УДК 513.36 https://doi.org/10.15407/itm2026.03.104

І. А. КОСТЮШКО, https://orcid.org/0000-0003-4093-6383

СТІЙКІСТЬ РУХУ ТРОСОВОЇ СИСТЕМИ

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», пр. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна, https://ror.org/00syn5v21; e-mail: kostushkoia5@gmail.com

Робота присвячена дослідженню стійкості руху вантажу на тросі, у постановці, придатній для аналізу тросових підвісів безпілотних літальних апаратів (БПЛА) під час маневрів. На вантаж діє аеродинамічна сила – вітрове навантаження довільного заданого напряму. Враховується опір повітря, пропорційний швидкості вантажу.

Теоретичний блок спирається на класичну модель сферичного маятника як на базову наближену «тросово-вантажну» підсистему.

Виведено нелінійні рівняння руху у формі Лагранжа, що представляють собою систему двох нелінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Визначено положення рівноваги, стійкість якого надалі досліджується. Нелінійна система руху представляється в нормальній формі та проводиться її лінеаризація. Система першого наближення розпадається на дві незалежні підсистеми. Згідно з умовою від'ємності дійсних частин коренів характеристичного рівняння кожної системи, отримано умови асимптотичної стійкості руху системи.

Наведені аналітичні результати підтверджуються чисельними обчисленнями. Наводиться чисельний розв'язок нелінійної системи диференціальних рівнянь методом Рунге–Кутта 8 порядку. Відповідність чисельних та аналітичних результатів свідчить про вірогідність останніх.

Отримані результати та фізичні обмеження на матеріал тросу дозволяють визначити межі допустимої ваги вантажу, при яких відбувається стійкий рух системи.

Результати роботи мають практичне застосування. Вони можуть бути застосовані при проєктуванні тросових підвісів корисного навантаження БПЛА – зокрема, для визначення допустимого діапазону маси вантажу, що забезпечує стійкий рух системи за умов вітрового навантаження. Розроблені критерії стійкості можуть бути використані в системах автоматичного керування БПЛА для оперативного оцінювання стану підвісу в реальному часі, а також при сертифікації тросових систем доставки вантажів за вітрових умов.

На відміну від класичних постановок задачі сферичного маятника, у роботі вперше розглядається модель з одночасним урахуванням: вітрової сили довільного тривимірного напряму, аеродинамічного опору та фізичного обмеження на натяг тросу. Це дозволило отримати явні аналітичні вирази для мінімальної та максимальної допустимої маси вантажу через параметри вітрового навантаження та міцність матеріалу троса, що раніше у такій постановці не розглядалось.

***Ключові слова*:** *тросова система, сферичний маятник, рівняння Лагранжа, стійкість руху, положення рівноваги, лінеаризація, характеристичне рівняння, вітрове навантаження, аеродинамічний опір, БПЛА, допустима маса вантажу, натяг троса*.

This paper investigates the motion stability of a payload suspended on a tether, in a formulation suitable for the analysis of tethered suspension systems of unmanned aerial vehicles (UAVs) during maneuvers. The payload is subject to an aerodynamic force: a wind load of an arbitrarily given direction. An air drag proportional to the payload velocity is taken into account.

The theoretical framework is based on the classical spherical pendulum model as a baseline approximate tether–payload subsystem.

Nonlinear equations of motion are derived in Lagrangian form as a system of two nonlinear fourth-order differential equations. The equilibrium position is determined, and its stability is further investigated. The nonlinear system of motion is represented in normal form and linearized. The first-approximation system decouples into two independent subsystems. Based on the condition that the real parts of the roots of the characteristic equation of each subsystem shall be negative, conditions for the asymptotic stability of the system motion are obtained.

The analytical results are validated by numerical computations. A numerical solution to the nonlinear system of differential equations is obtained using the eighth-order Runge–Kutta method. The numerical results are in agreement with the analytical ones, thus validating the latter.

The obtained results and physical limitations allow one to determine the admissible range of the payload

© І. А. Костюшко, 2026

The article is an open access article distributed underthe terms and conditions of the Creative Commons Attributions (CC BY) license (https/creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

mass in which the motion of the system is stable.

The obtained results have practical applications. They may be used in the design of tethered payload suspension systems for UAVs — in particular, for determining the admissible range of the payload mass in which the motion of the system is stable under wind loading. The derived stability criteria may be employed in UAV automatic control systems for real-time assessment of the suspension state and in the certification of tethered cargo delivery systems under wind conditions.

In contrast to classical formulations of the spherical pendulum problem, this paper presents, for the first time, a model that simultaneously accounts for: a wind force of arbitrary three-dimensional direction, an aerodynamic drag, and a physical limitation on tether tension. This made it possible, for the first time in this formulation, to analytically express the minimum and the maximum admissible payload mass in explicit form in terms of the wind load parameters and the tensile strength of the tether material.

Keywords: *tethered system, spherical pendulum, Lagrange equations, critical case, Lyapunov function, first integrals, wind, aerodynamic drag, unmanned aerial vehicle, admissible payload mass.*

Вступ. Транспортування вантажу на тросі під безпілотним літальним апаратом є поширеною операцією у логістиці доставки, дистанційному моніторингу з підвішеними сенсорами та технологічних операціях з підйомним навантаженням [1, 2, 3]. Під час горизонтальних розгонів і гальмувань, а також поривів вітру вантаж не слідує траєкторії рами синхронно: виникають маятникові коливання, що впливають на безпеку польоту, точність позиціювання та навантаження на вузол кріплення [3, 4]. Особливої гостроти ця проблема набуває в умовах бічного або висхідного вітру довільного напряму [5], коли рівноважне положення вантажу суттєво відхиляється від вертикалі, а характер стійкості системи змінюється залежно від маси вантажу та параметрів вітру. Тому задача про обмеженість відхилень від штатного режиму руху тросово-підвішеної маси зберігає пряму інженерну мотивацію навіть тоді, коли використовуються спрощені кінематичні моделі.

Класична механіка сферичного маятника як базова модель тросово-вантажної підсистеми добре відома [6]: рівняння руху у формі Лагранжа, перші інтеграли та стійкість конічного руху розглянуті в підручниках з теоретичної механіки. Однак класична постановка не враховує зовнішніх силових факторів – вітрового навантаження та аеродинамічного опору. Сучасні роботи [1, 2, 3, 7], присвячені динаміці тросових систем БПЛА, здебільшого зосереджені на задачах керування коливаннями або моделюванні троса як пружного тіла, залишаючи поза увагою аналітичне дослідження стійкості рівноважного положення вантажу з урахуванням тривимірного вітрового навантаження. Зокрема, вітрова сила у більшості робіт або не враховується, або задається лише вздовж однієї горизонтальної осі, що є суттєвим спрощенням реальних умов [5, 8]. Питання про допустимий діапазон маси вантажу, що забезпечує стійкий рух системи при заданих параметрах вітру, у явній аналітичній формі раніше не ставилось.

У центрі роботи – стійкість стаціонарного конічного руху вантажу, коли він описує горизонтальне коло при постійній довжині троса l і нерухомій точці підвісу в однорідному полі тяжіння. Такий режим задає типовий «обертовий» еталон, відносно якого формулюються збурення. Формалізм Лагранжа представляє трос як ідеальний голономний зв'язок, що змушує матеріальну точку рухатись по сфері радіуса l. Попри геометричну простоту, лінійний аналіз стійкості для цього режиму потрапляє в критичний випадок першого методу Ляпунова, тому однозначний висновок вимагає додаткових міркувань – зокрема, побудови функції Ляпунова або залучення перших інтегралів системи.

Досліджувана система складається з трьох елементів: *носій* (БПЛА) – представлений нерухомою матеріальною точкою, що відповідає режиму зависання з малими горизонтальними прискореннями або лабораторному

еталону; *трос* – нерозтяжний, невагомий голономний зв'язок довжини l; *вантаж* – компактна маса m на кінці троса, на яку діє сила тяжіння, вітрове навантаження довільного напряму та сила опору повітря, пропорційна швидкості. В наведеній моделі розглядаються короткі троси, для яких масою та аеродинамічним опором самого троса можна знехтувати порівняно з масою вантажу.

Під час горизонтальних маневрів БПЛА вантаж на тросі не рухається синхронно з рамою апарата: виникають маятникові коливання, що впливають на точність скидання, навантаження на кріплення та безпеку польоту. Для оцінки обмеженості відхилень від штатного режиму зручно виділити підсистему «трос – вантаж» і описати її рух відносно точки підвісу.

Метою роботи є аналітичне дослідження стійкості рівноважного положення вантажу на тросі під дією вітрового навантаження довільного напряму та визначення допустимого діапазону маси вантажу, що забезпечує асимптотично стійкий рух системи.

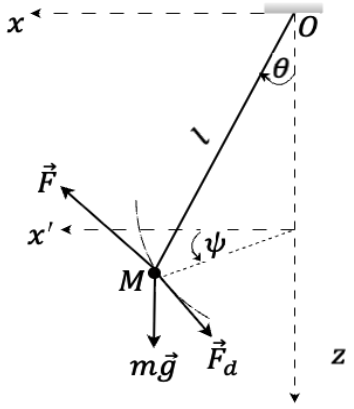


Рис. 1 – Схема системи. Узагальнені координати

Постановка задачі. Розглядається тросова вантажна система, що представлена нерухомою точкою підвісу O, що відповідає режиму зависання носія БПЛА; невагомим нерозтяжним тросом довжини l та вантажом M – компактною масою m на кінці троса (рис. 1).

На вантаж діє вітер заданого напрямку – задана сила $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ та сила опору повітря $\vec{F}_d$, пропорційна лінійній швидкості:

$$\vec{F}_d = -\mu\,\vec{v},$$

де $\mu > 0$ – коефіцієнт опору; $\vec{v}$ – швидкість вантажу M. Припущення про лінійну залежність сили опору повітря від швидкості прийнято з огляду на подальшу лінеаризацію рівнянь руху за першим методом Ляпунова. Оскільки за математичним формалізмом дослідження стійкості в околі стаціонарної точки вищі (квадратичні) степені швидкості при розкладанні в ряд відкидаються, параметр μ трактується як ефективний еквівалентний коефіцієнт лінеаризованого аеродинамічного опору вантажу в досліджуваному діапазоні швидкостей. Зважаючи на малу довжину підвісу, розподілений аеродинамічний опір самої нитки не враховується, що дозволяє розглядати систему як один зосереджений сегмент.

Ставиться задача щодо визначення положення та умов рівноваги, мінімальної та максимальної ваги вантажу m, щоб рух означеної системи був стійким.

Рівняння руху системи. Положення вантажу M (радіус-вектор $\vec{r}$) визначається двома кутами θ і ψ, які ми приймаємо як узагальнені координати (рис. 1).

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} l\,\sin\theta\,\cos\psi \\ l\,\sin\theta\,\sin\psi \\ l\,\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Для сили вітру $\vec{F}$ узагальнені сили по координатах θ і ψ визначаються таким чином:

$$\begin{cases} Q_\theta^{(w)} = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = F_x l \cos\theta \cos\psi + F_y l \cos\theta \sin\psi - F_z l \sin\theta\,; \\ Q_\psi^{(w)} = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = -F_x l \sin\theta \sin\psi + F_y l \sin\theta \cos\psi\,. \end{cases} \quad (1)$$

Для сили опору повітря:

$$\vec{F}_d = -\mu \begin{pmatrix} l\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - l\sin\theta\,\dot{\psi}\sin\psi \\ l\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + l\sin\theta\,\dot{\psi}\cos\psi \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix},$$

тому узагальнені сили опору повітря:

$$\begin{cases} Q_\theta^{(d)} = \vec{F}_d \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\mu l^2 \dot{\theta}; \\ Q_\psi^{(d)} = \vec{F}_d \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = -\mu l^2 \sin^2\theta\ \dot{\psi}. \end{cases} \quad (2)$$

Рівняння руху тросової системи складаємо згідно рівнянь Лагранжа [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^{(w)} + Q_\theta^{(d)}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \psi} = Q_\psi^{(w)} + Q_\psi^{(d)}, \end{cases} \quad (3)$$

де $L = \mathrm{T} - \mathrm{П}$; $\mathrm{T}, \mathrm{П}$ – відповідно кінетична та потенціальна енергія системи:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right); \qquad \mathrm{П} = mgl(1 - \cos\theta). \quad (4)$$

Підстановка виразів (1), (2), (4) в (3), дозволяє отримати рівняння руху заданої системи:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl\ \sin\theta = \\ = F_x l \cos\theta\cos\psi + F_y l\cos\theta\, sin\,\psi - F_z l\sin\theta - \mu l^2\dot{\theta}; \\ ml^2\ddot{\psi}\sin^2\theta + 2ml^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \\ = -F_x l\sin\psi\sin\theta + F_y l\sin\theta\cos\psi - \mu l^2\sin^2\theta\cdot\ \dot{\psi}. \end{cases} \quad (5)$$

Систему (5) розв'язуємо відносно старших похідних $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}$. Вводимо нові змінні:

$$y_1 = \theta; \quad y_2 = \dot{\theta}; \quad y_3 = \dot{\psi}; \quad y_4 = \psi.$$

Представляємо (5) в нормальній формі:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = {y_3}^2 \sin y_1 \cos y_1 - \dfrac{g}{l}\sin y_1 - \dfrac{\mu}{m} y_2 + \dfrac{F_x}{ml}\cos y_1 \cos y_4 + \\ \qquad + \dfrac{F_y}{ml}\cos y_1 \sin y_4 - \dfrac{F_z}{ml}\sin y_1\,; \\ \dot{y}_3 = -2y_2 y_3\ \mathrm{ctg}\, y_1 - \dfrac{\mu}{m} y_3 - \dfrac{F_x}{ml}\dfrac{\sin y_4}{\sin y_1} + \dfrac{F_y}{ml}\dfrac{\cos y_4}{\sin y_1}; \\ \dot{y}_4 = y_3. \end{cases} \quad (6)$$

Визначення положення рівноваги. Зауважимо, що даній системі диференціальних рівнянь не задовольняє тривіальний розв'язок. Визначаємо стаціонарну точку $(y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$, прирівнюючи до нуля праві частини рівнянь системи (6). Отримуємо:

$$y_2^0 = y_3^0 = 0;$$
$$y_4^0 = \psi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_y}{F_x}\right). \tag{7}$$

$$y_1^0 = \theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}{gm+F_z}\right). \tag{8}$$

Кут ψ_0 – полярний кут, що визначається напрямом вітру в горизонтальній площині (x, y). Значення кута $\theta_0 > 0$ залежить від числових значень координат заданого вектору $\vec{F}$, що моделює вітер, та від маси вантажу m. На рис. 2 показано графік залежності $\theta_0 = \theta_0(m)$ при заданому $\vec{F}$.

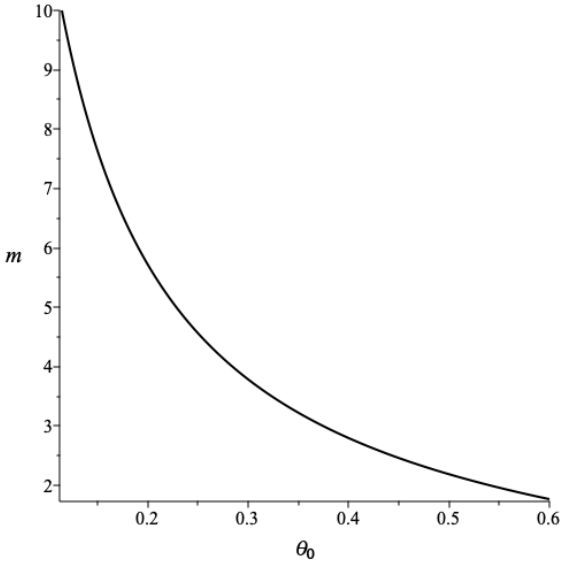


Рис. 2 – Залежність $m = m(\theta_0)$ при $F_x = 5;\ F_y = 10;\ F_z = -1$

Графік, зображений на рис. 2 показує вплив маси на кут відхилення. Із збільшенням ваги вантажу m кут відхилення θ_0 зменшується.

Положення рівноваги стаціонарної точки $(\theta_0;\ 0;\ 0;\ \psi_0)$ надалі досліджується.

Лінеаризація системи руху. Дослідження стійкості за першим наближенням. В системі диференціальних рівнянь (6) робимо заміну змінних:

$$\xi_1 = y_1 - \theta_0;\ \ \xi_2 = y_2;\ \ \xi_3 = y_3;\ \xi_4 = y_4 - \psi_0; \tag{9}$$

після чого вона приймає вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4); \\ \dot{\xi}_3 = f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4); \\ \dot{\xi}_4 = \xi_3, \end{cases} \tag{10}$$

де функції f_1, f_2 означені як праві частини другого та третього рівнянь системи (6) з урахуванням (9). Розкладаємо їх в ряди Маклорена, отримуємо систему рівнянь першого наближення:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2; \\ \dot{\xi}_3 = a_{21}\xi_3 + a_{22}\xi_4; \\ \dot{\xi}_4 = \xi_3, \end{cases} \tag{11}$$

де:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = -\dfrac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+(F_z+mg)^2}}{l\,m}\,\mathrm{sign}(F_z+mg); \\ a_{12} = a_{21} = -\dfrac{\mu}{m}. \end{cases} \tag{12}$$

Система (11) розпадається на дві незалежні підсистеми відносно змінних (ξ_1, ξ_2) та (ξ_3, ξ_4). Характеристичні рівняння цих систем співпадають і мають вид:

$$\lambda^2 - a_{12}\lambda - a_{11} = 0. \tag{13}$$

Коефіцієнти рівняння (13) є додатними за умови

$$F_z > -mg, \tag{14}$$

тобто якщо вертикальна складова вітру не перевищує силу тяжіння, розв'язок системи (10) є асимптотично стійким.

На рис. 3 наводяться графіки чисельного розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь (5) при довільно обраних початкових умовах та заданих значень із області стійкості (14): $m = 2$ кг; $F_x = 5$ Н; $F_y = 10$ Н; $F_z = -1$ Н; $\mu = 0{,}3$.

Для означених даних $\theta_0 \approx 0{,}53$; $\psi_0 \approx 1{,}1$.

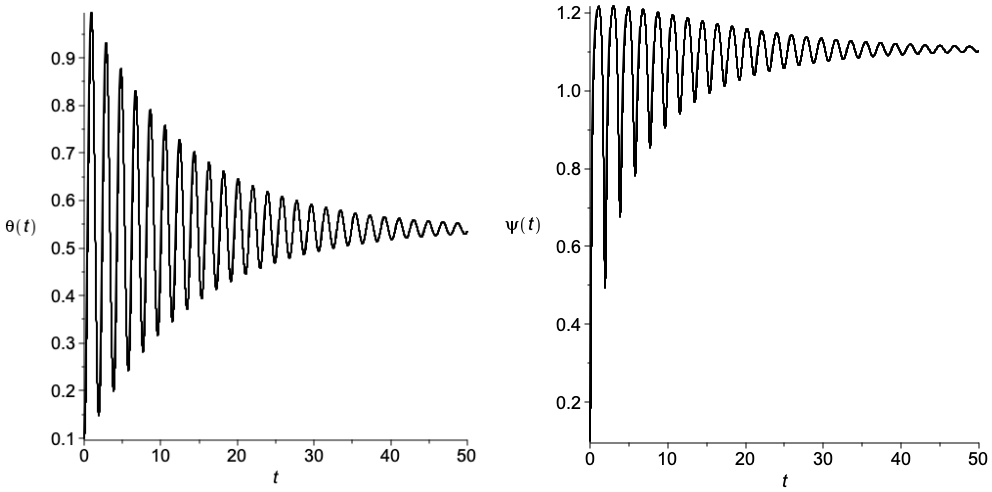


Рис. 3 – Чисельний розв'язок (5) при $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \psi(0) = 0{,}1; \dot{\psi}(0) = -0{,}1$

Наведені чисельні результати підтверджують отримані аналітичні, що підтверджує вірогідність останніх.

Визначення допустимої ваги вантажу. Для визначення оцінки маси вантажу, при якій рух системи залишиться стійким та трос не обірветься, окрім

умови стійкості (14), потрібно врахувати обмеження на трос, який працює лише на розтяг, та характеристики матеріалу троса. Натяг троса T повинен задовольняти умовам:

$$0 < \mathrm{T} < \mathrm{T}_{max}. \tag{15}$$

Із умови рівноваги проєкцій усіх сил на напрям нитки, отримуємо:

$$\mathrm{T} = (mg + F_z)\cos\theta_0 - \left(F_x\cos\psi_0 + F_y\sin\psi_0\right)\sin\theta_0.$$

Виключаємо в правій частині останнього виразу кути θ_0та ψ_0 згідно (7), (8), отримуємо:

$$\mathrm{T} = \frac{(gm+F_z)^2-\left(F_x^2+F_y^2\right)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+(mg+F_z)^2}}. \tag{16}$$

Значення T_{max} визначається матеріалом троса – границею міцності на розтяг:

$$\mathrm{T}_{max} = \sigma_{max}\cdot S,$$

де σ_{max} – границя міцності матеріалу (Па), S – площа перерізу троса (м^2). Це технічна характеристика конкретного троса.

З урахуванням (16) систему нерівностей (15) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} m > m_{min},\ m_{min} = \dfrac{\sqrt{F_x^2+F_y^2}-F_z}{g}, \\ m < m_{max}, \end{cases} \tag{17}$$

де m_{max} – додатний корінь рівняння:

$$\mathrm{T}_{max} = \frac{(gm_{max}+F_z)^2-\left(F_x^2+F_y^2\right)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+(m_{max}g+F_z)^2}}.$$

Отже, мінімальна вага вантажу m_{min} визначається лише параметрами вітру. Максимальна вага m_{max} визначається чисельно для конкретних параметрів задачі.

На рис. 4 побудована залежність $T = T(m)$, означена формулою (16), при заданих значеннях параметрів вітру: $F_x = 5$ Н; $F_y = 10$ Н; $F_z = -1$ Н та матеріалу троса: $\mathrm{T}_{max} = 100$ МПа, $S = 1$ см^2.

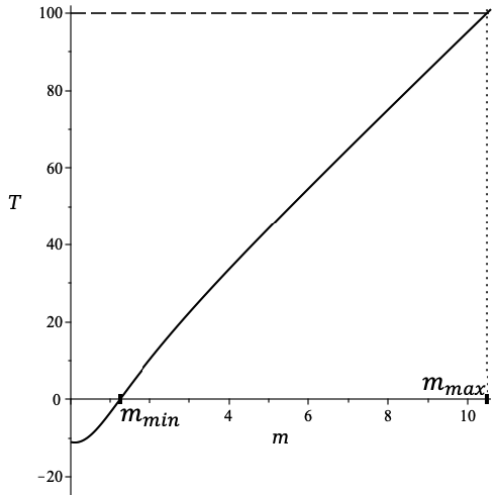


Рис. 4 – Визначення границь маси допустимого вантажу

Функція $T = T(m)$ є монотонно зростаючою по m. Точка перетину наведеного графіку з прямими $T = 0$ та $T = T_{max}$ визначає відповідні значення $m = m_{min} \approx 1{,}24$ та $m = m_{max} \approx 10{,}48$. Для заданих параметрів встановлюємо, що при $1{,}24 < m < 10{,}48$ коливання системи будуть асимптотично стійкими і трос не обірветься.

Висновки. У роботі досліджено стійкість руху вантажу на тросі під дією вітрового навантаження довільного напряму та аеродинамічного опору в постановці, придатній для аналізу тросових підвісів БПЛА. Отримано такі результати:

1. На основі формалізму Лагранжа виведено нелінійні рівняння руху тросово-вантажної системи з урахуванням тривимірного вітрового навантаження $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ та сили опору повітря, пропорційної швидкості вантажу. Система представлена у нормальній формі четвертого порядку.
2. Визначено ненульове положення рівноваги системи. Встановлено, що азимутальний кут рівноваги визначається лише напрямом горизонтальної складової вітру, а полярний кут відхилення зменшується зі збільшенням маси вантажу.
3. Проведено лінеаризацію нелінійної системи біля положення рівноваги. Отримано умову асимптотичної стійкості руху системи: вертикальна складова вітрової сили не повинна перевищувати силу тяжіння вантажу.
4. З урахуванням фізичних обмежень на натяг троса отримано явні аналітичні вирази для допустимого діапазону маси вантажу m: $m_{min} < m < m_{max}$. Мінімальна маса m_{min} визначається виключно параметрами вітру; максимальна m_{max} – міцністю матеріалу троса.
5. Отримано чисельний розв'язок нелінійної системи методом Рунге–Кутта 8-го порядку з довільно обраними параметрами задачі та довільними початковими умовами. Наведений графік демонструє затухаючі коливання, що сходяться до положення рівноваги. Узгодженість чисельних та аналітичних обчислень свідчить про вірогідність останніх.
6. Отримані результати мають пряме практичне застосування при проєктуванні тросових підвісів корисного навантаження БПЛА, визначенні допустимих льотних режимів за вітрових умов та сертифікації систем доставки вантажів.

1. *He Z., Zhao L.* Stability Parameter Range of a Tethered Unmanned Aerial Vehicle. Shock and Vibration. 2022. Vol. 2022. P. 1–14. https://doi.org/10.1155/2022/4893721
2. *Godbole H., Vittal V., Shafai B.* Nonlinear Control of Unmanned Aerial Vehicles with Cable Suspended Payloads. Aerospace Science and Technology. 2019. Vol. 93. P. 105299. https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.07.032
3. *Huang J., Tao H., Wang Y., Sun J.–Q.* Suppressing UAV Payload Swing with Time–Varying Cable Length through Nonlinear Coupling. Mechanical Systems and Signal Processing. 2023. Vol. 185. P. 109790. https://doi.org/: 10.1016/j.ymssp.2022.109790
4. *Yang S., Xian B.* Energy-Based Nonlinear Adaptive Control Design for the Quadrotor UAV System with a Suspended Payload. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2020. Vol. 67, No. 3. P. 2054–2064. https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2902834
5. *Gao H., Liu C., Jiang Z.* Multiple Observers Based Anti–Disturbance Control for a Quadrotor UAV Against Payload and Wind Disturbances. Control Engineering Practice. 2020. Vol. 102. P. 104560. https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2020.104560
6. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River.: Prentice–Hall, 2002. 750 p.
7. *Gabellieri L., Tognon M., Sanalitro D., Franchi A.* Equilibria, Stability, and Sensitivity for the Aerial Suspended Beam Robotic System Subject to Parameter Uncertainty. IEEE Transactions on Robotics. 2023. Vol. 39, No. 5. P. 3977–3993. https://doi.org/10.1109/TRO.2023.3279033
8. *Qian L., Liu H.H.* Path-Following Control of a Quadrotor UAV with a Cable-Suspended Payload Under Wind Disturbances. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2020. Vol. 67, No. 3. P. 2021–2029. https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2905811

Стаття надійшла до редакції 17.06.2026;
прийнято до друку після рецензування 28.08.2026;
дата публікації 28.09.2026