

СТАБІЛІЗАЦІЯ ОБЕРТАННЯ РОТОРА ДАР'Є ЗМІННОГО МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ, КЕРОВАНОГО ВАРІАЦІЯМИ ДОВЖИНИ ТРАВЕРС*Інститут транспортних систем і технологій**Національної академії наук України,**вул. Писаржевського, 5, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: olegmolotkov57@gmail.com*

В сучасному світі вітроенергетичні установки (ВЕУ) вертикально-осьового типу набули широкого розповсюдження. Традиційно для забезпечення оптимального режиму роботи ВЕУ в якості виконавчих органів систем керування використовуються генератори різного типу, які регулюють обертання ротора шляхом розсіяння енергії при збільшенні швидкості вітру або його розгоном при її зменшенні. Як правило, ротори таких систем мають незмінну конфігурацію, що забезпечує простоту конструкції і розв'язку задач керування в різноманітних експлуатаційних режимах. Такий підхід призводить до перевантаження трансмісії, викликає пружні коливання її швидкохідного та тихохідного валів та ускладнення алгоритмів керування. В якості одного із можливих шляхів усунення цих проблем все більш широко застосовуються методи регулювання, пов'язані зі змінами аеродинамічних властивостей ротора. Це надає системі відповідної адаптації до умов роботи, а саме до змін швидкості вітру. Зміни аеродинаміки ротору можуть бути здійснені двома шляхами: зміною кута установки лопатей або зміною конфігурації ротора – зміною довжини лопатей та траверс. Зміна довжини лопатей не призводить до ускладнень моделі динаміки ротора як об'єкта керування. Для забезпечення стабілізації обертання ротора в цьому випадку використовуються пропорційно-інтегральні або пропорційно-інтегрально-диференціальні регулятори, умови стійкої роботи яких розглянуті в попередніх роботах авторів. Доведена динамічна подібність моделей ротора як об'єкта управління, керованого змінами довжини лопатей і керованого змінами довжини траверс, за умови малих відхилень довжини траверс від номінального значення. Розвинуті підхід та методика забезпечення малих відхилень довжини траверс шляхом перерозподілу навантажень між каналами стабілізації при їх сумісній роботі. Обмеженість малістю відхилень довжини траверс від номінальних значень не дозволяє використовувати потенційні можливості ротора як системи, що перетворює енергію вітру в механічну, а далі, в електричну енергію. Більш повне застосування можливостей системи потребує розширення можливості його роботи при значних відхиленнях довжини траверс від номінальних значень. Труднощі, які виникають при цьому, пов'язані із ускладненням моделі динаміки ротора як об'єкта управління, обумовленим значними змінами в часі його моменту інерції. Метою статті є розробка моделі динаміки ротора Дар'є як об'єкта управління, придатної для роботи із значними відхиленнями довжини траверс від номінальних значень і пов'язаних з ними змін моменту інерції ротора; синтез та аналіз ефективності алгоритмів стабілізації обертання ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ працездатних в зазначених умовах. Методами вирішення задачі є методи класичної теорії автоматичного управління і математичного моделювання. Новизна отриманих результатів полягає в розповсюдженні концепції регулювання шляхом зміни площі, що омітається, на вертикально-осьові ВЕУ із ротором Дар'є, що керуються значними змінами довжини траверс, і як наслідок змінами моменту інерції ротора; синтезі ефективних стійких алгоритмів стабілізації швидкості обертів ротора вертикально-осьових ВЕУ із ротором Дар'є. Запропоновані алгоритми та методи можуть бути використані при проектуванні перспективних вертикально-осьових ВЕУ різної потужності.

Ключові слова: вітроенергетичні установки, ротор Дар'є, стабілізація обертання, змінний момент інерції, стійкість, працездатність, математичне моделювання.

Vertical-axis wind turbines (VAWTs) have become widespread in the modern world. Traditionally, to ensure the optimal operation of wind turbines, various types of generators are used as control system actuators, which control the rotor speed by energy dissipation when the wind speed increases or by speeding up the rotor when the wind speed decreases. As a rule, the rotors of such systems have a fixed configuration, which ensures simplicity in design and solution of control problems in various operating modes. This approach overloads the transmission, causes elastic vibrations of its high-speed and low-speed shafts, and complicates control algorithms. As a possible way out, ever increasing use is made of control methods based on varying the aerodynamic properties of the rotor. This adapts the system to the operating conditions, namely to variations in wind speed. The rotor aerodynamics can be varied in two ways: by varying the blade angle or by varying the rotor configuration (by varying the length of the blades and traverses). Varying the blade length does not complicate the rotor dynamics model as a control object. To stabilize the rotor speed in this case, use is made of proportional plus integral (PI) or proportional plus integral plus derivative (PID) controllers, whose stable operation conditions the authors considered earlier. It was demonstrated that the rotor models where the rotor as a control object is controlled by varying the blade length and by varying the traverse length are dynamically similar on condition that the variations of the traverse length from its nominal value are small. An approach to and a procedure for ensuring the smallness of these variations by redistributing loads between the stabilization channels in their joint operation were developed. Restricting oneself to the case of small variations gives no way to use the potentialities of the rotor as a system that converts wind energy to mechanical and then to electric energy. A more complete use of system potentialities calls for considering the possibility of its operation at significant variations of the traverse length from its nominal value. The difficulties that arise in doing so involve the complication of the dynamic

© С. В. Тарасов, О. Н. Молотков, 2025

model of the rotor as a control object due to significant time variations of its moment of inertia. The goal of this paper is to develop a dynamic model of the Darrieus rotor as a control object that would account for significant variations of the transverse length from its nominal value and associated variations of the moment of inertia and to synthesize and analyze the effectiveness of Darrieus rotor speed stabilization algorithms for VAWTs operable in the above-mentioned conditions. The problem is solved using methods of classical theory of automatic control and mathematical simulation. The obtained results are new in a generalization of the concept of swept-area variation control to Darrieus rotor VAWTs controlled by significant variations of the traverse length and associated variations of the moment of inertia and in the synthesized efficient rotor speed stabilization algorithms for them. The proposed algorithms and methods may be used in the design of promising VAWTs of different capacities.

Keywords: wind power plants, Darier rotor, rotation stabilization, variable moment of inertia, stability, operability, mathematical simulation.

Вступ. В сучасному світі вітроенергетичні системи вертикально-осьового типу набули широкого розповсюдження. Традиційно для забезпечення оптимального режиму роботи вітроенергетичні установки (ВЕУ) в якості виконавчих органів системи керування використовуються генератори різного типу, які регулюють обертання ротора шляхом розсіяння енергії при збільшенні швидкості вітру V , або розгоном ротора при зменшенні V . Як правило, ротори таких систем мають незмінну конфігурацію, що забезпечує простоту конструкції і розв'язку задач керування в різноманітних експлуатаційних режимах [1].

Такий підхід призводить до перевантаження трансмісії, викликає пружні коливання її швидкохідного та тихохідного валів та ускладнення алгоритмів керування. В якості одного із можливих шляхів усунення цих проблем все більш широко застосовуються методи регулювання, пов'язані зі змінами аеродинамічних властивостей ротора. Це надає системі відповідної адаптації до умов роботи ВЕУ, а саме до змін швидкості вітру V [2, 3]. Зміни аеродинаміки ротору можуть бути здійснені двома шляхами: зміною кута установки лопатей [2] або зміною конфігурації ротора [3] – зміною довжини лопатей та траверс. Зміна довжини лопатей не призводить до ускладнень моделі динаміки ротора як об'єкта керування. Для забезпечення стабілізації обертання ротора в цьому випадку використовуються пропорційно-інтегральні (ПІ) або пропорційно-інтегрально-диференціальні (ПІД) регулятори, умови стійкої роботи яких розглянуті, наприклад, в роботі [4]. Динамічна подібність моделей ротора як об'єкта управління, керованого змінами довжини лопатей і керованого змінами довжини траверс за умови малих відхилень довжини траверс від номінального значення доведена в роботі [5]. Підхід та методика забезпечення малих відхилень довжини траверс шляхом перерозподілу навантажень між каналами стабілізації при їх сумісній роботі розвинуті в [6].

Обмеженість малістю відхилень довжини траверс від номінальних значень не дозволяє використовувати потенційні можливості ротора як системи, що перетворює енергію вітру в механічну, а далі, в електричну енергію. Більш повне застосування можливостей системи потребує розширення можливості його роботи при значних відхиленнях довжини траверс від номінальних значень. Труднощі, які виникають при цьому, пов'язані із ускладненням моделі динаміки ротору як об'єкта управління, обумовленим значними змінами в часі його моменту інерції [7, 8].

Метою статті є розробка моделі динаміки ротора Дар'є як об'єкта управління, придатної для роботи зі значними відхиленнями довжини траверс від номінальних значень і пов'язаних з ними змін моменту інерції ротора; синтез та аналіз ефективності алгоритмів стабілізації обертання

ротора Дар'є вертикально-осьових ВЕУ працездатних в зазначених умовах. Методами вирішення задачі є методи класичної теорії автоматичного управління і математичного моделювання. Новизна отриманих результатів полягає в розповсюдженні концепції регулювання шляхом зміни площі, що омітається, на вертикально-осьові ВЕУ із ротором Дар'є, що керуються значними змінами довжини траверс, і як наслідок змінами моменту інерції ротора; синтезі ефективних стійких алгоритмів стабілізації швидкості обертів ротора вертикально-осьових ВЕУ із ротором Дар'є. Запропоновані алгоритми та методи можуть бути використані при проектуванні перспективних вертикально-осьових ВЕУ різної потужності.

Постановка задачі. Розглядається задача стабілізації швидкості обертання ротора вертикально-осьової ВЕУ із ротором Дар'є навколо оптимального значення швидкості ω_o , що відповідає максимуму потужності для відповідної швидкості вітру V_o [1, 9]. Відносно ВЕУ в цілому вважається, що ротор має довільну кількість лопатей, жорстко пов'язаних траверсами з опорно-підшипниковим вузлом, який передає крутильний момент на генератор через трансмісію; стабілізація обертів ротора здійснюється змінами довжини траверс, які настільки значні, що модель динаміки повинна враховувати викликані ними зміни моменту інерції J . Зміни довжини траверс в процесі роботи системи стабілізації виконуються синхронно; їх довжина залишається однаковою; деформації траверс не беруться до уваги. Відбір обертового моменту для переміщення рухомих частин розсувних траверс відбувається від осі ротора через елементи додаткової трансмісії, що не допускає проковзання. За такого конструктивного виконання ротора він є механізмом з одним ступенем вільності за наявності кількох ступенів рухомості в траверсах, тому обертання рухомих частин траверс однозначно визначається обертанням ротора відносно його осі [10], а динаміка ротора в цілому описується загальною системою рівнянь [11, стор. 313]

$$\frac{dK}{dt} = \sum_i M_i, \quad (1)$$

де $\sum_i M_i = M_{eo} - M_e$ – сума моментів зовнішніх сил – аеродинамічного моменту M_{eo} і гальмівного моменту генератора M_e ; K – кінетичний момент ротора; ω – швидкість обертання ротора навколо вертикальної осі. Момент інерції ротора ВЕУ J в процесі роботи каналу стабілізації змінюється відповідно до співвідношення

$$J = m_o \cdot R^2,$$

де R – поточна довжина траверс, m_o – незмінна маса ротора.

Задача полягає в розробці моделі динаміки ротора Дар'є, як об'єкта управління, придатної для роботи із значними відхиленнями довжини траверс від номінальних значень, які викликають зміни моменту інерції ротора; в виборі та аналізі ефективності алгоритмів формування зворотного зв'язку, що забезпечують стійкість замкнутої системи ротор–регулятор,

працездатність каналу стабілізації, відсутність статичної помилки регулювання та задовільні значення показників якості регулювання.

Рівняння динаміки ротора ВЕУ. Враховуючи, що за визначенням [11, стор. 307], кінетичний момент є

$$K = \omega \cdot J$$

та обчисливши і підставивши в (1) похідну від моменту інерції J , отримуємо рівняння у відхиленнях від стану, що встановлюється, на величини $\Delta\omega$, ΔR , $\Delta M_{\text{вд}}$, $\Delta M_{\text{с}}$ у вигляді

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} + 2m_o \omega \cdot R \frac{d\Delta R}{dt} = \Delta M_{\text{вд}} - \Delta M_{\text{с}}. \quad (2)$$

Тут і далі індексом "о" позначається значення відповідної змінної, що встановлюється.

Рівняння (2) нелінійне, тому проведемо його лінеаризацію.

Розкладаючи другий доданок зліва в співвідношенні (2) в ряд Тейлора в околі точки ω_o , R_o , $\left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_o$ і залишаючи лише лінійні члени розкладу, отримуємо

$$2m_o \omega \cdot R \frac{d\Delta R}{dt} \cong 2m_o R_o \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_o \Delta\omega + 2m_o \omega_o \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_o \Delta R + 2m_o \omega_o R_o \cdot \Delta \frac{d\Delta R}{dt}, \quad (3)$$

де $\left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_o$ – значення похідної від ΔR за часом при $\omega = \omega_o$, $R = R_o$,

$M_{\text{вд}} = M_{\text{вд}o}$, $M_{\text{с}} = M_{\text{с}o}$, і в початковий момент часу $t = t_o$; $\Delta \frac{d\Delta R}{dt}$ –

залежність від часу прирощення похідної $\frac{d\Delta R}{dt}$, яке уявляє собою

додатковий рух $\frac{d\Delta R}{dt}$ [12, стор. 31], обумовлений варіаціями параметрів

$$\Delta \frac{d\Delta R}{dt} = \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_{\omega_o + \Delta\omega, R_o + \Delta R, \frac{dJ}{dt} \neq 0, M_{\text{вд}o} + \Delta M_{\text{вд}}, M_{\text{с}o} + \Delta M_{\text{с}}} - \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_{\omega_o, R_o, \frac{dJ}{dt} = 0, M_{\text{вд}o}, M_{\text{с}o}}. \quad (4)$$

Підставивши (4) у співвідношення (3), отримуємо

$$2m_o \omega \cdot R \frac{d\Delta R}{dt} \cong 2m_o (R_o \cdot \Delta\omega + \omega_o \cdot \Delta R) \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_o + 2m_o \omega_o R_o \cdot \left(\left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_{\omega_o + \Delta\omega, R_o + \Delta R, \frac{dJ}{dt} \neq 0, M_{\text{вд}o} + \Delta M_{\text{вд}}, M_{\text{с}o} + \Delta M_{\text{с}}} - \left. \frac{d\Delta R}{dt} \right|_{\omega_o, R_o, \frac{dJ}{dt} = 0, M_{\text{вд}o}, M_{\text{с}o}} \right). \quad (5)$$

Записавши відхилення правої частини рівняння (2), маємо

$$\Delta M_{\omega} = \frac{\partial M_{\omega}}{\partial P_{\omega}} \left(\frac{\partial P_{\omega}}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial P_{\omega}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial R} \Delta R \right) + \frac{\partial M_{\omega}}{\partial \omega} \Delta \omega,$$

$$\Delta M_{\omega} = \frac{\partial M_{\omega}}{\partial N_{\omega}} \Delta N_{\omega} + \frac{\partial M_{\omega}}{\partial \omega} \Delta \omega,$$

де P_{ω} – потужність вітрового двигуна, S – площа поверхні, що омитається ротором, N_{ω} – потужність генератора, ΔN_{ω} – її відхилення. Обчисливши відповідні часткові похідні і виконавши необхідні перетворення для лінеаризованого рівняння динаміки обертів ротора у відхиленнях від стану, що встановлюється, маємо

$$T \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = k_1 \Delta V + k_2 \Delta R + k_3 \Delta N_{\omega} - \frac{2\omega_o^2}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1-\eta)} \cdot$$

$$\cdot \left[2m_o (R_o \cdot \Delta\omega + \omega_o \cdot \Delta R) \frac{d\Delta R}{dt} \Big|_o + 2m_o \omega_o R_o \cdot \left(\frac{d\Delta R}{dt} \Big|_{M_{\omega\omega} + \Delta M_{\omega\omega}, M_{\omega\omega} + \Delta M_{\omega\omega}}^{\omega_o + \Delta\omega, R_o + \Delta R, \frac{dJ}{dt} \neq 0}, - \frac{d\Delta R}{dt} \Big|_{M_{\omega\omega}, M_{\omega\omega}}^{\omega_o, R_o, \frac{dJ}{dt} = 0} \right) \right], \quad (6)$$

$$T = \frac{2J\omega_o^2}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1-\eta)}, \quad k_1 = \frac{3\omega_o}{V_o (1-\eta)}, \quad k_2 = \frac{\omega_o}{R_o (1-\eta)}, \quad (7)$$

$$k_3 = -\frac{2\omega_o}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1-\eta)},$$

де T – постійна часу, k_1 , k_2 , k_3 – коефіцієнти лінеаризації, η – сукупний к.к.д. трансмісії і генератора.

Рівняння (6) лінійне нестационарне із змінними в часі коефіцієнтами. Регулярних методів забезпечення стійкості таких систем не існує, тому обґрунтуємо вибір алгоритму формування зворотного зв'язку спочатку для стаціонарної системи із незмінними коефіцієнтами, а потім доведемо його працездатність для нестационарної системи із коефіцієнтами, змінними в часі.

Умови стійкості та показники якості. Для пропорційно-інтегрального алгоритму формування зворотного зв'язку з корекцією за прискоренням [4]

$$\frac{d\Delta R}{dt} = K_1 \Delta\omega + K_2 \Delta\ddot{\omega}$$

члени із $\frac{d\Delta R}{dt} \Big|_o$ і $\frac{d\Delta R}{dt} \Big|_{M_{\omega\omega}, M_{\omega\omega}}^{\omega_o, R_o, \frac{dJ}{dt} = 0}$ у співвідношенні (6) дорівнюють нулю. Це

спрощує співвідношення (6), а оскільки управління здійснюється лише зміною довжини траверс тобто керування змінами потужності генератора не задіяне і $\Delta N_{\omega} = 0$, рівняння динаміки замкнутої системи будуть

$$T \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = k_1 \Delta V + k_2 \Delta R + k_4 \frac{d\Delta R}{dt}, \quad (8)$$

$$\frac{d\Delta R}{dt} = K_1 \Delta\omega + K_2 \frac{d\Delta\omega}{dt},$$

де $k_4 = -\frac{2m_o \omega_o^3}{C_p \rho_o H_o V_o^3 (1-\eta)}$ – додатковий коефіцієнт, який за фізичним змістом є відображенням закону збереження кінетичного моменту [11, стор. 314] – позитивні $\frac{d\Delta R}{dt}$ гальмують обертання ротора, негативні прискорюють.

У співвідношенні (8) і далі умови при $\frac{d\Delta R}{dt}$ опущені.

Розв'язок системи (8) відносно похідних перетворює її на систему

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega}{dt} &= [(k_4 K_1 - 1)\Delta\omega + k_2 \Delta R + k_1 \Delta V] / (T - k_4 K_2), \\ \frac{d\Delta R}{dt} &= [(TK_1 - K_2)\Delta\omega + k_2 K_2 \Delta R + k_1 K_2 \Delta V] / (T - k_4 K_2), \end{aligned} \quad (9)$$

додатковою умовою існування рішення якої є

$$T - k_4 K_2 \neq 0. \quad (10)$$

Поява додаткового коефіцієнта k_4 обмежує діапазон працездатності системи стабілізації необхідністю забезпечити виконання умови (10).

Характеристичний поліном замкнутої системи (9) буде

$$\det \begin{bmatrix} \frac{k_4 K_1 - 1}{T - k_4 K_2} - \lambda & \frac{k_2}{T - k_4 K_2} \\ \frac{TK_1 - K_2}{T - k_4 K_2} & \frac{k_2 K_2}{T - k_4 K_2} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

або після приведення подібних

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (11)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{1 - k_2 K_2 - k_4 K_1}{T - k_4 K_2}, \quad a_2 = -\frac{k_2 K_1}{T - k_4 K_2}, \quad T - k_4 K_2 \neq 0. \quad (12)$$

Необхідною та достатньою умовою стійкості системи (9) з характеристичним поліномом (11), (12) є умова позитивності коефіцієнтів $a_i, i = \overline{1,2}$ – критерій Гурвіца [13], яка зводиться до нерівностей

$$K_1 < 0 \quad \text{і} \quad \frac{T}{k_4} < K_2 < \frac{1 - k_4 K_1}{k_2}. \quad (13)$$

Корені характеристичного рівняння (11), (12) є

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - k_2 K_2 - k_4 K_1 \pm \sqrt{(k_2 K_2 + k_4 K_1 - 1)^2 - 4k_2 K_1 (k_4 K_2 - T)}}{2(k_4 K_2 - T)}. \quad (14)$$

Аналіз співвідношення (14) доводить, що змінами коефіцієнтів зворотного зв'язку K_1 , K_2 забезпечується повна керованість ступенем стійкості та коливальністю системи. На жаль, забезпечити вплив одного з коефіцієнтів на ступінь стійкості, а іншого на коливальність системи не можливо [4].

Провівши відповідний аналіз для *пропорційно-інтегрального алгоритму* формування зворотного зв'язку [4]

$$\frac{d\Delta R}{dt} = K_1 \Delta \omega, \quad (15)$$

отримуємо умову стійкості замкнутої системи у вигляді

$$\frac{1}{k_4} < K_1 < 0, \quad (16)$$

корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 - k_4 K_1}{2T} \pm \frac{1}{2T} \sqrt{(1 - k_4 K_1)^2 + 4k_2 T K_1}. \quad (17)$$

Аналіз співвідношення (17) доводить, що вибором коефіцієнту K_1 можливо забезпечити лише сумісні зміни ступеня стійкості і коливальності перехідних процесів.

Області стійкості алгоритмів формування зворотних зв'язків зображені на рис. 1. Порівнявши їх із областями стійкості системи, керованої змінами довжини траверс без урахування змін моменту інерції ротора [5], робимо висновок, що області стійкості значно скоротились. Область стійкості *пропорційно-інтегрального алгоритму з корекцією за прискоренням* (ПД) скоротилась з всього третього квадранту до внутрішньої частини трикутника на рис. 1. Область стійкості *пропорційно-інтегрального алгоритму* (ПІ) скоротилась з всієї від'ємної частини осі абсцис K_1 до відрізка $[1/k_4, 0]$. Це накладає суттєві обмеження на вибір коефіцієнтів зворотних зв'язків при вирішенні задач проєктування системи стабілізації.



Рис. 1 – Області стійкості алгоритмів формування зворотних зв'язків

Кінцеві значення відхилень швидкості обертів ротора і довжини траверс. Для пропорційно-інтегрального алгоритму формування зворотного зв'язку з корекцією за прискоренням спрямуємо до нуля праві частини системи рівнянь (9) і отримаємо лінійну алгебраїчну систему рівнянь відносно кінцевих значень $\Delta\omega$ і ΔR

$$\begin{aligned}(k_4 K_1 - 1)\Delta\omega + k_2 \Delta R &= -k_1 \Delta V, \\ (TK_1 - K_2)\Delta\omega + k_2 K_2 \Delta R &= -k_1 K_2 \Delta V.\end{aligned}\quad (18)$$

В результаті розв'язку отримуємо

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta R = -\frac{k_1}{k_2} \Delta V. \quad (19)$$

Підставляючи в (19) залежності k_1 і k_2 (7) від параметрів ВЕУ, отримуємо

$$\Delta R = -\frac{3R_o}{V_o} \Delta V,$$

що співпадає із співвідношеннями, отриманими в [6] без урахування змін моменту інерції ротора.

Якщо врахувати, що коефіцієнт k_2 залежить від довжини траверс $R(t)$, співвідношення (19) перетворюється на [5]

$$\Delta R(t) = -\frac{3R_o \Delta V}{V_o + 3\Delta V}. \quad (20)$$

При змінах ΔR за часом змінюється також і постійна часу T , що може призвести до порушення умов існування рішення системи (9). Для запобігання цього необхідно обирати коефіцієнти зворотного зв'язку K_1 , K_2 з нерівності (13) з урахуванням змін T , яке відбувається приблизно в інтервалі $[T_o, T_\kappa]$, де T_κ – кінцеве значення T , обчислене за формулою

$$T_\kappa = \frac{m_o(R_o + \Delta R(t))\omega_o^2}{C_p \rho_o H_o V_o^3 (1 - \eta)},$$

де $\Delta R(t)$ – кінцеве значення ΔR , обчислене із співвідношення (20).

Для пропорційно-інтегрального алгоритму формування зворотного зв'язку (15) система рівнянь для визначення кінцевих значень $\Delta\omega$ і ΔR утворюється із системи (18) при $K_2 = 0$, з чого випливають наведені вище співвідношення (19), (20).

Таким чином отримана система рівнянь динаміки ротора Дар'є, як об'єкта управління, придатна для роботи зі значними відхиленнями довжини траверс від номінальних значень із пов'язаними з ними змінами моменту інерції ротора; доведена стійкість запропонованих алгоритмів формування зворотного зв'язку при незмінних коефіцієнтах лінеаризації; визначені кінцеві значення $\Delta\omega$ і ΔR як для стаціонарної, так і для нестаціонарної моделі динаміки.

Стійкість нестаціонарної системи стабілізації швидкості обертів ротора. Проведемо дослідження стійкості системи (9) з урахуванням залежності коефіцієнтів лінеаризації від часу.

Представимо систему (9) у вигляді

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (A_o + \Delta(t))\mathbf{x},$$

де A_o – постійна матриця

$$A_o = \begin{bmatrix} \frac{k_4 K_1 - 1}{T_o - k_4 K_2} & \frac{k_{2o}}{T_o - k_4 K_2} \\ \frac{T_o K_1 - K_2}{T_o - k_4 K_2} & \frac{k_{2o} K_2}{T_o - k_4 K_2} \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$\mathbf{x}$ – вектор станів системи із компонентами

$$\mathbf{x} = [\Delta\omega \quad \Delta R];$$

$\Delta(t)$ – матриця відхилень матриці

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{k_4 K_1 - 1}{T(t) - k_4 K_2} & \frac{k_2(t)}{T(t) - k_4 K_2} \\ \frac{T(t) K_1 - K_2}{T(t) - k_4 K_2} & \frac{k_2(t) K_2}{T(t) - k_4 K_2} \end{bmatrix},$$

$$T(t) = \frac{2J(t)\omega_o^2}{C_p \rho_o S_o V_o^3 (1 - \eta)}, \quad J(t) = m_o \cdot [R_o + \Delta R(t)]^2,$$

$$k_2(t) = \frac{\omega_o}{[R_o + \Delta R(t)](1 - \eta)}, \quad |\Delta R(t)| < R_o, \quad T(t) - k_4 K_2 \neq 0 \quad \text{для } t \geq t_o$$

від A_o .

Будемо вважати, що матриця $\Delta(t)$ задовольняє умові

$$\|\Delta(t)\| < c_1 \text{ для } t \geq t_o, \quad (22)$$

де c_1 – константа, що залежить від A_o ,

$$\|\Delta(t)\| = \sum_i \sum_j |\Delta_{ij}(t)| \text{ – матрична норма.}$$

Матриця $A(t)$ – майже постійна коефіцієнтна матриця [14, стор. 244]. Тоді у зв'язку із тим, що за умов (13) матриця A_o стійка, система (9) задовольняє умовам теореми 8.6 роботи [14, стор. 244, 245], тобто система (9) зі змінними в часі коефіцієнтами лінеаризації також стійка.

Для підтвердження вищенаведеного залишається лише довести виконання умови (22). Доведемо це поелементним розглядом доданків $\|\Delta(t)\|$

Кожен доданок $\|\Delta(t)\|$ має вигляд

$$|\Delta_{ij}(t) - \Delta_{ij}(t_o)| = \left| \frac{b_{ij}(t)}{T(t) - k_4 K_2} - \frac{b_{ij}(t_o)}{T(t_o) - k_4 K_2} \right|,$$

де всі чисельники – обмежені функції для $t \geq t_o$, що залежать від константи або обмеженої функції $\Delta R(t)$, і немає жодного знаменника, який дорівнює нулю при $t \geq t_o$. Тобто всі доданки – обмежені, сума доданків також обмежена і умова (22) гарантовано виконується. Обмеженість $\Delta R(t)$ є слідством того, що $\Delta R(t)$ – неперервна функція, яка має нульове початкове значення і обмежене визначене кінцеве значення (20).

Важливим слідством вищевикладеного є можливість обирати коефіцієнти зворотного зв'язку за умов (13), (16) при початкових значеннях довжини траверси R_o і моменту інерції J_o та використовувати їх для нестационарної системи. Наведені аналіз і слідство розповсюджуються на *пропорційно-інтегральний алгоритм* формування зворотного зв'язку (15) завдяки тому, що система (9) перетворюється на аналогічну систему для алгоритму (15) при $K_2 = 0$.

Проведений аналіз дозволяє зробити загальний висновок, що обидва алгоритми формування зворотного зв'язку забезпечують стійкість замкнутої нестационарної системи стабілізації, працездатні зі значними змінами відхилень $\Delta R(t)$ від номінальних значень і викликаних ними змінами моменту інерції ротора. Обидва алгоритми дозволяють обрати дійсні або комплексно-спряжені корені характеристичних рівнянь, але пропорційно-інтегральний алгоритм формування зворотного зв'язку з корекцією за прискоренням є більш переважним та дозволяє обирати бажані значення показників якості регулювання – ступеня стійкості, довжини та коливальності перехідних процесів.

Моделювання процесів стабілізації швидкості обертів ротора.

Проведемо моделювання процесів стабілізації в замкнутій системі (9). При виконанні розрахунків приймалося, що ВЕУ з H -ротором Дар'є має конструктивні параметри та умови роботи близькі до ВЕУ-0420, наведені в таблиці 1 роботи [4], числові значення коефіцієнтів лінеаризації з таблиці 2 роботи [6]. Довгострокові зміни швидкості вітру моделювались одиничною ступеневою функцією $\Delta V(t) = 1(t)$.

Попередні розрахунки коренів характеристичного рівняння (11), (12) виявили на 2–3 порядку меншу ступінь стійкості [13, с. 203] перехідних процесів в системі із пропорційно-інтегральним алгоритмом формування зворотного зв'язку, тому моделювання проведемо лише для алгоритму з корекцією за прискоренням.

Залежності від часу відхилень $\Delta\omega$ і ΔR при роботі каналу стабілізації із змінами довжини траверс для комплексних коренів характеристичного полінома (11), (12) наведено на рис. 2 і 3, для дійсних коренів на рис. 4 і 5.

Цифрою 1 позначені перехідні функції стаціонарної системи, цифрою 2 нестационарної.

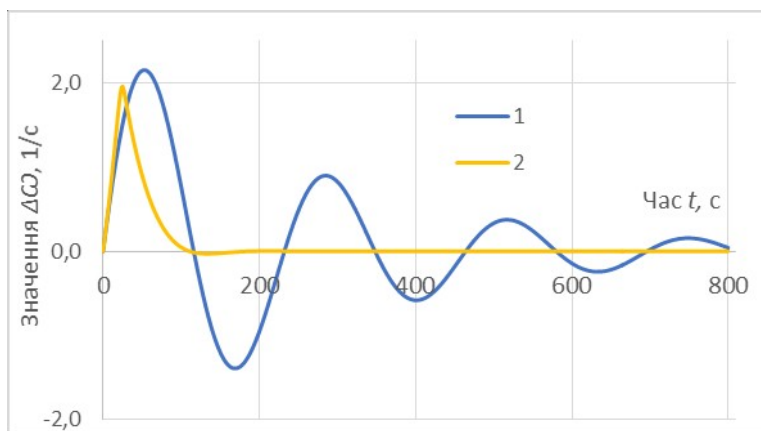


Рис. 2 – Залежності $\Delta\omega$ від часу t . Комплексні корені

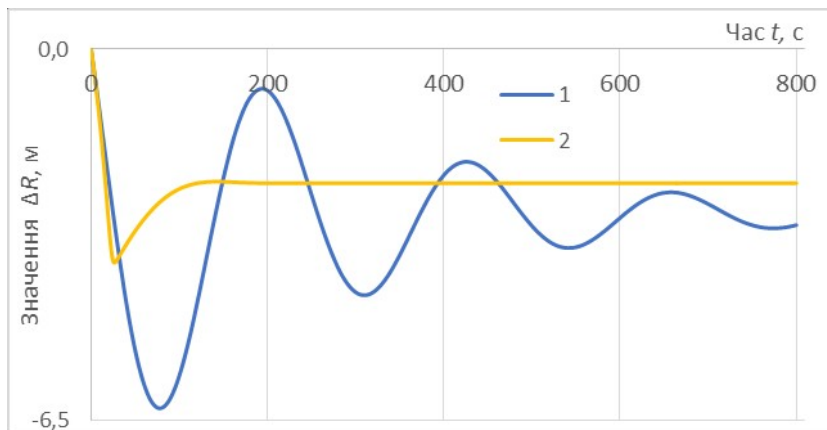


Рис. 3 – Залежності ΔR від часу t . Комплексні корені

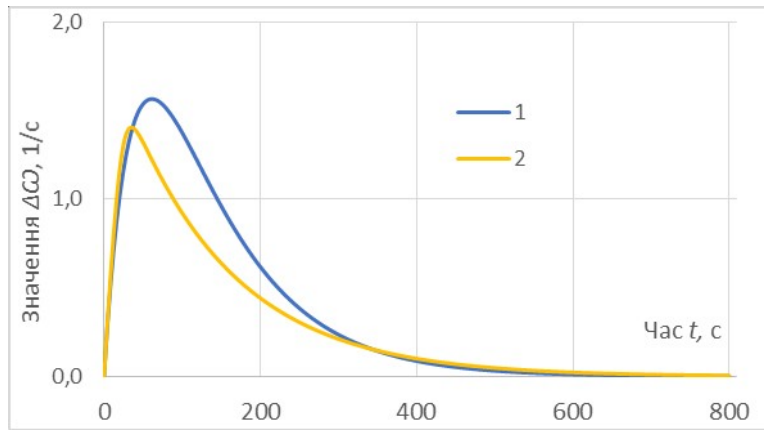


Рис. 4 – Залежності $\Delta\omega$ від часу t . Дійсні корені

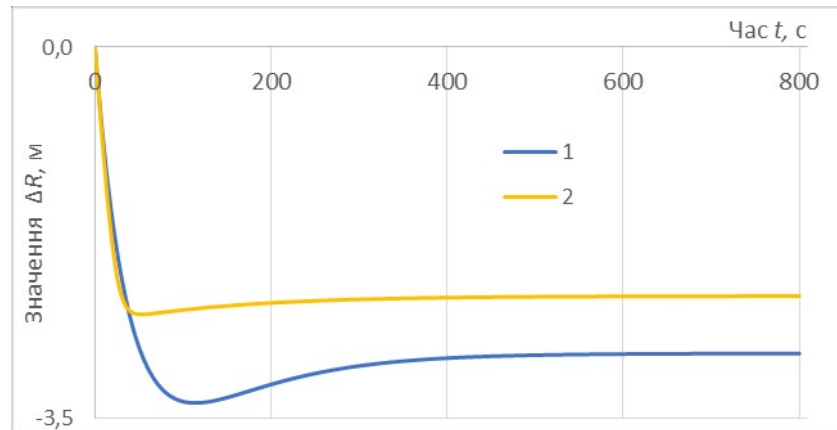


Рис. 5 – Залежності ΔR від часу t . Дійсні корені

На рис. 6 наведені залежності постійної часу T для стаціонарної системи – цифра 1, нестаціонарної із комплексними коренями поліному – цифра 2 і дійсними коренями – цифра 3.

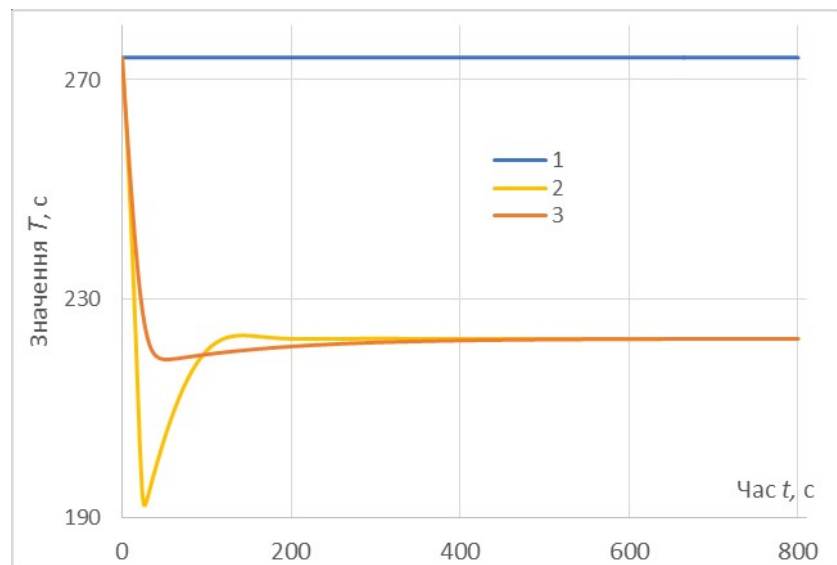


Рис. 6 – Залежності T від часу t . Комплексні та дійсні корені

Аналіз наведених на рис. 2–6 залежностей доводить ефективність запропонованого методу забезпечення стійкості нестационарної системи, керованої змінами довжини траверс із урахуванням змін моменту інерції ротора, а саме:

- перехідні процеси в стаціонарній і нестационарній системах динамічно подібні;
- стаціонарна і нестационарна системи стійкі;
- перерегулювання по змінній ΔR в нестационарній системі суттєво менше ніж в стаціонарній; перерегулювання в стаціонарній системі досягає неприйнятної величини в 50 % від R_0 ;
- перехідні процеси при дійсних коренях полінома більш привабливі, ніж при комплексних коренях – мають менше перерегулювання і більш плавний характер.

Побудована нестационарна модель динаміки обертання H -ротора Дар'є значно точніше описує поведінку реальної нелінійної системи; діапазон її працездатності обмежується лише необхідністю забезпечення умови (10) та конструктивними обмеженнями на варіації довжини траверс.

Значні відхилення довжини траверс і пов'язані з ними зміни моменту інерції ротора призводять до:

- значного зменшення із змінами в часі постійної часу системи;
- значного підвищення ступеня стійкості системи і, як слідство, зменшення довжини перехідних процесів.

Обидва використані алгоритми формування зворотного зв'язку забезпечують стійкість системи, але алгоритм із корекцією за прискоренням дозволяє обирати будь які бажані ступінь стійкості і коливальність перехідних процесів.

Значні перерегулювання по змінних $\Delta\omega$ і ΔR призводять до необхідності ускладнювати систему стабілізації швидкості обертів ротора ВЕУ, наприклад, задіяти додатково до каналу змін довжини траверс канал змін довжини лопатей.

Висновки. Побудовано модель динаміки ротора Дар'є керованого значними змінами довжини траверс із викликаних ними змінами моменту інерції ротора. Запропоновано та обґрунтовано метод забезпечення стійкості нестационарної системи стабілізації швидкості обертання ротора, доведені стійкість та працездатність алгоритмів формування зворотних зв'язків. Запропоновані модель динаміки та метод забезпечення стійкості можуть бути використані для обґрунтування конструктивних рішень при проектуванні вертикально-осьових ВЕУ із ротором Дар'є.

1. Дзензерский В. А., Тарасов С. В., Костюков И. Ю. Ветроустановки малой мощности. К.: Наук. думка, 2011. 592 с.
2. Суббота А. М., Джулаков В. Г. Повышение эффективности ветроэнергетической установки с вертикальной осью вращения. Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. 2018. № 1(85). С. 77–86.
3. Тарасов С. В., Редчиць Д. О., Тарасов А. С., Дорош О. В. Модель динаміки ротора Дар'є змінної конфігурації. Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» (ІТММ-2023), 22 березня 2023 р. 36. наук. праць. Дніпро: Український державний університет науки і технологій. 2023. С. 208–211. <https://doi.org/10.34185/1991-7848.itmm.2023.01.057>
4. Тарасов С. В., Молотков О. Н. Алгоритми стабілізації швидкості обертів ротора Дар'є вітроенергетичної установки, керованого змінами довжини лопатей. Технічна механіка. 2023. № 4. С. 50–59. <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.050>
5. Тарасов С. В., Молотков О. Н. Модель динаміки ротора Дар'є, керованого змінами довжини траверс. Матеріали 15-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні енергетичні установки на

- транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування» (СЕУТТОО-2024) 13–15 березня 2024 р. Зб. наук. праць. Херсон: Херсонська державна морська академія. 2024. С. 224–226.
6. *Тарасов С. В., Молотков О. Н.* Стабілізація обертання ротора Дар'є сумісними змінами довжини лопатей і траверс. *Технічна механіка*. 2024. № 2. С. 92–105. <https://doi.org/10.15407/itm2024.02.092>
 7. *Kartašovas V., Barzdaitis V., Mažeika P.* Modeling and simulation of variable inertia rotor. *Journal of Vibroengineering*, December 2012. Volume 14, Issue 1. URL: <https://www.researchgate.net/publication/285009606> (дата звернення 10.12.2024).
 8. *Cveticanin L., Dregelyi A., Horvath R., Zukovic M.* Dynamics of mass variable rotor and its application in modeling tuning operation. *Acta Mechanica*. February 2021. Vol. 232. P. 1605–1620. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02918-x>
 9. *Tiago Andre dos Santos Marques.* Control and Operation of a Vertical Axis Wind Turbine. Dissertacao. 2014. 83 с. <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/844820067124338/dissertacao.pdf> (дата звернення 17.06.2023).
 10. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 640 с.
 11. *Штанько П. К., Шевченко В. Г., Омельченко О. С., Дзюба Л. Ф., Пасіка В. Р., Поляков О. М.* Теоретична механіка; за ред. П.К. Штанька. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. 464 с.
 12. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, ГФМЛ, 1981. 464 с.
 13. *Бесекерский В. А., Попов Е. Н.* Теория систем автоматического управления. СПб.: Изд-во «Професия», 2003. 752 с. (Серия: Специалист).
 14. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез // Henry D'Angelo. Linear time-varying systems: Analysis and synthesis. Под ред. Н.Т. Кузовкова. М. Машиностроение, 1974. 288 с.

Отримано 18.02.2025,
в остаточному варіанті 17.03.2025