спротиву генератора на постійних магнітах згідно алгоритму (13) в залежності від змін коефіцієнта перерозподілу навантаження γ_1 . Цифрами 1–4 позначені графіки залежностей, які відповідають строкам таблиці 1 роботи [11].

Аналіз наведених на рис. 4 – рис. 7 залежностей та порівняння їх із результатами роботи [11] дозволяє зробити висновок про збереження всіх якісних закономірностей та властивостей перехідних процесів.

Таким чином може бути зроблений загальний висновок стосовно достатньої ефективності запропонованих алгоритмів стабілізації обертання ротора ВЕУ сумісними змінами конфігурації ротора і моменту спротиву генератора на постійних магнітах та методики перерозподілу навантаження між каналами стабілізації. Запропонована система забезпечує адаптацію ВЕУ до змін умов її роботи, стійкість замкнутої системи стабілізації обертів ротора, дозволяє обрати різні варіанти роботи системи, має додаткову перевагу – наявність нульового кінцевого значення не тільки для змін швидкості обертів ротора, а і для змін керуючого струму генератора на постійних магнітах. Це дозволяє суттєво скоротити енерговитрати на керування.

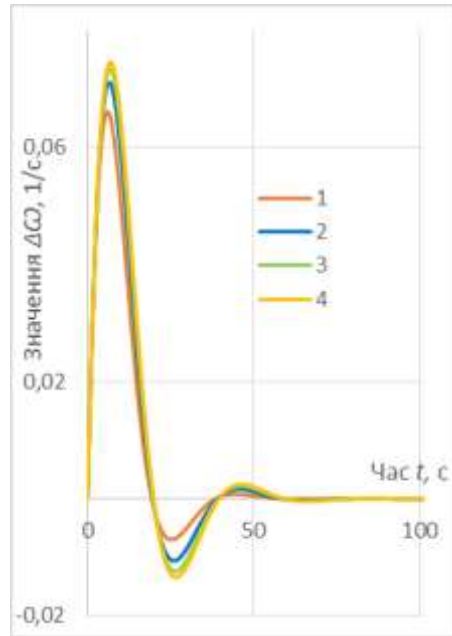


Рис. 4 – Залежності $\Delta\omega$ від часу t

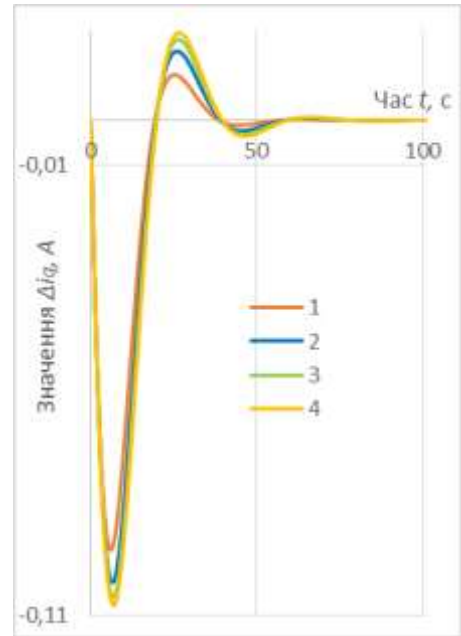


Рис. 5 – Залежності Δi_q від часу t

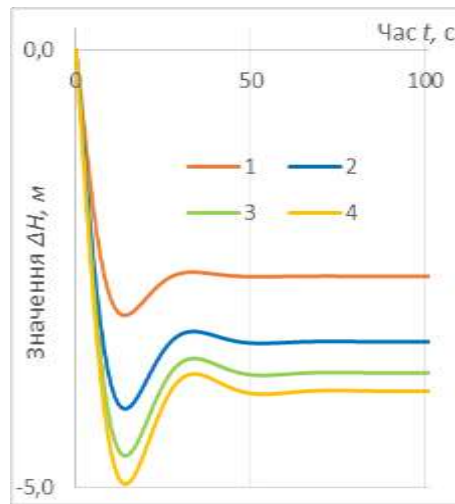


Рис. 6 – Залежності ΔH від часу t

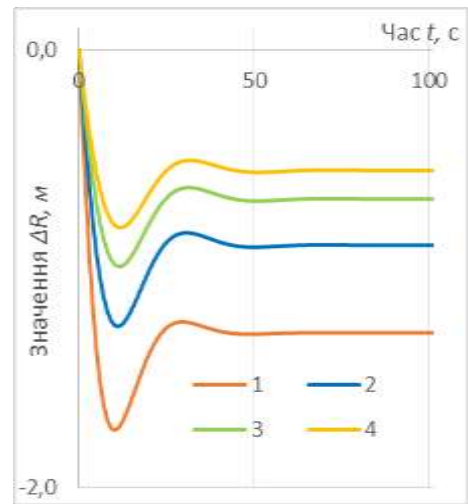


Рис. 7 – Залежності ΔR від часу t

Висновки. Запропоновано алгоритми формування зворотних зв'язків, які забезпечують стійкість замкнутої системи стабілізації обертів ротора вертикально-осьових ВЕУ, керованого сумісними змінами конфігурації ротора і моменту спротиву генератора на постійних магнітах. Виконано обґрунтування методики розподілу навантаження на канали стабілізації та її розповсюдження на випадок нестационарної системи. Проведене моделювання довело отримання ВЕУ властивості адаптації до змін умов роботи, можливість забезпечення умов працездатності каналів стабілізації, більшу ефективність і кращі показники якості регулювання. Запропоновані алгоритми та методика можуть бути використані для обґрунтування конструктивних рішень при проектуванні вертикально-осьових ВЕУ із ротором Дар'є.

1. Longhuan Du, Ingram G., Dominy R. G. A review of H Darrieus wind turbine aerodynamic research. Accepted <https://doi.org/10.1177/0954406219885962>
2. Редчиць Д. А., Щеглов Г. А., Марчевський І. К. Математичне моделювання аеродинаміки ротора вертикально-осьової вітроенергетичної установки. Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування» (СЕУТТОО-2013), 9–11 жовтня 2013 р. 36. наук. праць. Херсон. 2013. С. 307–311.
3. Batista N. C., Melicio R., Mendes V. M. F., Calderón M., Ramiro A. On a self-start Darrieus wind turbine: Blade design and field tests. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2015. V. 52(C). P. 508–522. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.07.147>
4. Batista N. C., Melicio R., Matias J. C. O., Catalão J. P. S. New blade profile for Darrieus wind turbines capable to self-start. IET Conference on Renewable Power Generation (RPG). 2011. <https://doi.org/10.1049/cp.2011.0219>
5. Грінченко В. Т., Каян В. П. Оптимізація характеристик вітроротора Дар'є з прямими керованими лопатями. Допов. НАН України. 2015. №6. С. 37–45.
6. Краснолуцький П., Панцир Ю. Теоретичний аналіз вітродвигуна з поворотними лопатями. *Commission of motorization and energetics in agriculture*. 2015. Vol. 17, No. 1. С. 51–56.
7. Суббота А. М., Джулгачов В. Г. Підвищення ефективності вітроенергетичної установки з вертикальною вісю обертання. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2018. № 1(85). С. 77–86.
8. Тарасов С. В., Редчиць Д. О., Тарасов А. С., Дорош О. В. Модель динаміки ротора Дар'є змінної конфігурації. Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» (ІТММ-2023), 22 березня 2023 р. 36. наук. праць. Дніпро: Український державний університет науки і технологій. 2023. С. 208–211.
9. Гайденко Ю. А., Чумак С. С. Перспективи застосування масиву Хальбаха в електричних машинах з постійними магнітами. *Міжнародний науково-технічний журнал «Сучасні проблеми електроенерготики та автоматики»*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2020. С. 188–191. URL: <http://jour.fea.kpi.ua/article/view/231312/230298> (дата звернення 27.11.2025)
10. Дзензерський В. А., Тарасов С. В., Костюков І. Ю. Вітроустановки малої потужності. К.: *Наук. думка*, 2011. 592 с.
11. Тарасов С. В., Молотков О. Н. Стабілізація обертання ротора Дар'є сумісними змінами довжини лопатей і траверс. *Технічна механіка*. 2024. № 2. С. 92–105. <https://doi.org/10.15407/itm2024.02.092>
12. Півняк Г., Шкрабець Ф., Нойбергер Н., Ципленков Д. Основи вітроенергетики: підручник. Дніпро: НГУ, 2015. 335 с. URL: https://pidru4niki.com/83008/tehnika/osnovi_vitroenergetiki (дата звернення 28.11.2025)
13. Melicio R., Mendes V. M. F., Catalão J. P. S. Fractional order control and simulation of wind energy systems with PMSG/full-power converter topology. *Energy Conversion and Management*. V.51, Iss.6. P.1250–1258. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2009.12.036>
14. Pereira T. R., Batista N. C., Fonseca A. R. A., Cardeira C., Oliveira P., Melicio R. Darrieus wind turbine prototype: Dynamic modeling parameter identification and control analysis. *Energy*. 2018. V. 159, 15, September. P. 961–976. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.06.162>
15. Тарасов С. В., Молотков О. Н. Алгоритми стабілізації швидкості обертів ротора Дар'є вітроенергетичної установки, керованого змінами довжини лопатей. *Технічна механіка*. 2023. № 4. С. 50–59. <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.050>
16. Тарасов С. В., Молотков О. Н. Модель динаміки ротора Дар'є, керованого змінами довжини траверс. Матеріали 15-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування» (СЕУТТОО-2024), 13–15 березня 2024 р. 36. наук. праць. Херсон: Херсонська державна морська академія. 2024. С. 224–226.
17. Штіфзон О. Й., Новіков П. В., Бунь В. П. Теорія систем автоматичного управління: Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 144 с. URL: https://document.kdu.edu.ua/info_zab/141_1502.pdf (дата звернення 28.11.2025).
18. Liénard et Chipart. Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, *J. de Math, pure et appl.* 1914. (6) 10. P. 291–346.
19. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць. <https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net/ГантмахерТеоріяМатриць> (дата звернення 2.12.2025).
20. Henry D'Angelo. *Linear time-varying systems: Analysis and synthesis*. Boston: Allyn&Bacon. 1970. 288 p.

Стаття надійшла до редакції 04.01.2026;
 прийнято до друку після рецензування 24.03.2026;
 дата публікації 31.03.2026.