

**ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ
В ТОНКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИНАХ
З КРУГОВИМ ОТВОРОМ**

Інститут технічної механіки

*Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: bogdan.teryokhin@gmail.com*

Пластинчато-оболонкові елементи конструкцій з отворами широко застосовуються в різноманітних галузях техніки, зокрема ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві тощо. Наявність в них отворів призводить до різкого збільшення локальних напружень, що за певних умов може стати причиною руйнівних процесів. Застосування включень, зокрема із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) з певними механічними властивостями, дозволяє суттєво зменшити концентрацію напружень в околі локальних концентраторів, підвищити міцність та надійність конструкцій в цілому.

У цій роботі проведено числове моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин за наявності кругового отвору і оточуючого його кільцевого включення за різних граничних умов. Досліджено вплив геометричних та механічних параметрів ФГМ-включень на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану пластин в околі отвору. Отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Для кожної з розглянутих граничних умов знайдені раціональні параметри кільцевих ФГМ-включень, які дозволяють зменшити коефіцієнт концентрації напружень на $\sim 40\% - 56\%$. При цьому також спостерігається пропорційне зменшення інтенсивності деформацій в околі отвору. Закон зміни модуля пружності ФГМ-включення та ширина включення суттєво впливають не тільки на величину концентрації параметрів напружено-деформованого стану пластини, а й на характер розподілу напружень за її площиною. Результати проведеної серії широкомасштабних обчислювальних експериментів показують, що використання кільцевого включення із ФГМ дає змогу знизити інтенсивності як напружень, так і деформацій навколо отвору.

Таким чином, використання кільцевих підкріплень навколо кругових отворів у пластинах за різних граничних умов є доцільним, оскільки такі підкріплення дають змогу знизити концентрацію напружень за рахунок їх перерозподілу та отримати більш плавний розподіл напружень.

Ключові слова: тонка пружна пластина, круговий отвір, кільцеве включення, функціонально-градієнтний матеріал, напружено-деформований стан, граничні умови, коефіцієнт концентрації напружень, скінченноелементний аналіз.

Plate-shell structural elements with openings are widely used in various branches of engineering, including the space-rocket, the oil-and-gas, and the power industry, construction, etc. The presence of openings leads to a sharp increase in local stresses, which, under certain conditions, may cause a failure. The use of inclusions, in particular made of functionally graded materials (FGMs) with certain mechanical properties, allows one to significantly reduce the stress concentration in the vicinity of local concentrators, thus increasing the strength and reliability of the structure as a whole.

This work presents the results of numerical simulation and finite-element analysis of the stress and strain field of thin plates in the presence of a circular opening and a surrounding annular inclusion under various boundary conditions. The effect of the geometric and mechanical parameters of FGM inclusions on the stress and strain concentration in the vicinity of the opening is investigated. The distribution of the stress and strain intensities in the zones of local stress concentration is obtained. For each of the boundary conditions considered, advisable parameters of annular FGM inclusions are found such that the stress concentration factor is reduced by $\sim 40 - 56$ per cent. At the same time, a proportional decrease in the stress intensity in the vicinity of the opening is also observed. The law of variation of the elastic modulus of the FGM inclusion and the width of the inclusion have a significant effect not only on the magnitude of the stress and strain concentration, but also on the stress pattern. The results of large-scale computational experiments show that the use of an annular FGM inclusion with FGMs makes it possible to reduce both the stress and the strain intensity in the vicinity of the opening.

Thus, the use of annular reinforcements around circular openings in plates under various boundary conditions is reasonable because such reinforcements allow one to reduce the stress concentration by

smoothening the stress distribution.

Keywords: *thin elastic plate, circular opening, annular inclusion, functionally graded material, stress and strain field, boundary conditions, stress concentration factor, finite-element analysis.*

Вступ. Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – це вдосконалені композитні матеріали з поступовою зміною мікроструктури та/або складу. Завдяки особливостям цих матеріалів їх все частіше використовують на практиці в різних галузях техніки, зокрема ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві тощо. Зазвичай ФГМ виготовляють за допомогою поєднання декількох матеріалів в різних пропорціях задля отримання необхідного градієнта властивостей.

У випадку використання пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами, важливим є питання зниження концентрації напружень, яка виникає поблизу отворів [1 – 5]. Застосування включень навколо отворів, зокрема із ФГМ, дозволяє впливати на розподіл напружень та деформацій у тонкостінних конструкціях [6 – 9]. Пошук раціональних параметрів ФГМ-включень, які дозволяють знизити концентрацію напружень у тонкостінних конструкціях, а також підвищити міцність та надійність конструкції в цілому є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла.

Питанням дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонкостінних конструкцій з отворами та підкріплювальними елементами присвячено багато наукових праць. Фундаментальні результати у цьому напрямку були представлені в монографіях відомих вітчизняних вчених Г. М. Савіна, О. М. Гузя та ін. [10, 11].

Наявність в пластинчато-оболонкових елементах конструкцій підкріплювальних елементів або включень з певними механічними властивостями сприяє зниженню концентрації напружень навколо отворів [12 – 14].

В останні роки було проведено багато досліджень ФГМ як теоретичних, так і числових та експериментальних. Наприклад, у [15] досліджено розподіл напружень у пластині із ФГМ з круговим отвором за допомогою аналітичного методу. У [16] за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ) із використанням різних ізопараметричних скінчених елементів визначено коефіцієнт концентрації напружень (ККН) в околі кругового вирізу в неоднорідній пластині за дії одновісного розтягувального навантаження, у [17] – навколо кругового вирізу в пластині з ФГМ за дії двовісного розтягування та зсуву. У [18] на основі застосування теорії деформації зсуву першого порядку проаналізовано вільні вібрації ФГМ-пластини з прямокутними вирізами різних розмірів, кількості та розташування. У роботі [19] проведено числовий аналіз концентрації напружень навколо центрального еліптичного включення, покритого ФГМ, використовуючи так званий розширений метод скінчених елементів. У [20] представлено експериментальне дослідження розподілу напружень у функціонально-градієнтних пластинах з круговим отвором, створених за допомогою багатоматеріального 3D-друку.

Зазначимо, що застосування ФГМ суттєво підвищує складність математичної моделі задачі та отримання її розв'язку, тому більшість сучасних досліджень неоднорідних конструкцій виконується за допомогою числових методів механіки, які, на відміну від аналітичних, є досить універсальними й ефективними для розв'язування широкого класу задач [21, 22].

У представленій роботі, як продовженні [6 – 9], проведено комп'ютерне моделювання НДС пружних тонких пластин з круговим отвором та кільцевим включенням із ФГМ з урахуванням різних граничних умов. Виконано скінченноелементний аналіз впливу граничних умов на НДС

пластини та знайдено раціональні параметри ФГМ-включень, які дозволяють зменшити концентрацію напружень в околі отвору.

Постановка задачі. Дослідження НДС проведено для тонких пружних однорідних ізотропних пластин розмірами $a \times b$, товщини h , з центрально розташованим круговим отвором радіусу R та кільцевим включенням із ФГМ радіусу R_1 (рис. 1). Включення має таку саму товщину як і пластина (знаходиться у площині пластини), на його границі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення. Величина R_1 варіюється. На бокові грані пластин діє рівномірне розтягувальне навантаження $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$, що не призводить до появи пластичних деформацій. Розглянуто декілька випадків граничних умов: 1) $p_1 = p$, $p_2 = 0$; 2) $p_1 = p_2 = p$; 3) $p_1 = p$, $p_2 = -p$, де $p = \text{const}$.

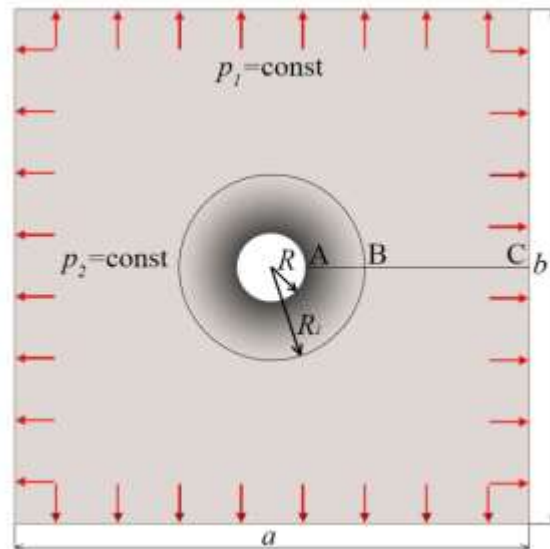


Рис. 1 – Геометрія та схема навантаження пластини

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu_0 = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-включення $E(r)$:

$$E(r) = \begin{cases} E_0(1 + \frac{k-1}{\tilde{h}_1}l), & l \in [0; \tilde{h}_1], \\ kE_0, & l \in [\tilde{h}_1; \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2], \\ E_0(k - \frac{(k-1)(l - (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2))}{\tilde{h}_3}), & l \in [\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2; 1], \end{cases} \quad (1)$$

де $E_0 = 100$ ГПа – модуль пружності пластини; $0 \leq l \leq 1$ – нормалізована параметрична відстань в радіальному напрямку від краю отвору (точка А, рис. 1) по ширині включення $AB = h_{\text{екл}} = R_1 - R$:

$$l = (r - R) / (R_1 - R), \quad (2)$$

r – відстань від центру отвору до довільної точки включення; R і R_1 – радіуси отвору і включення відповідно; $\tilde{h}_i = h_i / h_{\text{екл}}$ ($i = 1, 3$) – безрозмірні

ширина кожної з трьох характерних зон ФГМ-включення, h_i ($i=\overline{1,3}$) – ширина (м) кожної з трьох характерних зон ФГМ-включення, $h_{\text{вкл}} = \sum_{i=1}^3 h_i$; k – відношення модуля пружності другої зони ФГМ включення $\tilde{E}_2$ до модуля пружності пластини, $k = \tilde{E}_2 / E_0$.

Закон зміни модуля пружності ФГМ-включення (1) має три характерні зони: 1) зона зростання (h_1); 2) зона незмінного (фіксованого) значення (h_2); 3) зона зменшення модуля пружності (h_3) [9].

Дослідимо вплив виду граничних умов на ККН в пластині з круговим отвором та ФГМ-включенням. Для цього проведемо розрахунки для різних варіантів величин R_1 та k ФГМ-включення.

Математичні моделі задач та метод їх розв'язування. У варіаційній постановці вихідна задача для структурно неоднорідної тонкої пластини призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [23]:

$$\begin{aligned} \Theta = \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x,y)h}{(1-\nu_s^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\nu_s}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v) dx dy, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox , Oy відповідно; h – товщина пластини; $E_s(x,y)$, ν_s – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала пластини Ω_1 (матриці) ($s=1$) і включення Ω_s ($s=\overline{2,n+1}$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{s=1}^{n+1} \Omega_s$ – область визначення змінних x та y ; γ – границя області Ω , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y) = (p_x(x,y), p_y(x,y))^T$. У разі одновісного розтягу $p_x(x,y)=0$, $p_y(x,y)=p=\text{const}$, у разі двовісного розтягу $p_x(x,y)=p_y(x,y)=p=\text{const}$, і для третього випадку граничних умов $p_y(x,y)=-p_x(x,y)=p=\text{const}$.

Для розв'язання поставлених варіаційних задач застосовано МСЕ з використанням ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня з двома степенями вільності в кожному з вузлів (два лінійні переміщення u , v відповідно за напрямками осей Ox , Oy). При цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовано квадратичним поліномом:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2, \\ v(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2, \end{aligned}$$

де a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) – невідомі коефіцієнти, що визначаються із умови збігу значення скалярних величин u, v в кожному i -му вузлі з відповідними вузловими значеннями функцій переміщень u_i, v_i .

В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подібнення, рівним 10.

Числовий аналіз. Розрахунки проведені на ПК з процесором Intel Core i7-10700F з тактовою частотою 2,9-4,8 GHz, оперативною пам'яттю 32 GB, відеокартою nVidia GeForce RTX 2060 SUPER, розрядність системи x64. Середня кількість скінченних елементів – 2126, кількість вузлів – 4408.

Числові результати отримані для квадратних пластин з такими геометричними параметрами: $a=b=0,2$ м, $R=a/20$, $h=0,005$ м, навантаження розтягу $p=10 \text{ Н/м}^2$. Радіус R_1 кільцевого ФГМ-включення навколо отвору варіювався з кроком R , при цьому ширина ФГМ-включення дорівнювала $h_{\text{ФГМ}} = 3R, 4R, \dots, 9R$.

З метою проведення порівняльного аналізу був здійснений розрахунок для однорідної пластини з круговим отвором без включення для трьох випадків граничних умов. Отримані результати (див. табл. 1) добре узгоджуються з результатами [8].

Таблиця 1

Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в однорідній пластині для задач 1 – 3

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\epsilon_i^{\max} \times 10^4$
Задача 1	3,05	1,7	2,13
Задача 2	2,01	0,5	1,49
Задача 3	4,02	0,5	2,84

Тут δ_1 – відхилення ККН, отриманого за допомогою МСЕ, від аналітичних результатів для граничних умов 1 – 3 [1, 10]. Задачі 1 – 3 відповідають граничним умовам 1 – 3: 1) $p_1 = p, p_2 = 0$; 2) $p_1 = p_2 = p$; 3) $p_1 = p, p_2 = -p$, де $p=10 \text{ Н/м}^2$.

Результати проведених обчислювальних експериментів для пластини з ФГМ-включеннями у разі $k=2$ зведено у табл. 2 та табл. 3.

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень в пластині з ФГМ-включенням у разі $k=2$

Вид включення	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_2, \%$	ККН	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1	2,39	-21,6	1,59	-20,9	3,13	-22,1
ФГМ-включення 2	2,23	-26,9	1,54	-23,4	2,88	-28,4
ФГМ-включення 3	2,10	-31,1	1,49	-25,9	2,68	-33,3
ФГМ-включення 4	2,00	-34,4	1,44	-28,4	2,52	-37,3
ФГМ-включення 5	1,93	-36,7	1,40	-30,3	2,44	-39,3
ФГМ-включення 6	1,90	-37,7	1,35	-32,8	2,42	-39,8
ФГМ-включення 7	1,93	-36,7	1,30	-35,3	2,53	-37,1

Тут $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – відхилення ККН від відповідного значення для пластини без включення для граничних умов 1 – 3. В розглянутих ФГМ-включеннях розміри першої і третьої зони включення дорівнювали R , а розмір другої зони варіювався від R до $7R$ з кроком R , що відповідає номеру включення.

Таблиця 3

Деформації в пластині з ФГМ-включенням у разі $k = 2$

Вид включення	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	$\delta_2, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_3, \%$
ФГМ-вкл. 1	1,60	-24,9	1,11	-25,5	2,08	-26,8
ФГМ-вкл. 2	1,50	-29,6	1,07	-28,2	1,91	-32,7
ФГМ-вкл. 3	1,41	-33,8	1,03	-30,9	1,78	-37,3
ФГМ-вкл. 4	1,34	-37,1	1,00	-32,9	1,68	-40,8
ФГМ-вкл. 5	1,30	-39,0	0,97	-34,9	1,62	-43,0
ФГМ-вкл. 6	1,28	-39,9	0,94	-36,9	1,61	-43,3
ФГМ-вкл. 7	1,30	-39,0	0,90	-39,6	1,68	-40,8

Тут $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – відхилення максимального значення інтенсивності деформацій $\varepsilon_i^{\max}$ від відповідного значення для пластини без включення для граничних умов 1 – 3.

З табл. 2 та табл. 3 видно, що наявність кільцевого ФГМ-включення із заданим законом змінення модуля пружності (1) дає змогу зменшити величину ККН у пластині на $\sim 21\% - 40\%$, а максимальні деформації на $\sim 25\% - 43\%$. При цьому, для ФГМ-включень 1 – 6 і розглянутих граничних умов: чим більша ширина ФГМ-включення, тим менші величина ККН і максимальних деформацій. Найкращім із розглянутих варіантів з точки зору зменшення ККН для граничних умов 1, 3 виявляється ФГМ-включення 6, а для граничної умови 2 – ФГМ-включення 7.

На рис. 2, а) – рис. 2, в) наведено графіки розподілу відносних напружень σ_i/ρ у характерному перерізі AC пластини з ФГМ-включенням для задач 1 – 3 відповідно для різних варіантів ширини R_1 ФГМ-включення. На рис. 2 та рис. 3 вздовж осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \leq l \leq 1$ в радіальному напрямку від краю отвору (точка A , рис. 1)

вздовж перерізу пластини $AC = (a - 2R)/2$: $l = (r - R) / (\frac{a}{2} - R)$, r – відстань від центра отвору до довільної точки відрізка AC .

Як видно з рис. 2, а) – рис. 2, в), при використанні ФГМ-включень відбувається перерозподіл напружень у перерізі AC у порівнянні з пластиною без включень: максимальні напруження навколо отвору зменшуються, у той же час спостерігається їх деяке зростання у другій зоні включення. Такі закономірності спостерігаються для всіх трьох видів граничних умов. Аналіз отриманих результатів щодо впливу ширини ФГМ-включення на характер розподілу напружень у пластині показує: чим ширина включення R_1 більша, тим плавніше відбувається розподіл напружень σ_i/ρ за площиною пластини.

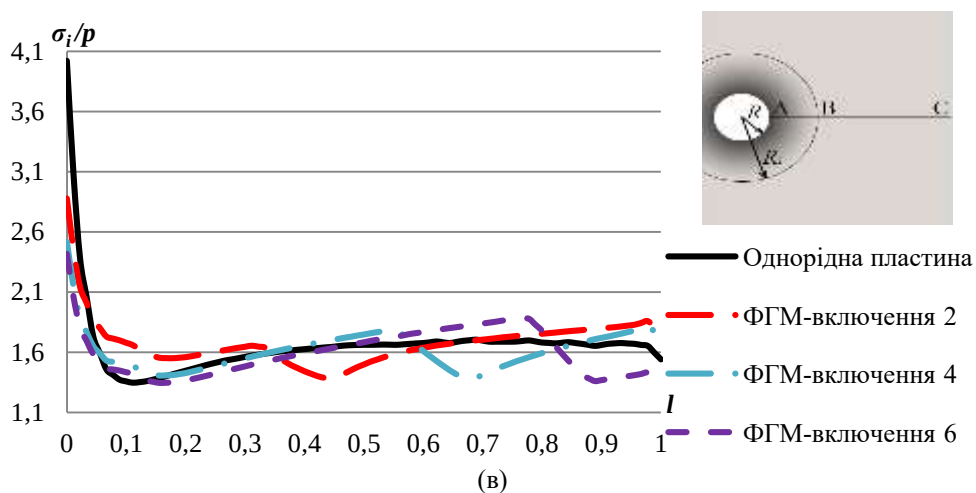
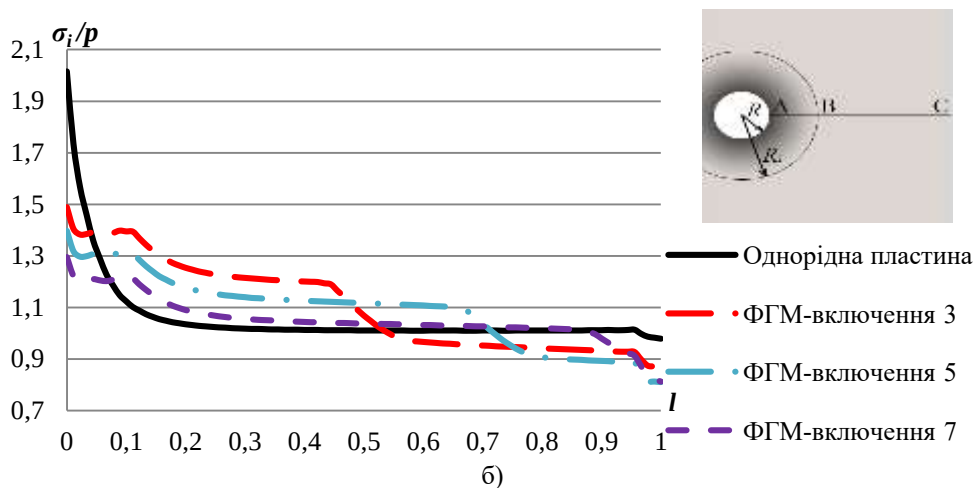
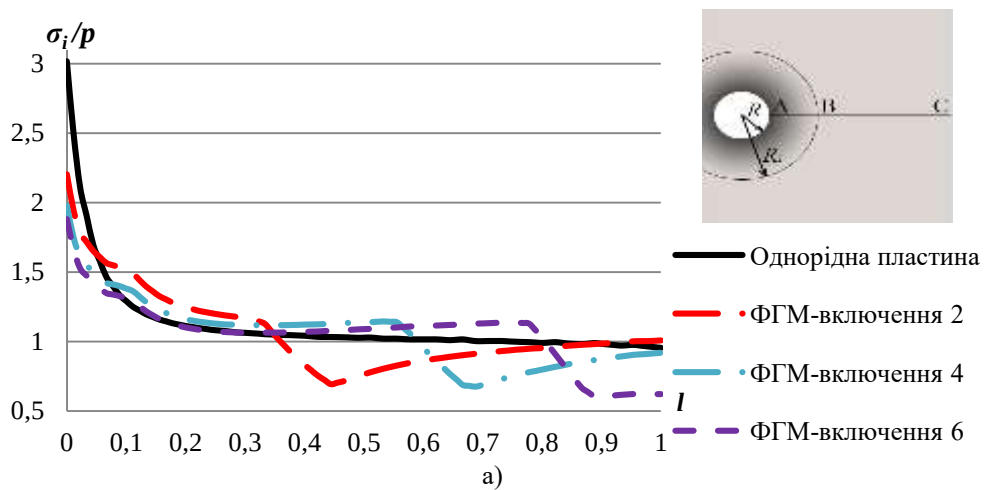
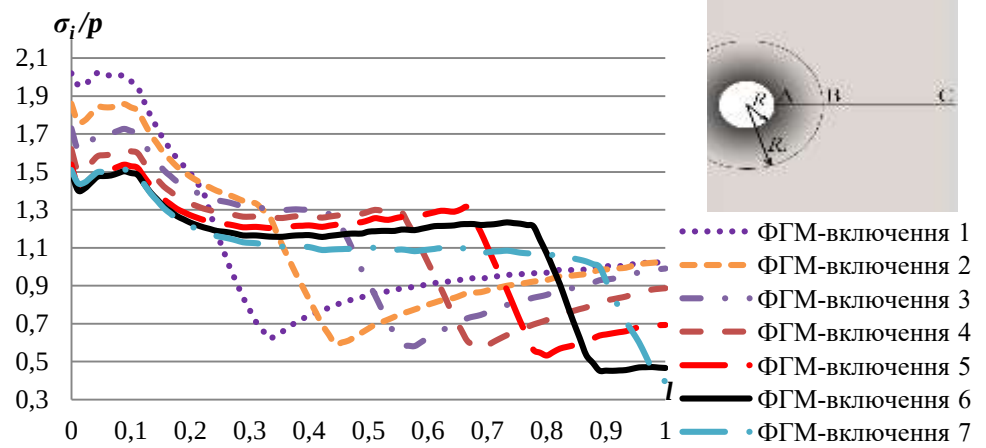


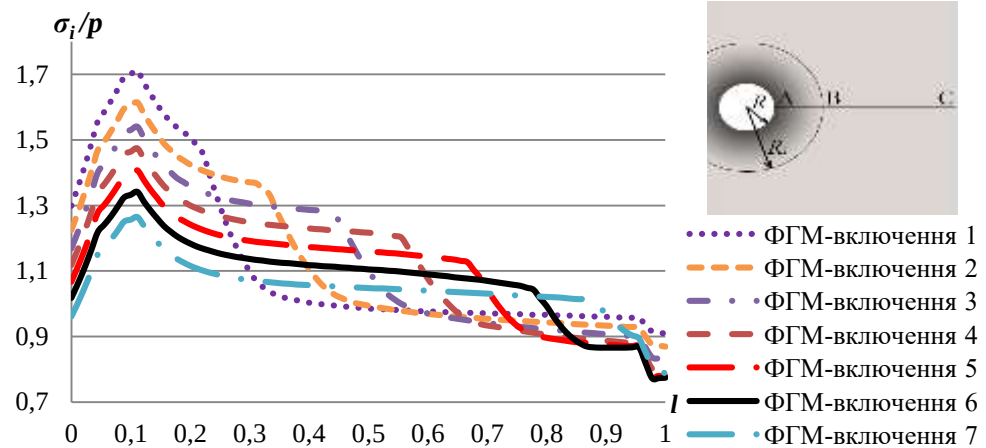
Рис. 2 – Розподіл відносних напружень σ_i/p в пластині з ФГМ-включенням в перерізі AC для задачі 1 (а), задачі 2 (б) та задачі 3 (в)

Далі розглянемо, як впливає збільшення відносної жорсткості k ФГМ-включення на величину ККН на прикладі пластини з ФГМ-включеннями у разі $k=3$ (рис. 3). Тут найкращім із розглянутих варіантів з точки зору

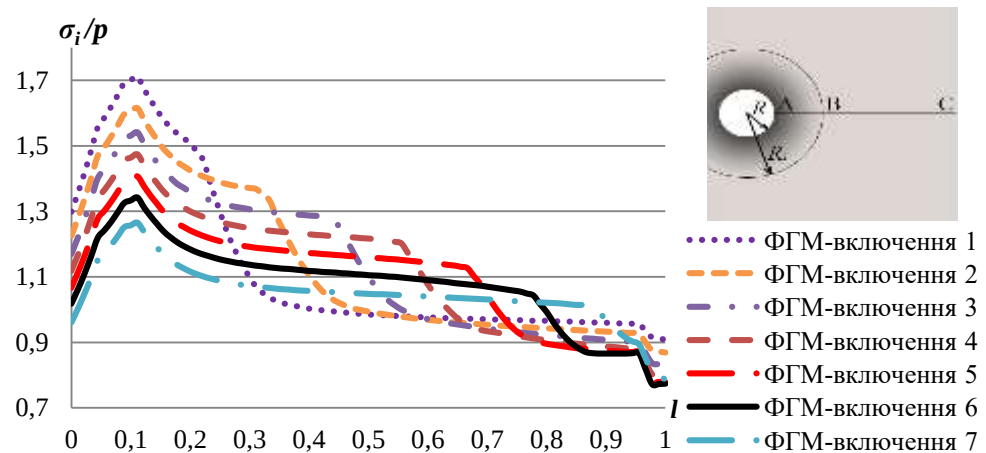
зменшення величини ККН для граничних умов 1, 3 виявляється ФГМ-включення 6, а для граничної умови 2 – ФГМ-включення 7.



а)



б)



в)

Рис. 3 – Розподіл відносних напружень σ_i/p в пластині з ФГМ-включенням у перерізі AC для задачі 1 (а), задачі 2 (б) та задачі 3 (в) у разі $k=3$

Як видно з рис. 3, а) – рис. 3, в), за використання ФГМ-включень відбувається перерозподіл відносних напружень за площиною пластини (у перерізі AC): в околі отвору максимальні напруження зменшуються у порівнянні з випадком пластини без включень, у той же час спостерігається збільшення напружень в другій (центральної) зоні (h_2) ФГМ-включення.

Як приклад, на рис. 4 – рис. 6 наведено розподіл інтенсивностей напружень σ_i та деформацій ε_i в пластині з круговим отвором і ФГМ-включенням 6 навколо нього для граничних умов 1 – 3 у разі $k = 3$.

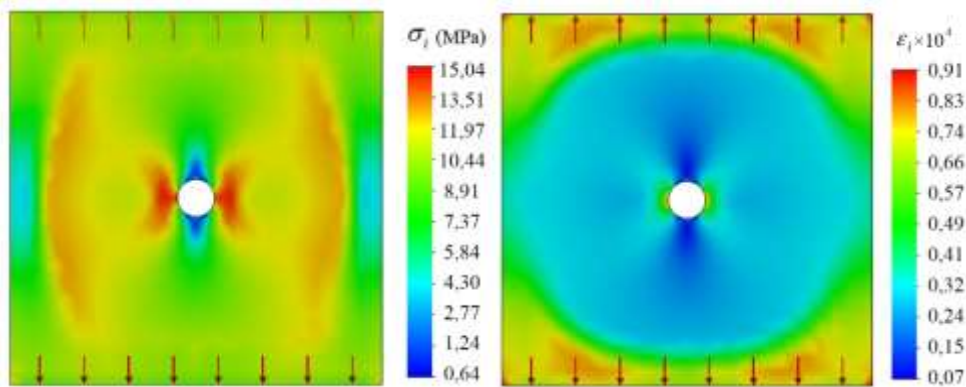


Рис. 4 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в пластині з ФГМ-включенням 6 для задачі 1

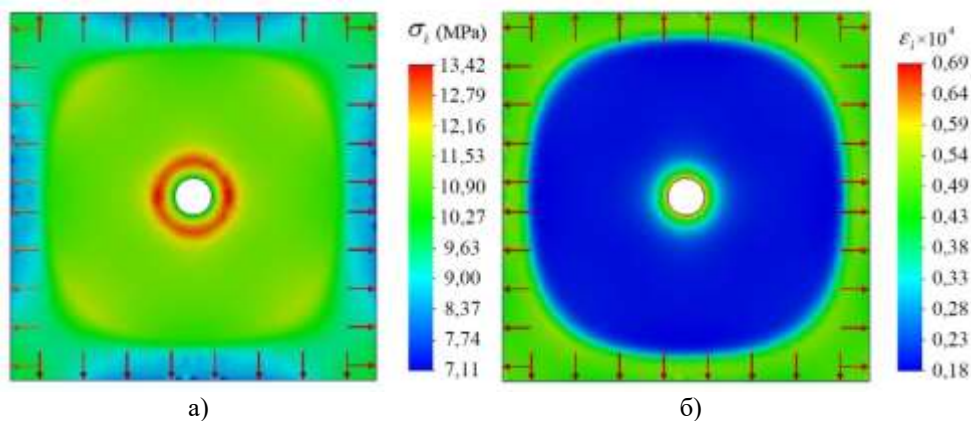


Рис. 5 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в пластині з ФГМ-включенням 6 для задачі 2

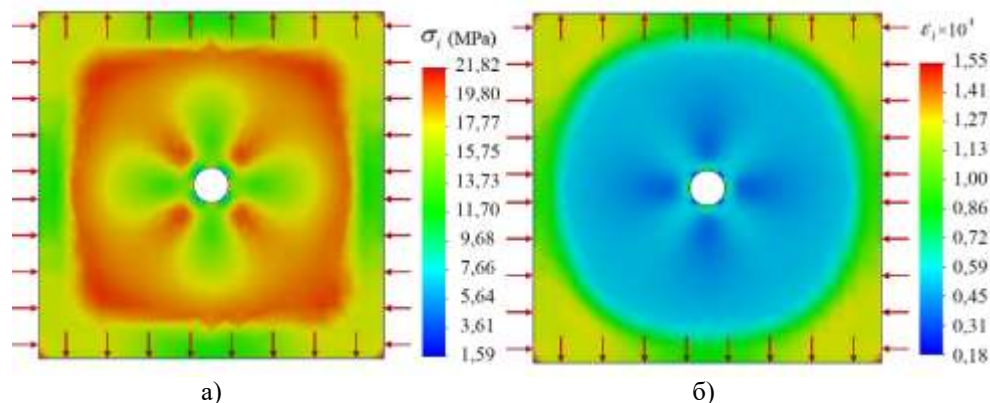


Рис. 6 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i (а) та деформацій ε_i (б) в пластині з ФГМ-включенням 6 для задачі 3

Аналіз рис. 4 – рис. 6 показує, що застосування ФГМ-включень з запропонованим законом зміни модуля пружності дозволяє зменшити концентрацію напружень навколо отвору в тонких пластинах. Це відбувається за рахунок їх перерозподілу від краю отвору на другу зону включення. Оскільки розглянуті включення мають більшу жорсткість ніж матеріал пластини, то деформації також суттєво зменшилися. Також видно, що граничні умови впливають на перерозподіл напружень навіть при застосуванні однакових включень, тому виникає інтерес знайти раціональні параметри ФГМ-включення, з точки зору зменшення величини ККН, для кожного виду граничних умов. Для цього було проведено багаточисленні розрахунки з варіюванням коефіцієнта відносної жорсткості k , а також розмірів кожної з трьох зон ФГМ-включення. Знайдені раціональні параметри ФГМ-включень та їх вплив на параметри НДС в пластині зведено в табл. 6.

Таблиця 6

Раціональні параметри ФГМ-включень,
коефіцієнт концентрації напружень та максимальні деформації
в пластині за різних граничних умов

Задача	R_1	R_2	R_3	k	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
Задача 1	2,5	4,5	1,0	4,0	1,33	-56,4	0,90	-57,7
Задача 2	2,0	6,0	1,0	3,0	1,21	-39,8	0,75	-49,7
Задача 3	2,0	5,0	2,0	3,5	2,18	-45,8	1,51	-46,8

Тут δ_1, δ_2 – відхилення ККН та максимальних деформацій від відповідного значення для пластини без включення. Під позначаннями R_1, R_2, R_3 розуміємо розмір кожної з трьох зон ФГМ-включення.

Із табл. 6 видно, що для кожної з граничних умов, що розглядаються, було отримано різні раціональні параметри ФГМ-включень, а саме розмір зон включення та коефіцієнт відносної жорсткості. Можна зробити висновок, що використання ФГМ-включень в тонких пластинах є доцільним, але для кожного випадку граничних умов потрібно знаходити раціональні параметри таких включень, які дозволять отримати максимальні переваги від застосування ФГМ-включень.

Висновки. На основі проведеної серії широкомасштабних обчислювальних експериментів із застосуванням МСЕ здійснено моделювання та аналіз впливу граничних умов на концентрацію напружень навколо кругового отвору в тонких пластинах, підкріплених включенням із ФГМ.

Результати комп'ютерного моделювання і числового дослідження впливу геометричних характеристик ФГМ-включення на концентрацію параметрів НДС навколо отвору в тонких пластинах показали, що за наявності ФГМ-включень з певними механічними властивостями та геометричними характеристиками вдається суттєво зменшити ККН і відповідну інтенсивність деформацій в околі отвору для всіх розглянутих варіантів граничних умов. Було показано, що для кожного варіанта граничних умов раціональні параметри ФГМ-включень різні, але запропонований закон зміни модуля пружності радіально-неоднорідних включень дозволяє зменшити концентрацію напружень і максимальні деформації в усіх розглянутих випадках.

Отже, використання кільцевих ФГМ-включень навколо кругових отворів у пластинах за різних граничних умов є доцільним, оскільки такі включення дають змогу знизити концентрацію напружень за рахунок їх перерозподілу та отримати більш плавний розподіл напружень без стрибків. Однак, кожний варіант граничних умов потрібно досліджувати окремо і знаходити параметри ФГМ-включень, які будуть раціональними для кожного конкретного випадку.

Подальший інтерес представляє пошук раціональних параметрів ФГМ-включень з точки зору впливу на зменшення концентрації параметрів НДС оболонок із різними граничними умовами.

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчёт на прочность деталей машин: Справочник. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
2. Вайнберг Д. В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. К.: Техніка, 1969. 220 с.
3. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. К.: Академперіодика, 2006. 472 с.
4. Гудрамович В. С. Влияние отверстий на предельное состояние элементов тонкостенных металлических оболочечно-пластинчатых конструкций. Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер. Механіка, 2014. Вип. 18, Т. 2. С. 47–65.
5. Peterson. R. F. Stress concentration factors. Wiley, 1974. 336 p.
6. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications, 2021. V. 29, Iss.1. P. 42–53. <https://doi.org/10.15421/142103>
7. Гарт Е. Л., Гудрамович В. С., Терехин Б. І. Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень в тонких пластинах та циліндричних оболонках з круговим отвором. Техн. механіка. 2022. № 4. С. 67–78.
8. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. Strength of materials and theory of structures. Kyiv: KNUBA, 2023. Iss. 110. P. 63–80. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>
9. Hudramovich V. S., Hart E. L., Terokhin B. I. Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion. Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials: Collected work. Springer, Cham, 2024. Vol. 204. Chapter 18. P. 249–264. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_18
10. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
11. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. Методы расчета оболочек. В 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К.: Наукова думка, 1980. 636 с.
12. Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Панченко С. В. Напружено-деформований стан пластин з підкріпленими прямокутними отворами різної орієнтації відносно напрямку дії зусилля розтягу. Техн. механіка. 2018. № 4. С. 82–89. <https://doi.org/10.15407/itm2018.04.082>
13. Gudramovich V. S., Gart E. L., Strunin K. A. Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions. Materials Science. 2017. V. 52, Iss. 6. P. 768–774. <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z>
14. Hudramovich V. S., Hart E. L., Marchenko O. A. Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure. Strength Mater. 2021. V. 52, No. 6. P. 832–842. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7>

15. Yang Q. Q., Gao C. F., Chen W. T. Stress concentration in a finite functionally graded material plate. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 2012. V. 55. P. 1263–1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
16. Kubair D. V., Bhanu-Chandar B. Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. *Intern. J. Mech. Sci.* 2008. V. 50. P. 732–742. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009>
17. Mohammadi M., Dryden J. R., Jiang L. Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. *Intern. J. Solids Structures*. 2011. V. 48. P. 483–491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>
18. Jana K., Pal S., Haldar S. Modal analysis of power law functionally graded material plates with rectangular cutouts. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2023. <http://doi.org/10.1080/15397734.2023.2180033>
19. Rani P., Verma D., Ghangas G. Stress concentration analysis of functionally graded material coated elliptical inclusion under uniaxial tension. *Materials Today: Proceedings*, 2023. V. 78, Part 3. P. 351–358. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.09.602>
20. Yang Q., Cao H., Tang Y., Li Y., Chen X. Experimental investigation of stress distributions in 3D printed graded plates with a circular hole. *Materials*, 2021. V. 14, No. 24, 7845. P. 1–13. <https://doi.org/10.3390/ma14247845>
21. Баженов В. А., Цихановський В. К., Кислокий В. М. Метод скінчених елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. К: КНУБА, 2000. 387 с.
22. Сахаров А. С., Кислокий В. Н., Киричеський В. В., Альтенбах М. Метод конечных элементов в механике твердых тел. К.: Вища школа, 1982. 480 с.
23. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Elsevier Science & Technology, 1974. 412 p.

Отримано 15.01.2025,
в остаточному варіанті 27.02.2025